

## Cv.12: Symbolické výpočty v MATLABe

Zoznam všetkých funkcií symbolického počtu v MATLABe:

<http://www.mathworks.com/help/symbolic/functionlist.html>

Všetky výpočty, ktoré sme doteraz používali je možné zaradiť do určitej spoločnej kategórie – **kategórie numerických výpočtov**. Tu si ukážeme základy využitia symbolického toolboxu, ktorý včleňuje symbolické výpočty do prostredia MATLABu.

**Symbolic Math toolbox** umožňuje používateľom vykonávať symbolické matematické výpočty pomocou MATLABu (v minulosti sa pre tieto výpočty používal program MAPLE). Toolbox poskytuje viac než 100 symbolických funkcií pre riešenie algebraického počtu, diferenciálneho a integrálne počtu vrátane možnosti zobrazenia grafov funkcií. Z oblasti lineárnej algebry umožňuje tiež riešenie lineárnych rovníc, výpočet inverzných matic, determinantov výpočet vlastných čísiel matice, umožňuje zjednodušiť algebraické výrazy, riešiť diferenciálne rovnice, sústavy algebraických rovníc a mnoho iného.

Symbolic Math toolbox je obzvlášť dôležitý analýzu a návrh riadiacich systémov je, pretože umožňuje nasledovné operácie:

- 1) Prenosové funkcie a ďalšie výrazy môžu byť zapísané v symbolickej podobe, tak, ako ich sa zapisujú pomocou textového editora.
- 2) Umožňuje vykonávať matematické operácie nad symbolickými výrazmi a zjednodušovať ich.
- 3) Polynómy, zapísané v symbolickom tvare, možno jednoducho konvertovať na vektory zodpovedajúce koeficientom pri jednotlivých mocninách operátora  $s$ .
- 4) Výrazy možno v okne MATLABu vytlačiť v prehľadnom tvare

Porovnanie vlastností symbolického a numerického riešenia

| Forma                      | Výhody                                                                                                                                                                              | Nevýhody                                                                                                                                                                                                                                             |
|----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Symbolické riešenie</b> | <ul style="list-style-type: none"><li>• Výsledok je v analytickom tvare</li><li>• Riešiteľ má prehľad o postupe (odvodení) riešenia</li></ul>                                       | <ul style="list-style-type: none"><li>• Riešenie nemusí vždy viesť k cieľu</li><li>• Pomerne zložité riešenie</li><li>• Riešenie je náročné na analytické vedomosti riešiteľa</li></ul>                                                              |
| <b>Numerické výpočty</b>   | <ul style="list-style-type: none"><li>• Numerické riešenie vždy existuje</li><li>• Výsledok možno získať s požadovanou presnosťou</li><li>• Možno ho ľahko algoritmizovať</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>• Neexistuje priamy súvis medzi algoritmom a podstatou riešenia</li><li>• Numerické metódy niekedy zlyhávajú</li><li>• Podľa zložitosti algoritmu a požadovanej presnosti riešenie zaberá určitý čas</li></ul> |

Všetky funkcionality v Symbolic Math toolboxe zistíme po zapísaní inštrukcie `help symbolic` v MATLABe.

Symbolic Math toolbox obsahuje inštrukcie pre vykonávanie nasledovných výpočtov v symbolickom tvare:

- 1) derivácie (aj vyšších rádov)
- 2) integrály (určité a neurčité) – aj viacnásobné
- 3) konverziu na číselné premenné pre ďalšie numerické výpočty
- 4) dosadzovanie do výrazov
- 5) kreslenie rovníc a funkcií
- 6) riešenie rovníc: grafická aproximácia, riešenie jednoduchých rovníc
- 7) riešenie sústav rovníc, nelineárne rovnice.
- 8) limity
- 9) Taylorove rady

Pozn. Pri štúdiu je vhodné oboznámiť sa s možnosťami toolboxu zadáním **>> demos** do riadku MATLABu a výberom časti **Symbolic Math Demos** (obsahuje riešené príklady v členení **Introduction, Variable Precision Arithmetic, Calculus, Solving Equations, Symbolic Matrix Computation, Plane Rotations**).

## Symbolické objekty

možno považovať za špeciálny dátový typ MATLABu. Na jednoduchom príklade si ukážeme rozdiel medzi bežným a symbolickým číslom. V našom prípade číslo *a* bude bežné reálne číslo a číslo *b* vytvoríme ako symbolickú premennú, budeme počítat druhú odmocninu z našich premenných a uvidíme rozdiel vo výsledkoch.

```
>> a = 2
>> a =
     2
>> sqrt(a)
ans =
     1.4142

>> b = sym(2)
>> b =
     2
>> sqrt(b)
ans =
     2^(1/2)
```

Takýto postup má niekedy výhody pri počítaní so zlomkami, napr:

```
>> sym(2/5)+sym(1/4)+sym(2/3)
ans =
    79/60
```

## Tvorba symbolických výrazov

V podstate existujú dva rôzne spôsoby ako vytvoriť symbolický výraz. Vytvorme si symbolický výraz **a.x+b**

```
>> a = sym('a')
>> b = sym('b')
>> x = sym('x')
>> f = a*x+b
>> f =
      a*x+b
```

Druhý spôsob:

```
>> syms a b x % jednotlivé položky sú oddelené medzerou
>> f=a*x+b
f =
      a*x+b
```

Oba spôsoby sú rovnocenné, rozdiel je len v spôsobe zápisu. Uprednostňujeme druhý spôsob.

## Substitúcia (dosadzovanie) v symbolických výrazoch - subs

Náhradu symbolických premenných za konkrétne číselné hodnoty vykonáme pomocou funkcie **subs**:

**v = subs(výraz, new)** - nahradí implicitnú symbolickú premennú hodnotou new.

Príklady:

```
>> syms x y % Pozor! Jednotlivé premenné sa neoddeľujú čiarkou
>> g = x*y - 5*x + sqrt(y)
>> subs(g,{x,y},{1,4}) % pre x=1 a y=4
>> vysl = subs(f2,{x,y},{[1 2 3 4],[2 1 5 0]}) % vysl=[2 2 15 0]

>> syms a b c x
>> f = a*x^2 + b*x + c
>> kvadr = subs(f,{a,b,c},{1,-2,1}) % kvadr = x^2-2*x+1
>> g = exp(-a*x)*sin(c*x)
>> int_def_g = int(g,x,-pi,pi)
>> int_sub=subs(int_def_g,{a,c},{2,4})
```

## Prevody symbolických výrazov na číslo

Prevod na číselné hodnoty - funkcia **double**:

```
c1 = sym(1/5+3/4-1/6) % symb. premenná 47/60
c2 = double(c1) % 0.7833 ... skalár typu double
```

Tiež možno prevádzať polynóm na vektor a obrátene - funkcie **sym2poly** a **poly2sym**.

## Vylepšenie vzhľadu výsledku, zjednodušovanie výrazov

Výsledky symbolických výrazov v Command Window často nevyzerajú "matematicky". Pre výpis výsledku "ako na papieri" môžeme použiť funkciu **pretty(symb\_výraz)**.

### Príklad:

```
>> syms x
>> f = x^3-6*x^2+11*x-6 % polynóm v neupravenom výpise
>> pretty(f)
      3      2
x  - 6 x  + 11 x  - 6
```

Funkcia **pretty** nezjednodušuje výraz iba vylepší jeho vzhľad.

Zjednodušovanie vykonávajú nasledujúce funkcie (predpokladáme, že symbolické premenné sú už deklarované: `syms a b c x y`):

**simplify(f)** ... základná funkcia pre zjednodušovanie výrazov (využíva zjednodušovacie pravidlá)

| volanie                          | výsledok                 |
|----------------------------------|--------------------------|
| <b>f =</b>                       | <b>simplify(f)</b> dáva: |
| $\sin(x)^2 + \cos(x)^2$          | 1                        |
| $\exp(c \cdot \log(\sqrt{a+b}))$ | $(a + b)^{(c/2)}$        |
| $(x^2 + 5x + 6) / (x + 2)$       | $x + 3$                  |
| $\sqrt{16}$                      | 4                        |

**expand(f)** ... expanzia: roznásobia sa zátvorky a aplikujú súčtové vzorce

| volanie             | výsledok                                                  |
|---------------------|-----------------------------------------------------------|
| <b>f =</b>          | <b>expand(f)</b> dáva:                                    |
| $(x-2) \cdot (x-4)$ | $x^2 - 6x + 8$                                            |
| $\cos(x+y)$         | $\cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$           |
| $\exp((a+b)^2)$     | $\exp(2 \cdot a \cdot b) \cdot \exp(a^2) \cdot \exp(b^2)$ |

**factor(f)** ... ak  $f$  je polynóm s racionálnymi koeficientmi, vypíše súčin koreňových činiteľov

| volanie     | výsledok                                |
|-------------|-----------------------------------------|
| <b>f =</b>  | <b>factor(f)</b> dáva:                  |
| $a^2 - b^2$ | $(a - b) \cdot (a + b)$                 |
| $a^3 + b^3$ | $(a + b) \cdot (a^2 - a \cdot b + b^2)$ |
| $x^3 - y^3$ | $(x - y) \cdot (x^2 + x \cdot y + y^2)$ |

**simple(f)** ... skúša aplikovať rôzne algebraické pravidlá tak, aby výsledok mal čo najmenej znakov (občas je vhodné použiť inštrukciu dvakrát). Vypisuje všetky pokusy o zjednodušenie.

| volanie                                | výsledok      |
|----------------------------------------|---------------|
| <code>simple(cos(3*acos(x)))</code>    | $4x^3 - 3x$   |
| <code>simple(cos(x) + i*sin(x))</code> | $\exp(xi)$    |
| <code>f = (x + 1)*x*(x - 1);</code>    | $f = x^3 - x$ |

**collect(f)** zlúči výrazy - spočíta výrazy napr. pri rovnakých mocninách

```
>> collect(3*x+4*y-1/3*x^2-x+3/2*y)
ans =
    2*x+11/2*y-1/3*x^2
```

## Kreslenie grafov symbolických funkcií

Symbolický toolbox ponúka niekoľko funkcií pro kreslenie grafov symbolických funkcií: graf symbolickej **funkcie jednej premennej** (zadanej symbolickým výrazom: explicitne, implicitne alebo parametricky) vytvorí funkcia **fplot**:

**fplot(f)** graf funkcie  $f$  pre nezávisle premennú z intervalu  $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ . Pre **implicitne zadanú funkciu**  $f(x,y)=0$  sú  $x$  a  $y$  z intervalu  $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ .

**fplot(f, [a b])** graf funkcie  $f$  pre nezávisle premennú z intervalu  $\langle a; b \rangle$ . V prípade implicitne zadanej funkcie je  $x$  i  $y$  z intervalu  $\langle a; b \rangle$ .

**fplot(x,y)** graf **parametricky zadanej krivky**  
 $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$  pro  $t$  z intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$ ;

**fplot(x,y,[a b])** graf parametricky zadanej krivky  
 $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$  pro  $t$  z intervalu  $\langle a; b \rangle$ .

**Príklady:**

```
>> syms u; fplot(cos(u)) % kosinus
>> syms x y; fplot(x^2-y^4) % implicitne zadaná funkcia
>> syms x; fplot(cos(x),sin(x),[0 2*pi]) % parametricky zadaná kružnica
```

Graf symbolickej **funkcie dvoch premenných** vytvárajú nasledovné funkcie:

**fmesh** "sieťový" 3D graf  
**fmeshc** "sieťový" 3D graf s vrstevnicami  
**gsurf** "ploškový" 3D graf  
**fsurf** "ploškový" 3D graf s vrstevnicami  
**fplot3** 3D graf parametricky zadané krivky (1 parameter)  
**fcontour** 2D graf vrstevníc  
**fcontourf** vyplnený 2D graf vrstevníc  
**fpolar** graf v polárnych súradniciach. Podrobnosti sa nachádzajú v nápovede.

## Výpočet derivácie

**Výpočet prvej derivácie**\_vzhľadom na špecifikovanú premennú.

Napr. deriváciu funkcie  $dfx = \frac{df}{dx}$ , kde  $f = e^{-ax}x^{3b}\sin(cx)$ , kde  $a, b$  a  $c$  sú nešpecifikované konštanty, nájdeme nasledovne (deriváciu funkcie  $f$  označíme premennou  $dfx$ ):

```
>> f=exp(-a*x)*x^(3*b)*sin(c*x)
>> dfx = diff(f,x)
```

Výsledok mám dáva pomerne zložitý výraz. Zjednodušíme ho pomocou inštrukcie **simple**:

```
>> dfx1 = simple(dfx)
```

MATLAB používa niekoľko algoritmov pre zjednodušenie algebraických výrazov a z nich vyberie najkratší. Môže sa však stať, že nenájde žiadny jednoduchší výraz.

## Výpočet derivácií vyšších rádov

Napríklad, výpočet druhej derivácie funkcie  $dfx2 = \frac{d^2x}{dt^2}$  zapíšeme:

```
df2=diff(f,x,2)
```

pričom využijeme vopred definovanú funkciu  $f$ .

**Príklad:** Vypočítajte prvú a druhú deriváciu funkcie  $\sin(2x)$ ,

```
>> syms x
>> f = sin(2*x);
>> diff(f)
ans =
      2*cos(2*x)
>> diff(f,2) % funkcia f má iba jeden parameter: x
ans =
     -4*sin(2*x)
```

**Príklad:**

```
>> syms x a b
>> f=a*x^3+b*x^2;
>> diff(f,x) % derivovanie podľa x
>> diff(f,a)
```

## Výpočet integrálu

Výpočet integrálu si môžeme ukázať na podobnom príklade aký sme použili pri výpočte derivácie.

**Príklad:** Vypočítajte neurčitý integrál funkcie  $\sin(2x)$

```
>> syms x
>> f=cos(2*x);
>> int(f)

ans =

1/2*sin(2*x)
```

Výpočet neurčitého integrálu  $\text{int}_g = \int g(x) dx$ , kde  $g = e - a^x \sin(cx)$ , zapíšeme:

```
>> syms a c x;
>> g = exp(-a*x)*sin(c*x),
>> int_g = int(g,x)
```

Pre kontrolu môžeme výsledok derivovať:

```
>> dfx = diff(int_g,x)
```

čím by sme mali dostať pôvodnú funkciu. Výsledok však na prvý pohľad nemusí vyzeráť rovnako, pretože MATLAB nenájde vždy najjednoduchší tvar.

V tomto prípade použijeme zjednodušenie výrazu:

```
>> dfx1 = simple(diff_int)
```

Samozrejme že je možné vypočítať aj priamo určitý integrál

**Príklad 4:** vypočítajte určitý integrál funkcie  $\sin(2x)$  na intervale  $<0; 3,14>$

```
>> syms x
>> f=cos(2*x);
>> int(f,0,pi)
```

Príklad použitia:

```
>> syms x
>> f1=sin(x)^2
>> int(f1)

>> syms x
>> f2=x^2-log(x);
>> int(f2,0,2)
```

## Výpočet symbolickej limity funkcie

Symbolický toolbox obsahuje inštrukciu pre nájdenie limity výrazu.

Napr. pre limitu  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x}$  bude:

```
>> syms x a;  
>> value = limit(sin(a*x)/x,x,0)
```

Existujú prípady, kde hodnota limity závisí od smeru, z ktorého sa priblížime ku danému bodu. Typickým prípadom je funkcie  $\tan(x)$ , ktorú môžeme zakresliť v závislosti od premennej  $x$  pomocou inštrukcie:

```
>> fplot('tan(x)')
```

Predpokladajme, že chceme zistiť hodnotu  $\tan(x)$  v bode  $x = \pi/2$ .

Použijeme inštrukciu:

```
>> tan(pi/2)
```

Je získaný výsledok správny? Pripomeňme si, že hodnota  $\tan(\pi/2)$  môže byť buď  $+\infty$  alebo  $-\infty$  v závislosti od toho, či sa k bodu  $x = \pi/2$  približujeme zľava alebo sprava. Pre správne riešenie úlohy použijeme symbolický počet:

```
>> syms x,  
>> tan_sprava = limit(tan(x),x,pi/2,'right')  
>> tan_zlava = limit(tan(x),x,pi/2,'left')
```

Niektoré výsledky pri zadávaní limit:

```
syms x a t h;  
limit(sin(x)/x)                výsledok = 1  
limit((x-2)/(x^2-4),2)         výsledok = 1/4  
limit((1+2*t/x)^(3*x),x,inf)   výsledok = exp(6*t)  
limit(1/x,x,0,'right')         výsledok = inf  
limit(1/x,x,0,'left')          výsledok = -inf  
limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0) výsledok = cos(x)  
v = [(1 + a/x)^x, exp(-x)]; limit(v,x,inf,'left') dá = [exp(a), 0]
```

## Taylorov rad

Taylorov rad predstavuje polynomiálnu aproximáciu funkcie v blízkom okolí zvoleného bodu nezávisle premennej (pracovného bodu). Pre vytvorenie tohto polynómu sú potrebné derivácie vyššieho rádu.

Syntax inštrukcie: **taylor(expression, order, variable, point)**

**Príklad:** Rozvoj funkcie  $e^x$  v bode pre  $x = 0$  do radu s piatimi členmi rozvoja:

```
>> syms x  
>> Tay_exp = taylor(exp(x),5,x,0)  
Tay_exp =  
1+x+1/2*x^2+1/6*x^3+1/24*x^4
```

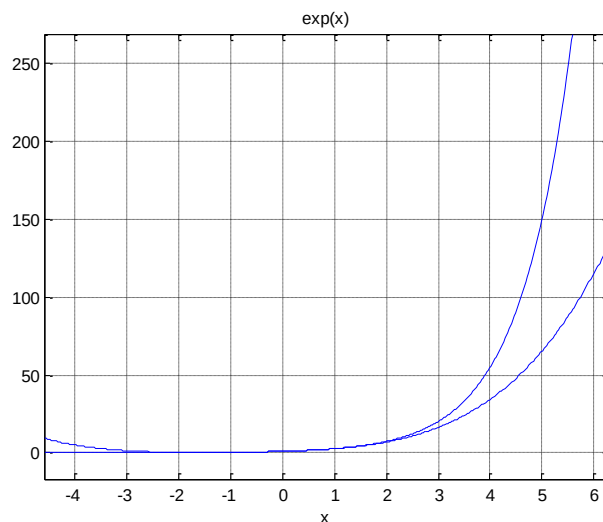


Výsledok je presný v bode pre  $x = 0$  a so zväčšujúcou sa vzdialenosťou od tohto bodu sa zvyšuje nepresnosť. Napr v bode  $x = 2$  bude chyba nasledovná (v porovnaní s presnou hodnotou):

```
>> approx=subs(Tay_exp,x,2) , >> exact=exp(2) ,
    frac_err=abs(1-approx/exact)
approx =
    7
exact =
    7.3891
frac_err =
    0.0527
```

Presnosť aproximácie sa zvyšuje s počtom členov radu, čo ilustruje príklad:

```
>> fplot(Tay_exp,x) , hold on, fplot(exp(x)) , hold off, grid
```



Funkcia  $e^x$  (horný priebeh) a jej aproximácia v bode  $x = 0$  s piatimi členmi rozvoja

## Riešenie prenosových funkcií

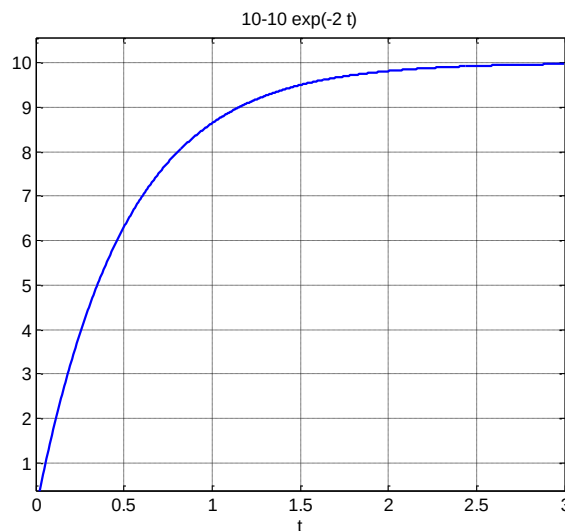
Najprv ukážme použitie symbolického počtu pri výpočte inverznej Laplaceovej transformácie prenosovej funkcie v tvare  $F(s) = \frac{b}{(s+a)^2+b}$  :

```
>> syms s a b
>> F = b/((s+a)^2+b^2)
F =
      b/((s+a)^2+b^2)
>> pretty(F)                % inštrukcia pre úpravu výsledku
      b
-----
      2 2
(s + a) + b
>> ilaplace (F)             % inverzná Laplaceova transformácia F(s)
ans =
exp(-a*t)*sin(b*t) % výsledok
```

**Príklad 1:** Pomocou nástrojov symbolického toolboxu nájdite časovú dodozvu funkcie  $G(s) = \frac{K}{Ts+1}$  pri budení sústavy pomocou jednotkového skoku s amplitúdou A. Hodnoty pre zobrazenie riešenia:  $K = 2$ ,  $T = 0,5s$ ,  $A = 5$ .

**Postup:** Premenné a parametre  $s$ ,  $T$  a  $K$  budeme deklarovať ako symbolické premenné a nájdeme inverznú Laplaceovu transformáciu funkcie  $G(s) = \frac{A}{s} \frac{K}{Ts+1}$ .

```
>> syms s K T A
>> g=A*K/s/(T*s+1)
>> g=ilaplace(g)
>> g=subs (g,{A,K,T},{5,2,0.5})
>> fplot(g,[0,3]),grid
```



Časová odozva sústavy I. rádu  $G(s) = \frac{A}{s} \frac{K}{Ts+1}$  pre  $K = 2$ ,  $T = 0,5s$ ,  $A = 5$ .

**Príklad 2:** Nájdite LT časovej funkcie  $f(t) = 1 + \frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{4}{3}e^{-t}$ .

Na výpočet Laplaceovej transformácie použijeme inštrukciu **laplace(f)**.

```
>> laplace (1+exp(-4*t)/3+4*exp(-t))
ans =
    1/s+1/3/(s+4)+4/(1+s)
```

čo po prepísaní dáva prenosovú funkciu v tvare:  $\frac{1}{s} + \frac{1}{3(s+4)} + \frac{4}{1+s}$ .

Inštrukcia **simple(F)** nájde najjednoduchší tvar prenosovej funkcie  $F(s)$  s najmenším počtom výrazov. Inštrukciu **simplify(F)** možno použiť na výpočet kombinácie parciálnych zlomkov. V Symbolic Math toolboxe sa nachádzajú ešte ďalšie inštrukcie, ktoré môžu upraviť výsledok tak, aby dal prehľadnejší matematický výraz. Niekoré z týchto možností sú:

- **collect(F)** – zhromažďí výrazy s rovnakými koeficientmi funkcie  $F(s)$
- **expand(F)** – rozšíri násobenie činiteľov  $F(s)$
- **vpa(F,places)** – nahradzuje symbolický výraz numerickou hodnotou s požadovanou presnosťou (táto inštrukcia konvertuje zlomkové symbolické výrazy na desatinné čísla so špecifikovaným počtom miest v premennej **places**).

**Príklad 3:** Nájdite zjednodušenie prenosovej funkcie zadanej v tvare:

$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{3} \frac{1}{s+4} - \frac{4}{3} \frac{1}{s+1}$  pomocou inštrukcie **simplify**:

```
>> syms s;
>> F = (1/s) + (1/3)*(1/(s+4)) - (4/3)*(1/(s+1))
F =
    1/s+1/3/(s+4)-4/3/(s+1)
>> pretty(F)

      1      1      1
1/s + 1/3 ---- - 4/3 ----
      s + 4      s + 1
>> pretty(simplify(F))

      4
-----
s (s + 4) (s + 1)
```

Symbolické zlomky  $1/3$  and  $4/3$  v uvedenom príklade sa pretransformujú na numerické hodnoty  $0.333$  a  $1.33$  pričom tri významové číslice dosiahneme dosadením hodnoty  $3$  za argument **places** v inštrukcii **vpa(G, places)**.

```
>> pretty(vpa(G,3))
```

$$\frac{1}{s} + \frac{0.333}{s+4} - \frac{1.33}{s+1}$$

**Príklad 4:** Uvažujme časovú funkciu  $f(t) = 1 + \frac{b}{a-b}e^{-at} - \frac{a}{a-b}e^{-bt}$ . Pomocou symbolického počtu v MATLABe nájdime odpovedajúcu prenosovú funkciu (zodpovedá operátorovej funkcii  $F(s) = \frac{ab}{s(s+a)(s+b)}$ ).

Aj v symbolickom počte možno používať matematické operátory  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $/$ .

Napríklad **spätnoväzobné zapojenie prenosov**  $G(s) = \frac{K}{s(s+5)}$  so zosilnením  $K = 2.5$  v priamej vetve a prenosu  $H(s) = \frac{2.5}{0.1s+1}$  v spätnej väzbe dáva prenos  $F(s) = \frac{K G(s)}{1+G(s)H(s)}$ .

Tento prenos vypočítame pomocou symbolického počtu v MATLABe nasledovne.

```
>> syms s K; G = 2.5/(s*(s+5)); H = 1/(0.1*s+1); M = K*G/(1+G*H)
M =
5/2*K/s/(s+5)/(1+5/2/s/(s+5)/(1/10*s+1))
>> pretty(M)
              K
5/2  -----
              /
          s (s + 5) | 1 + 5/2 ----- |
                    \          s (s + 5) (1/10 s + 1) /

>> pretty(simplify(M))
              (s + 10) K
5/2  -----
      3      2
s + 15 s + 50 s + 25
```

Pomocou toolboxu Symbolic Math možno symbolické prenosové funkcie ľahko transformovať na časovo-invariantné prenosové funkcie (LTI - Linear Time-Invariant). Táto konverzia prebieha v dvoch krokoch:

- 1) v prvom kroku sa použije inštrukcia **numden** na oddelenie symbolického čitateľa a menovateľa prenosovej funkcie  $G(s)$
- 2) v druhom kroku sa pomocou inštrukcie **sym2poly** konvertuje zvlášť čitateľ a zvlášť menovateľ na odpovedajúce vektory. V poslednom kroku sa vytvorí LTI prenosová funkcia pomocou vektorového zobrazenia čitateľa a menovateľa prenosovej funkcie

**Príklad 5:** Vytvorme prenosovú funkciu  $M(s)$  vo vyššie uvedenom príklade pre  $K = 1$ :

```
>> K = 1; G = 2.5/(s*(s+5)); M = K*G/(1+G*H);
>> [nums, dens] = numden(M) % polynóm čit. a men. v symb. tvare
nums =
    5*s*(s+5)*(s+10)
dens =
    2*s*(s+5)*(s^3+15*s^2+50*s+25)
>> num = sym2poly(nums) % symb. polynóm čitateľa na vektor
num =
     5     75    250     0
>> den = sym2poly(dens) % symbol. polynóm menovateľa na vektor
den =
     2     40    250    550    250     0

Transfer function:
          5 s^3 + 75 s^2 + 250 s
-----
2 s^5 + 40 s^4 + 250 s^3 + 550 s^2 + 250 s
```

Komplementárna inštrukcia **poly2sym** mení vektor koeficientov polynómu na vektor koeficientov symbolického polynómu (pozri **help** pre inštrukciu **poly2sym**).

**Príklad 6:** Vypočítajte prenos dvoch sústav prvého rádu (parametre:  $K_1, T_1, K_2, T_2$ ) zapojených v sérii s celkovou proporcionálnou spätnou väzbou  $K_3$ . Pre zvolené parametre nakreslite časovú odozvu. Výpis zostaveného m-súboru je nasledovný:

```
% Príklad 6: dve sústavy I. rádu v sérii
clc, clear
syms K1 K2 K3 T1 T2 s
Fo=K1/(1+s*T1)*K2/(1+s*T2);
disp('Prenos otvoreného obvodu:'), pretty (Fo)
F=Fo/(1+K3*Fo);
disp('Prenos uzavretého obvodu:'), pretty(F)
Fo=subs (Fo, {K1,K2,T1,T2}, {1,2,.1,.2});
disp('Otvorený obvod pre: K1=1, K2=2, T1=.1, T2=.2:'), pretty(Fo)
fto=ilaplace(Fo/s); % Pre výpočet prechodovej charakteristiky
disp('Prechodová charakteristika otvoreného obvodu:'), pretty (fto)
F=subs (F, {K1,K2,T1,T2,K3}, {1,2,.01,.1,.2})
disp('Uzavretý obvod pre: K1=1, K2=2, K3=.01, T1=.1, T2=.2:'),
pretty(F)
ft=ilaplace(F/s);
disp('Prechodová charakteristika uzavretého obvodu:'), pretty (ft)
figure (1), fplot(fto,[0, 2]),grid,
figure (2), fplot(ft,[0, 0.45]),grid
```

Výpis výsledkov je nasledovný:

Prenos otvoreného obvodu:

$$\frac{K_1 K_2}{(s T_1 + 1) (s T_2 + 1)}$$

Prenos uzavretého obvodu:

$$\frac{K_1 K_2}{(s T_1 + 1) (s T_2 + 1) \left| 1 + \frac{K_3 K_1 K_2}{(s T_1 + 1) (s T_2 + 1)} \right|}$$

Otvorený obvod pre:  $K_1=1$ ,  $K_2=2$ ,  $T_1=.1$ ,  $T_2=.2$ :

$$\frac{2}{(1 + 1/10 s) (1 + 1/5 s)}$$

Prechodová charakteristika otvoreného obvodu:

$$2 - 4 \exp(-5 t) + 2 \exp(-10 t)$$

F =

$$2/(1+1/100*s)/(1+1/10*s)/(1+2/5/(1+1/100*s)/(1+1/10*s))$$

Uzavretý obvod pre:  $K_1=1$ ,  $K_2=2$ ,  $K_3=0,01$ ,  $T_1=.1$ ,  $T_2=0,2$

$$\frac{2}{(1 + 1/100 s) (1 + 1/10 s) \left| 1 + \frac{2/5}{(1 + 1/100 s) (1 + 1/10 s)} \right|}$$

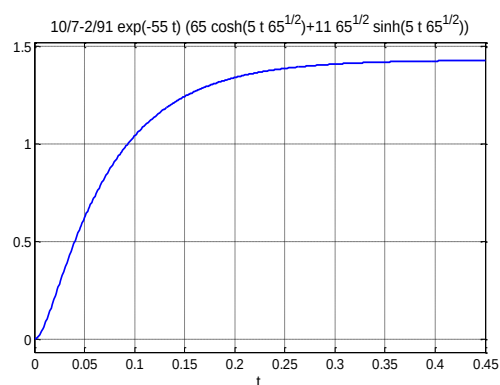
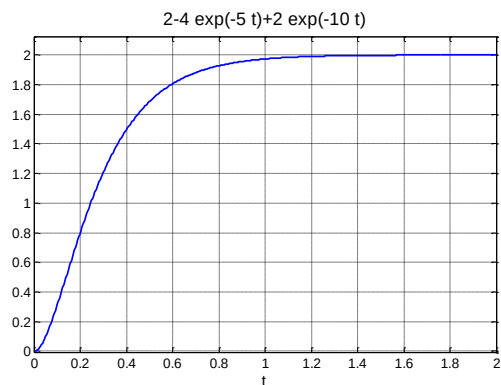
Prechodová charakteristika uzavretého obvodu:

$$10/7 - 2/91 \exp(-55 t) (65 \cosh(5 t \sqrt{65}) + 11 \sqrt{65} \sinh(5 t \sqrt{65}))$$

čo zodpovedá časovej funkcii:

$$h(t) = 10/7 - 2/91 e^{-55t} (65 \cosh(5 \sqrt{65} t) + 11 \sqrt{65} \sinh(5 \sqrt{65} t))$$

Výsledné prechodové charakteristiky pre zvolené parametre:



**Príklad 7:** Podobne, ako v predchádzajúcom prípade sú dve sústavy I. rádu v sérii s proporcionálnou spätnou väzbou z výstupu na vstup. Zostavíme stavový model a prenos vypočítame pomocou známeho vzťahu  $F(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$ .

Výpis programu je nasledovný:

```
% Príklad 7: dve sústavy I. rádu v sérii, získanie TF z SS
clc, clear
syms K1 K2 K3 T1 T2 s
I=[1 0; 0 1];
A=[-1/T1 -K1*K3/T1; K2/T2 -1/T2]
b=[K1/T1; 0]
cT=[0 1]
Inv=inv(s*I-A);
F=cT*Inv;
F=F*b;
disp('Prenosová funkcia:'), pretty (F)
F=subs(F,{K1,K2,T1,T2,K3},{1,2,.01,.1,.2});
disp('Prenosová funkcia pre parametre: K1=1, K2=2, K3=.01, T1=.1,
T2=.2:'), pretty (F)
ft=ilaplace(F/s);
disp('Prechodová charakteristika uzavretého obvodu:'), pretty (ft)
fplot(ft,[0, 0.4]),grid
```

Výpis výsledkov je nasledovný:

```
A =
[ -1/T1, -K1*K3/T1]
[ K2/T2, -1/T2]
```

```
b =
K1/T1
0
```

```
cT =
0 1
```

Prenosová funkcia:

$$\frac{K_2 K_1}{1 + s T_2 + s T_1 + s T_1 T_2 + K_1 K_3 K_2}$$

Prenosová funkcia pre parametre: K1=1, K2=2, K3=.01, T1=.1, T2=.2:

$$\frac{2}{7/5 + \frac{11}{5} s + \frac{1}{1000} s^2}$$

Prechodová charakteristika uzavretého obvodu:

$$10/7 - 2/91 \exp(-55 t) (65 \cosh(5 t 65^{1/2}) + 11 65^{1/2} \sinh(5 t 65^{1/2}))$$

čo zodpovedá tej istej časovej funkcii, ako v predchádzajúcom prípade a dostávame aj rovnaký grafický výstup.

V uvedených príkladoch treba vhodne zvoliť časovú mierku riešenia a zobrazenia v inštrukcii **fplot**. Volíme ju tak, aby sme veľmi nepredlžovali ustálený stav; ináč dostávame nesprávne výsledky.

## Riešenie diferenciálnych rovníc symbolickým počtom

Symbolickým počtom možno riešiť tiež diferenciálne rovnice [64]. Syntax je:

**dsolve (rovnica, podmienka)**

kde pod podmienkou máme na mysli hraničnú alebo počiatočnú podmienku. Derivácia sa zapisuje písmenom D, za ktorým nasleduje číslo označujúce poradie derivácie. Napr. **Dy** reprezentuje **dy/dx**, **D2y** predstavuje  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , atď.

**Príklad 1:** Štandardný prenos kmitavej sústavy II. rádu je:

$$F(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_o^2} s^2 + \frac{2d}{\omega_o} s + 1} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Tomu zodpovedá diferenciálna rovnica v tvare

$$\frac{1}{\omega_o^2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2d}{\omega_o} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

Vyriešme túto diferenciálnu rovnicu s nulovými počiatočnými podmienkami (pri nich je definovaný prenos) a zobrazme riešenie pre parametre  $d = 0,5$  a  $\omega_o = 10$  rad/s na skokový vstupný signál.

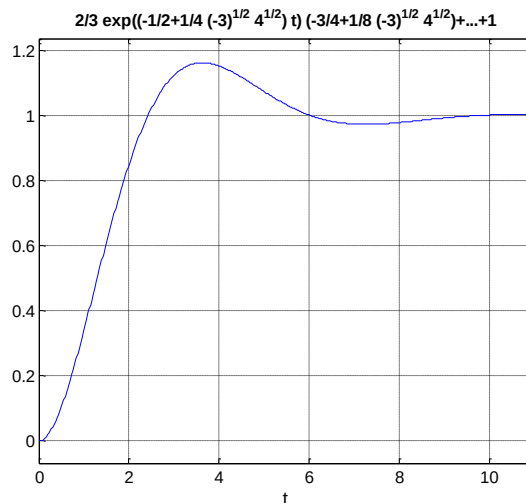
**Riešenie:**  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2d\omega_o \frac{dy(t)}{dt} + \omega_o^2 y(t) = u(t)$

```
>> syms d w0
>> z=dsolve('D2y+2*d*w0*Dy+w0^2*y=1', 'y(0)=0', 'Dy(0)=0')
z =
-1/2*exp(-(d-(d^2-1)^(1/2))*w0*t)*(d^2-1+d*(d^2-1)^(1/2))/(d^2-1)/w0^2-1/2*exp(-(d+(d^2-1)^(1/2))*w0*t)*(d^2-d*(d^2-1)^(1/2)-1)/(d^2-1)/w0^2+1/w0^2
```



```
>> x=subs(z,{d,w0},{0.5,1})
x =
2/3*exp((-1/2+1/4*(-3)^(1/2)*4^(1/2))*t)*(-3/4+1/8*(-
3)^(1/2)*4^(1/2))+2/3*exp((-1/2-1/4*(-3)^(1/2)*4^(1/2))*t)*(-
3/4-1/8*(-3)^(1/2)*4^(1/2))+1
>> fplot(x,[0,11])
>> grid
```

Priebeh prechodovej charakteristiky pre  $d = 0.5, \omega = 1$  rad/s:



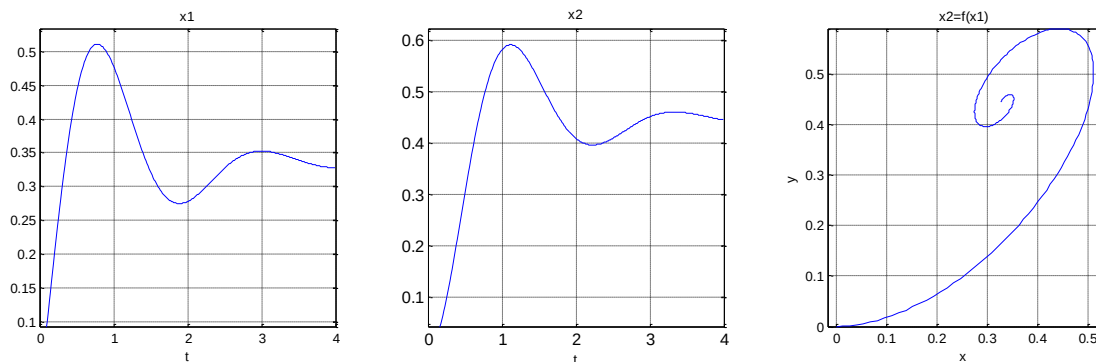
**Príklad 2:** Symbolické riešenie lineárneho stavového modelu s dvoma stavovými veličinami a nulovými počiatočnými podmienkami:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Najprv vypočítame vlastné hodnoty systému, aby sme zistili, či systém je stabilný. Po riešení dvoch diferenciálnych rovníc prvého rádu zobrazíme závislosti  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_2(t) = f[x_1(t)]$ :

```
>> eig([1 -3; 4 -3])
ans =
-1.0000 + 2.8284i
-1.0000 - 2.8284i
>> [x1,x2]=dsolve('Dx1=1*x1-3*x2+1','Dx2=4*x1-
3*x2','x1(0)=0,x2(0)=0')
x1 =
1/3+exp(-t)*(1/6*sin(2*2^(1/2)*t)*2^(1/2)-
1/3*cos(2*2^(1/2)*t))
x2 =
4/9+2/3*exp(-t)*(-1/6*sin(2*2^(1/2)*t)*2^(1/2)-
2/3*cos(2*2^(1/2)*t))
>> subplot(131), fplot(x1,[0,5]), grid, title('x1')
>> subplot(132), fplot(x2,[0,5]), grid, title('x2')
>> subplot(133), fplot(x1,x2,[0,4]), grid, title('x2=f(x1)')
```

Vlastné hodnoty systému sú komplexne združené so zápornou reálnou časťou, teda systém je stabilný. Pribeh stavových veličín je zobrazený v grafoch:



Pribeh stavových veličín stavového modelu systému

## Riešenie algebraických rovníc

Symbolic Math toolbox v MATLABe umožňuje riešiť mnoho druhov rovníc, vrátane nelineárnych rovníc a riešenia sústavy rovníc. Používame pritom inštrukciu **solve**.

### Postup:

- 1) Definujeme premenné v rovnice ako symbolické pomocou inštrukcie **syms**.
- 2) Zapišeme rovnice.
- 3) Riešime rovnice pomocou inštrukcie **solve**.
- 4) Ak existuje viac riešení, rozhodneme, ktoré je fyzikálne zdôvodniteľné a zvolíme ho.
- 5) Urobíme skúšku správnosti dosadením do pôvodnej rovnice/rovníc.

Rovnica sa zadáva do jednoduchých úvodzoviek – napr. **'a\*x^2+b\*x+c = 0'**. Existujú dva spôsoby, ako možno symbolicky zapísať riešenie rovnice.

### Príklad 1:

Riešenia kvadratickej rovnice v tvare  $ax^2 + bx + c = 0$  nájdeme nasledovne:

- 1) `>> syms x a b c;`
- 2) `>> f = 'a*x^2+b*x+c = 0',`  
`f =`  
`a*x^2+b*x+c = 0`
- 3) `>> [x]=solve(f,x)`  
`x =`  
`-1/2*(b-(b^2-4*a*c)^(1/2))/a`  
`-1/2*(b+(b^2-4*a*c)^(1/2))/a`

Dostali sme dve riešenia. Ak chceme použiť iba prvé, potom ho vyberieme nasledovne:

`x1 = x(1)`

4) Ak nie je špecifikovaná pravá strana rovnice, implicitne sa predpokladá, že je rovná nule:

```
>> syms x a b c
>> f = a*x^2 + b*x + c;
>> [x]=solve(f,x)
```

Dostávame ten istý výsledok, ako v predchádzajúcom prípade.

Podobne vyriešime kvadratickú rovnicu s dvoma premennými vzhľadom na premenné  $x$  a  $y$ :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

```
>> syms a b r x y
>> solve('(x-a)^2+(y-b)^2=r^2','x')

ans =
a+(2*y*b-b^2-y^2+r^2)^(1/2)
a-(2*y*b-b^2-y^2+r^2)^(1/2)
```

### Príklad 2:

Riešenie rovnice  $e^{2x} = 3y$  vzhľadom na  $x$  nájdeme nasledovne:

```
>> syms x y;
>> eq = 'exp(2*x) = 3*y',
>> [x] = solve(eq, x)
```

Riešenie sústavy rovníc nájdeme podobným spôsobom.

**Príklad 3:** Nájdite riešenie nasledovnej sústavy troch lineárnych rovníc o troch neznámych:

$$2x - 3y + 4z = 5$$

$$y + 4z + x = 10$$

$$-2z + 3x + 4y = 0$$

```
>> syms x y z;
>> eq1 = '2*x-3*y+4*z = 5'
>> eq2 = 'y+4*z+x = 10'
>> eq3 = '-2*z+3*x+4*y = 0'
>> [x,y,z] = solve(eq1,eq2,eq3,x,y,z)
```

### Poznámka:

pri zadávaní premenných nie je potrebné ich zadávať v abecednom poradí. Na druhej strane, **premenné vo výsledku sa nachádzajú v abecednom poradí** bez ohľadu na to, v akom poradí boli deklarované, resp. zadávané do rovníc, takže je potrebné dávať pozor na poradie premenných v poslednej z vyššie uvedených inštrukcií. Napríklad, pri zadaní poradia **[z,x,y]** miesto **[x,y,z]** môže dôjsť ku zámene premenných. Výsledok dostávame v symbolickom tvare a pre získanie číselnej hodnoty je potrebné vykonať nasledovný výpočet:

```
>> x_d = double(x), y_d = double(y), z_d = double(z)
```

### Príklad 4:

Je možné riešiť tiež sústavu dvoch nelineárnych algebraických rovníc, napr.

$$y = 2e^x \text{ a } y = 3 - x^2:$$

```
>> syms x y;
>> eq1='y=2*exp(x)', eq2='y=3-x^2';
>> [x,y]=solve(eq1,eq2,x,y)
```

Všimnime si, že dostávame iba jedno riešenie, hoci existujú dve, ako to uvidíme nižšie. Opäť platí, že pre prevod symbolických premenných  $x$  a  $y$  na numerické použijeme príkaz **double**.

Približné riešenie môžeme získať nakreslením grafov rovníc a zistiť ich križovanie. Najprv všetko presunieme na ľavú stranu rovníc, pretože **fplot** kreslí výrazy a nie rovnice.

```
>> exp1 = 'y - 2*exp(x)';
>> exp2 = 'y-3+x^2';
>> fplot(exp1), hold on; fplot(exp2); hold off
```

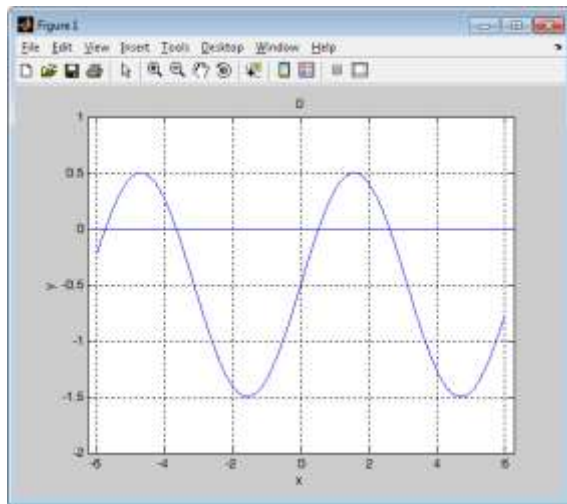
Orientačné hodnoty riešenia (priesečníky grafov) možno získať v okne obrázku kliknutím na **Nástroje/Zoom In**. Kliknutím na priesečník zväčšíme danú oblasť grafu. Po kliknutí na **Nástroje/Data Cursor**, a kliknutí na priesečníky grafov dostaneme približné hodnoty  $x$  a  $y$ . Porovnajme tieto výsledky s tými, ktoré boli vyriešené pomocou vyššie uvedeného príkazu **solve**.

### Príklad 5:

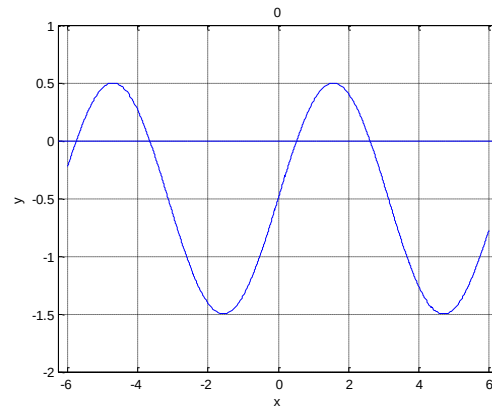
Existujú tiež rovnice s nekonečným počtom riešení. Príkladom je rovnica  $\sin(x) = 1/2$ . Preto je vhodné nakresliť si danú funkciu a skusmo pozrieť, pri akých hodnotách premennej  $x$  je jej hodnota nulová:

```
>> exp1='y - sin(x) + 1/2',
>> exp0='0'
>> fplot(exp1,[-6,6,-2,1]), hold on; fplot(exp0); hold off
```

Inštrukcia **hold on** umožní vykresliť oba grafy do jedného obrázku. Príkaz **fplot(exp0)** vynesie vodorovnú čiaru v grafe pre  $y=0$ . Priesečníky sínusoidy s touto líniou predstavujú riešenie prvej rovnice. Graf je zobrazený na obrázku:



a)



b)

Graf priebehu pre riešenie rovnice  $\sin x = 1/2$ :  
a) celé okno grafu aj s menu, b) samotný graf

Symbolic Math toolbox pri zadaní solve nájde iba dve riešenia medzi 0 a  $\pi$ :

```
>> syms x;
>> eq='sin(x)-1/2=0';
>> [x]=solve(eq,x);
>> x_doub=double(x)
```

Ďalšie numerické metódy sú uvedené v materiáli:

[Tutorial on numerical solution of equations using MATLAB](#)

## Kalkulátor symbolických funkcií

**funtool** je interaktívny grafický kalkulátor ktorý pracuje s funkciami jednoduchých premenných. Súčasne je možné zobraziť dve funkcie:  $f(x)$  a  $g(x)$ . Výsledok väčšiny operácií nahrádza obsah funkcie  $f(x)$ .

Okná, označené ako '**f** =' a '**g** =' , sú editovateľné okná, ktoré možno meniť v ľubovoľnom okamihu zapísaním novej funkcie. V okne '**x** =' sa špecifikuje rozsah nezávisle premennej. V okne označenom ako '**a** =' sa zadáva číselná hodnota parametra.

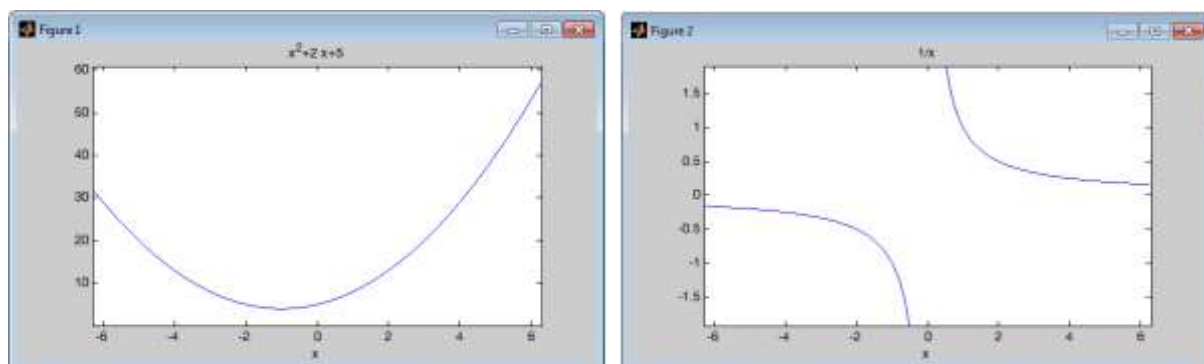
The interface shows the following inputs:

- f =**  $x^2+2x+5$
- g =**  $1/x$
- x =**  $[-2\pi, 2\pi]$
- a =**  $1/2$

The operation buttons are arranged in four rows:

- Row 1: **df/dx**, **int f**, **simple f**, **num f**, **den f**, **1/f**, **finv**
- Row 2: **f+a**, **f-a**, **f\*a**, **f/a**, **f^a**, **f(x+a)**, **f(x^a)**
- Row 3: **f + g**, **f - g**, **f \* g**, **f / g**, **f(g)**, **g = f**, **swap**
- Row 4: **Insert**, **Cycle**, **Delete**, **Reset**, **Help**, **Demo**, **Close**

Okná kalkulátora symbolických funkcií



**V prvom riadku** sa nachádzajú tlačidlá pre unárne operátory, ktoré obsahujú funkciu premennej  $x$ :

- **df/dx** - symbolická derivovanie **f(x)**
- **int f** - symbolické integrovanie **f(x)**
- **simple f** - zjednodušuje symbolický výraz (ak je to možné)
- **num f** - vyberá čitateľ racionálnej zlomkovej funkcie v symb. tvare
- **den f** - vyberá menovateľ racionálnej zlomkovej funkcie v symb. tvare

- **1/f** - nahradí **f(x)** prevrátenou hodnotou **1/f(x)**.
- **finv** - nahradí **f(x)** inverznou funkciou

Výpočet operátorov **int(f)** a **finv** môže zlyhať, ak neexistuje ich riešenie v uzavretej forme.

**Druhý riadok tlačidiel** parametrom 'a' mení mierku funkcie  $f(x)$ . Sú tu nasledovné operácie:

- **f + a** - nahradí **f(x)** funkciou **f(x) + a**
- **f - a** - nahradí **f(x)** funkciou **f(x) - a**
- **f \* a** - nahradí **f(x)** funkciou **f(x) \* a**
- **f / a** - nahradí **f(x)** funkciou **f(x) / a**
- **f ^ a** - nahradí **f(x)** funkciou **f(x) ^ a**
- **f(x+a)** - nahradí **f(x)** funkciou **f(x + a)**
- **f(x\*a)** - nahradí **f(x)** funkciou **f(x \* a)**

**V treťom riadku** sa nachádzajú operátory dvoch funkcií  $f(x)$  a  $g(x)$ . Sú tu nasledovné operácie:

- **f + g** - nahradí **f(x)** funkciou **f(x) + g(x)**
- **f - g** - nahradí **f(x)** funkciou **f(x) - g(x)**
- **f \* g** - nahradí **f(x)** funkciou **f(x) \* g(x)**
- **f / g** - nahradí **f(x)** funkciou **f(x) / g(x)**
- **f(g)** - nahradí **f(x)** funkciou **f(g(x))**
- **g = f** - nahradí **g(x)** funkciou **f(x)**
- **swap** - zamení **f(x)** and **g(x)**

**Prvé tri tlačidlá v štvrtom riadku** riadia zoznam funkcií.

- Tlačidlo **Insert** umiestni danú funkciu do zoznamu.
- Tlačidlo **Cycle** rotuje zoznam funkcií.
- Tlačidlo **Delete** odstraňuje aktívny funkciu zo zoznamu. Zoznam funkcií sa nazýva **fxlist**. Defaultý zoznam **fxlist** obsahuje niekoľko bežných funkcií.
- Tlačidlo **Reset** nastavuje **f**, **g**, **x**, **a** a **fxlist** na ich počiatočné hodnoty.
- Tlačidlo **Help** tlačí text pomocníka.
- Tlačidlo **Demo**.
- Tlačidlo **Close** uzatvára všetky tri okná.