



**Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť/
Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ**

MODELOVANIE ELEKTROMECHANICKÝCH SÚSTAV

Fakulta elektrotechniky a informatiky

Viliam Fedák



Agentúra
Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu SR
pre štrukturálne fondy EÚ



Táto publikácia vznikla za finančnej podpory z **Európskeho sociálneho fondu** v rámci Operačného programu **VZDELÁVANIE**.

Prioritná os 1 Reforma vzdelávania a odbornej prípravy

Opatrenie 1.2 Vysoké školy a výskum a vývoj ako motory rozvoja vedomostnej spoločnosti.

Názov projektu: **Balík doplnkov pre ďalšiu reformu vzdelávania na TUKE**

ITMS 2611020093

NÁZOV: Modelovanie elektromechanických sústav

AUTOR: doc. Ing. Viliam Fedák, CSc.

VYDAVATEL: Technická univerzita v Košiciach

ROK: 2015

VYDANIE: prvé

NÁKLAD: 70 ks

ROZSAH: 243 strán

ISBN: 978-80-553-2111-0

Rukopis neprešiel jazykovou úpravou.

Za odbornú a obsahovú stránku zodpovedá autor.

Obsah

Časť 1 - Modelovanie a modely elektromechanických sústav

1	ÚVOD DO MODELOVANIA ELEKTROMECHANICKÝCH SÚSTAV	3
1.1	Elektromechanický systém a postup pri zostavení jeho modelu	3
1.2	Príklad modelovania zložitého elektromechanického systému	4
2	PRENOSOVÉ FUNKCIE ELEKTRICKÝCH A MECHANICKÝCH OBVODOV....	8
2.1	Prenosová pasívneho elektrického obvodu.....	8
2.2	Prenosová funkcia zaväzbeného operačného zosilňovača	11
2.2.1	Invertujúci operačný zosilňovač	11
2.2.2	Neinvertujúci operačný zosilňovač.....	12
2.3	Prenosová funkcia mechanického obvodu	13
2.4	Prenos translačného mechanického systému.....	13
2.4.1	Prenos rotačného mechanického systému.....	16
2.4.2	Prenos rotačného mechanického systému s prevodovkou	18
2.5	Prenosová funkcia elektromechanického systému.....	21
2.6	Elektro-mechanická analógia	23
2.6.1	Sériová analógia	23
2.6.2	Paralelná analógia	25
2.6.3	Príklady na jednoduché obvody elektro-mechanickej analógie.....	30
3	DYNAMICKÉ VLASTNOSTI ZÁKLADNÝCH PRENOSOVÝCH SÚSTAV	32
3.1	Dynamická sústava I. rádu	32
3.2	Dynamická sústava II. rádu.....	33
3.2.1	Proporcionálna sústava II. rádu nekmitavá.....	33
3.2.2	Proporcionálna sústava II. rádu kmitavá.....	34
3.2.3	Proporcionálno-derivačná kmitavá sústava II. rádu.....	36
3.3	Dynamické sústavy vyšších rádov.....	38
4	MODELOVANIE DYNAMICKÝCH SYSTÉMOV V STAVOVOM PRIESTORE ..	39
4.1	Stavový opis systému	39
4.2	Metódy zostavenia stavového modelu dynamického systému	41
4.3	Rozpis diferenciálnej rovnice n-tého rádu na n-diferenciálnych rovníc I.rádu.....	41
4.3.1	Analytické odvodenie stavového modelu elektrického systému	43
4.3.2	Analytické zostavenie stavového modelu mechanického systému	44
4.3.3	Zostavenie stavového modelu systému z blokovej schémy obvodu.....	46
5	MODELOVANIE NELINEÁRNYCH SYSTÉMOV	47
5.1	Nelinearity s nespojitost'ou.....	47
5.2	Vplyv nelinearit na časové ododzvy	49
5.3	Trvalé oscilácie a limitné cykly.....	51
5.4	Linearizácia nelineárneho modelu systému	51
5.5	Linearizácia nelineárneho stavového modelu systému	53
5.5.1	Linearizácia nelineárneho dynamického MIMO systému	53

5.5.2	Linearizácia nelineárneho dynamického SISO systému	53
5.6	Príklady na modelovanie a linearizáciu nelineárnych systémov	54
5.6.1	Model dvojpohodového nelineárneho regulačného systému ohrievača.....	54
5.6.2	Linearizácia mechanického systému (jednoduchého kyvadla).....	55
5.6.3	Linearizácia nelineárneho elektrického obvodu.....	56
6	MODELOVANIE SYSTÉMOV DISKRÉTNEHO ČASU.....	58
6.1	Prehľad diskretných systémov.....	58
6.2	Matematický popis diskretných systémov a z-transformácia	59
6.3	Modely lineárnych diskretných dynamických systémov	62
7	DYNAMICKÉ MODELÝ ZÁKLADNÝCH MECHANICKÝCH PODSYSTÉMOV	63
7.1	Moment zotrvačnosti telies	63
7.2	Modely kyvadiel	64
7.2.1	Jednoduché kyvadlo	64
7.2.2	Dvojité kyvadlo	66
7.2.3	Kyvadlo na vozíku	67
7.3	Translačné mechanické obvody s pružnými členmi	71
7.3.1	Dvojhmotnostný translačný systém	71
7.3.2	Viacnásobný posuvný systém.....	73
7.4	Rotačné mechanické obvody s pružnými členmi.....	77
7.4.1	Dvojhmotnostné rotačné pružné členy	77
7.4.2	Trojhmotnostné rotačné pružné spojenie	79
7.5	Zdvíhacie zariadenie s pružným lanom.....	80
8	MODELÝ ČASTÍ KONTINUÁLNYCH LINIEK S POHYBUJÚCIM SA PÁSOM .	84
8.1	Popis častí kontinuálnej linky.....	84
8.2	Pohyb pružného pásu v linke.....	86
8.3	Dynamický model pohybujúceho sa pružného pásu	89
8.4	Modely liniek s viacerými strojmi.....	91
8.4.1	Model linky s tromi valcami s opášaním.....	91
8.4.2	Model linky s jednoduchými ťažnými valcami a s S-valcami	92
8.4.3	Model linky v ustálenom stave	93
8.5	Model úseku časti linky s napínacím valcom.....	94
8.6	Model úseku linky s voľným previsom pásu	97
8.7	Model časti linky s dvoma strojmi	101
8.8	Model kontinuálnej linky s viacerými strojmi	104
9	ZOSTAVENIE MODELOV DYNAMICKÝCH SYSTÉMOV POMOCOU LAGRANGEOVÝCH ROVNÍC	107
9.1	Zostavenie Lagrangeových rovníc	107
9.1.1	Zovšeobecnené súradnice.....	107
9.1.2	Postup pri zostavovaní Lagrangeových rovníc	108
9.1.3	Lagrangeove rovnice druhého druhu	109

9.2	Zostavenie modelu jednoduchého kyvadla pomocou Lagrangeových rovníc	110
9.2.1	Kinematická schéma a základné rovnice	110
9.2.2	Odvodenie úplného matematického modelu	110
9.2.3	Bloková schéma a časové ododzvy	111
9.3	Dvojité matematické kyvadlo	113
9.3.1	Kinematická schéma a základné rovnice	113
9.3.2	Odvodenie úplného matematického modelu	113
9.3.3	Bloková schéma a časové ododzvy	116
9.4	Kyvadlo na vozíku	118
9.4.1	Kinematická schéma a základné rovnice	118
9.4.2	Odvodenie matematického modelu a časové ododzvy	118
9.5	Kyvadlo na vozíku s pružinou	122
9.5.1	Kinematická schéma a základné rovnice	122
9.5.2	Odvodenie úplného matematického modelu	122
9.5.3	Bloková schéma	125
9.5.4	Časové ododzvy číslíckovej simulácie	126
9.6	Trojité kyvadlo	126

Časť II – MATLAB: pokročilé techniky pre riešenie modelov dynamických sústav

10	CONTROL SYSTEM TOOLBOX	129
10.1	Zadanie matematického modelu systému v MATLABe	129
10.1.1	Práca s polynómami	129
10.1.2	Prenosové funkcie	130
10.1.3	Zapojenie systémov, blokové schémy	132
10.1.4	Určenie prenosu systému z blokovej schémy	134
10.2	Transformácie medzi rôznymi popismi spojitých systémov	136
10.3	Prevod medzi spojitým a diskretným systémom	138
10.3.1	Prevod spojitého systému na diskretný	138
10.3.2	Prevod diskretného systému na spojitý	139
10.4	Vykreslenie základných charakteristík dynamického systému	139
11	SYMBOLIC MATH TOOLBOX	142
11.1	Inštrukcie symbolickej matematiky	143
11.1.1	Derivovanie	144
11.1.2	Integrálny počet	144
11.1.3	Ďalšie matematické operácie pre symbolické riešenie	146
11.1.4	Kreslenie grafov a funkcií	147
11.1.5	Riešenie algebraických rovníc	148
11.1.6	Limity	151
11.1.7	Taylorov rad	152
11.1.8	Súčet radu	153
11.1.9	Aritmetika s premenlivou presnosťou	154

11.2	Formátovanie výsledkov	154
11.3	Riešenie prenosových funkcií	156
11.4	Riešenie diferenciálnych rovníc symbolickým počtom	162
11.5	Modelovanie diskretných systémov	164
11.5.1	Konverzia spojitého systému na diskretný systém	164
12	ZOSTAVOVANIE MODELOV MECHANICKÝCH SYSTÉMOV V PROGRAME SIMMECHANICS	170
12.1	Prehľad blokov programu SimMechanics	171
12.1.1	Skupina blokov Bodies	171
12.1.2	Skupina blokov Joints	172
12.1.3	Skupina blokov Drivers & Constraints	173
12.1.4	Skupina blokov Drivers	176
12.1.5	Skupina blokov Sensors & Actuators	177
12.1.6	Skupina blokov Force Elements	178
12.1.7	Ďalšie skupiny blokov	181
12.2	Riešenie modelov mechanických systémov v SimMechanics	182
12.2.1	Dvojité matematické kyvadlo	182
12.2.2	Kyvadlo na vozíku	183
12.2.3	Kyvadlo na vozíku s pružinou	183
12.3	Príklady modelov zložitejších mechanických systémov	184
12.3.1	Výt'ah, poháňaný elektromotorom, s prevodovkou, pružným lanom a protizávažím	184
13	ŠPECIÁLNE NÁSTROJE SIMULINKU A CONTROL TOOLBOXU PRE ANALÝZU DYNAMICKÝCH SYSTÉMOV A SYNTÉZU REGULÁTOROV	189
13.1	Určenie prenosu systému zo schémy v Simulinku	189
13.2	LTI viewer pre analýzu modelov systémov	190
13.2.1	Prehľad aplikácie	190
13.2.2	Aplikačné príklady na LTI Viewer	194
13.2.3	Analýza modelov MIMO systémov pomocou LTI viewer	203
13.3	Návrh regulátorov pomocou SISO Desgin Tool	205
13.4	Návrh grafického používateľského interfejsu v MATLABe	215
13.4.1	Základy dizajnu grafických používateľských rozhraní	215
13.4.2	Vizuálne usporiadanie prvkov v GUI	216
13.4.3	Popis GUIDE	218
13.4.4	Vytvorenie GUI	220
13.5	Vytvorenie exe súboru zo súboru v MATLABe	225
13.5.1	Postup pri vytvorení exe súboru	225
13.5.2	Spustenie .exe súboru	227
13.6	Spolupráca MATLABu s programom Excel	227
13.6.1	Zápis do súboru v Exceli	227
13.6.2	Čítanie zo súboru v Exceli	228
13.7	Kalkulátor symbolických funkcií	228

POUŽITÁ LITERATÚRA

Súpis použitých symbolov a označení

Symbols

a	zrýchlenie, koeficient v menovateli prenosovej funkcie	N	počet zubov ozubeného kolesa prevodovky
A	napät'ové zosilnenie	p	výkon - časová funkcia
$\mathbf{A}$	matica systému (v stvovom popopise)	q	náboj, zovšeobecnená súradnica
b	koeficient (viskózneho) tlmenia (pri translačnom i rotačnom pohybe), koeficient v čitateli prenosovej funkcie	r	polomer
$\mathbf{b}, \mathbf{B}$	vstupný vektor, vstupná matica	R	odpor
c	konštanta, koeficient pružnosti (pri translačnom i rotačnom pohybe)	s	Laplaceov operátor
$\mathbf{c}^T, \mathbf{C}$	výstupný vektor (transponovaný), výstupná matica	S	prierez
C	kapacita	t	čas
D	priemer	T	časová konštanta, kinetická energia
e	regulačná odchýlka	$u(t), U(s)$	napätie - časová funkcia,, operátorový obraz
E	modul pružnosti	V	potenciálna energia
$f(t), F(s)$	sila - časová funkcia, operátorový obraz, funkcia	$v(t), V(s)$	posuvná rýchlosť - časová funkcia, operátorový obraz
$F(s)$	prenosová funkcia	w	žiadaná hodnota, šírka
g	funkcia, ragitačné zrýchlenie	x	premenná
f	koeficient trenia	$x, x(t), X(s)$	dráha - časová funkcia, operátorový obraz
$G(s)$	prenosová funkcia	$x(t), X(s)$	stavová veličina – časová funkcia, operátorový obraz
h	výška, previs	z	modifikovaná dráha, diskretný operátor
$H(s)$	prenosová funkcia	$Z(s)$	impedancia, operátorový obraz
$i(t), I(s)$	prúd - časová funkcia operátorový obraz	y	premenná
j	prevodový pomer prevodovky (prevod)	$y(t), Y(s)$	výstupná veličina
J	moment zotrvačnosti	Y	admitancia
k	poradie, konštanta, koeficient pružnosti (pružiny)	Grécke písmená	
K	zosilnenie obvodu kotvy (motora), smernica krivky	Δ	determinant matice, prírastok
l	dĺžka	α	konštanta, uhol opásania
L	Lagrangeova funkcia, indukčnosť	β	uhol adhézneho trenia, uhol vychýlenia
m	hmotnosť, rád čitateľa prenosovej funkcie	γ	uhol šmykového trenia, uhol opásania
M	moment	δ	diferenciálny prírastok
$m(t), M(s)$	moment - časová funkcia, operátorový obraz	ε	pomerné predĺženie
n	počet, rád menovateľa prenosovej funkcie	σ	t'ahové napätie
		φ	uhol
		Φ	magnetický tok motora
		$\omega(t), \omega(s)$	uhlová rýchlosť
		$\theta(t), \theta(s)$	uhol natočenia, vychýlka
		τ	integračná premenná (času)

Dolné indexy

<i>a</i>	rotora
<i>b</i>	tlmenia, buba
<i>c</i>	pružnosti, pružiny, celkový
<i>C</i>	kondenzátora
<i>d</i>	diskrétny, dopravného (oneskorenia)
<i>D</i>	derivačný
<i>e</i>	pružnosti, ekvivalentný
<i>ext</i>	externý
<i>i</i>	indukovaný, vstupu
<i>J</i>	momentu zotrvačnosti
<i>L</i>	indukčnosti
<i>m</i>	hmotnosti, motora, hmoty
<i>M</i>	mechanický
<i>N</i>	normálový
<i>o</i>	pracovného bodu, bez tlmenia rovnovážneho stavu, výstupu
<i>p</i>	pásu
<i>r</i>	odstredivý
<i>R</i>	rotačný, odporu
<i>S</i>	sústavy
<i>t</i>	tangenciálny, tlmenia
<i>T</i>	translačný, tangenciálny
<i>v</i>	vozíka
<i>z</i>	záťaž, poruchy

Horné indexy

<i>T</i>	transponovaný
<i>−1</i>	inverzný
<i>*</i>	referenčný

Skratky

GUI	(Graphical User Interface) – grafický používateľský interfejs
GUIDE	(GUI Development Environment) - vývojové prostredie pre GUI
LTI	(Linear Time-Invariant) lineárny časovo invariantný (systém)
M	motor
MIMO	(Multi-Input Multi-Output) - (systém) s viacerými vstupmi a výstupmi
OZ	operačný zosilňovač
PM	pracovný mechanizmus
SISO	(Single-Input Single-Output) - (systém) s jedným vstupom a výstupom

Predhovor

Tento učebný text slúži ako základná študijná literatúra pre štúdium rovnomenného predmetu Modelovanie elektromechanických sústav, prednášanom v r. 3 ročníku I. stupňa vysokoškolského vzdelávania, študijný program Riadenie elektromechanických sústav, FEI TU v Košiciach.

Keďže časť poslucháčov neabsolvovala prípravný predmet CAD v elektrotechnike (2. roč. štúdia) a v mnohých ohľadoch prednášaná látka nadväzuje na uvedený predmet, tento učebný text obsahuje aj časť látky preberanej v predmete CAD v elektrotechnike. Z toho dôvodu je učebný text rozšírený aj o niektoré oblasti z predmetu CAD v elektrotechnike.

Učebný text predstavuje pomôcku na štúdium, zďaleka však nevyčerpáva celú šírku poznatkov z danej oblasti. Jeho náplň bola zostavená na základe požiadaviek na vedomosti potrebných pre štúdium špecializovaných predmetov v uvedenom študijnom programe.

Z praktického hľadiska je rozdelený na 2 časti:

Časť 1 – Modelovanie a modely elektromechanických sústav, ktorá je venovaná viac-menej teoretickým otázkam a problémom zostavenia modelov elektrických a mechanických systémov a regulačných obvodov analytickými metódami. Na modely mechanickej časti systému je kladený zvláštny dôraz, keďže práve vhodný a presný model mechanickej časti systému je nevyhnutný pre správny návrh riadenia (a tým pádom aj pre návrh regulátorov pohonného systému). Na množstve príkladov sú poukázané zvláštnosti i analógie pri zostavovaní modelov elektrických a mechanických systémov.

Časť II – MATLAB: pokročilé techniky pre riešenie modelov dynamických sústav: táto časť je doplnková a je zameraná na intenzívne použitie programu MATLAB/Simulink a niektorých toolboxov (pozri <http://www.mathworks.com/help/>) pre riešenie (analýzu a syntézu) dynamických modelov systémov, kde medzi základnými toolboxami sú uvedené Control System Toolbox, Symbolic Math Toolbox a pre riešenie mechanických systémov program SimMechanics. Pre úplnosť treba poznamenať, že v špecializovaných predmetoch sa využívajú niektoré ďalšie toolboxy.

Okrem látky uvedenej v týchto študijných textoch je samotný predmet venovaný aj využitiu fyzikálneho modelovania pomocou programu Simscape a SimPowerSystems a pri spracovaní údajov experimentálnej identifikácie systémov tiež System Identification Toolbox. Z dôvodu rozsahu tieto časti nie sú v tomto učebnom texte zatiaľ spracované.

V závere sú popísané niektoré špeciálne nástroje MATLABu pre analýzu a syntézu systémov založené na grafických používateľských rozhraniach (GUI), ako sú ltiview a sisotool.

Špeciálna pozornosť je venovaná vlastnému návrhu obrazovky GUI a rozmiestnenia ovládacích a vizualizačných prvkov i postupu pri samotnom zostavovaní grafického používateľského rozhrania v MATLABe. Tieto rozhrania tvoria základ vytvárania rôznych virtuálnych modelov, ale tiež aj ovládania externých systémov z prostredia MATLABu a slúžia tiež pre vizualizáciu údajov zo simulácií i z externého prostredia počítača. V rámci tohto a príbuzných predmetov, bakalárskych a diplomových prác na pracovisku autora takto boli zostavené desiatky rôznych grafických používateľských rozhraní pokrývajúcich oblasť výkonovej elektroniky, elektrických strojov, elektrických pohonov, návrhu regulátorov pohonov, analýzy a syntézy rôznych mechatronických systémov i ovládania robotických systémov.

Záver učebných textov je venovaný problematike zostavovania samospustiteľných .exe programov na základe MATLABu a príslušného kompilátora.

Súpis literatúry, rozdelený po kapitolách, obsahuje základné množstvo literárnych prameňov, ktoré dobre poslúžia pri požiadavke na prehĺbenie poznatkov z danej oblasti. S ohľadom na dostupnosť informácií sú tu uvedené aj aktuálne internetové odkazy na príslušné témy.

Časť 1 – Modelovanie a modely elektromechanických sústav

1 Úvod do modelovania elektromechanických sústav

1.1 Elektromechanický systém a postup pri zostavení jeho modelu

Cieľom predmetu je naučiť sa zostavovať matematické modely zložitých dynamických systémov, a analyzovať ich vlastnosti tak, aby tieto modely boli použiteľné:

- 1) pre približnú analýzu systému (skúmanie chovania sa a vlastností systému pri zmene jeho parametrov v určitom rozsahu),
- 2) pre návrh riadiacich štruktúr a algoritmov (návrh dopredného a spätnoväzobného riadenia),
- 3) pre simuláciu výsledného regulovaného systému (pôvodný systém plus riadenie), čo je dôležitým krokom pred vlastnou realizáciou riadenia.

Sústredíme sa pritom na elektromechanické systémy, ktoré predstavujú podstatnú časť priemyselných systémov. Mnohé závery však budú všeobecne platné, aplikovateľné aj na iné oblasti – nielen samotné mechanické a elektrické systémy, ale aj na pneumatické a hydraulické systémy.

V prvej časti budú predstavené rôzne metódy a prístupy k zostaveniu modelov systémov (k modelovaniu systémov), metódy Newton-Eulerovej i Lagrangeovej mechaniky pre zostavenie modelu systémov, matematické odvodenie dynamických modelov elektrických systémov, i modelovanie pomocou blokových schém a tzv. fyzikálne modelovanie s využitím vhodného softvéru. Model systému možno zostaviť aj z nameraných údajov vstupných a výstupných signálov a charakteristík systému pomocou metód experimentálnej identifikácie, pomocou ktorých zostavujeme modely systémov. Z hľadiska rozsahu tejto publikácie sú vynechané niektoré špeciálne metódy, ako fuzzy modelovanie, stochastické modelovanie, pokročilé metódy identifikácie a pod., ktoré sa preberajú v iných predmetoch.

Nech sa ku matematickému modelu dynamického systému dostaneme akoukoľvek cestou, nasleduje druhá fáza – overenie modelov simuláciou (v našom prípade ide o číslicovú simuláciu), ktorá je spojená s interpretáciou výsledkov, aby sme sa vyhli známemu sloganu „garbage in – garbage out“. Preto druhá časť tohto učebného textu je venovaná metódam vhodnej počítačovej podpory pre modelovanie systémov, ktorá je založená na programe MATLAB a jeho súčastiach: SimScape, SimMechanics, využívaní štandardných grafických používateľských interfejsov (GUI – Graphical User Interface), ako sú LTI Viewer, SISO Design tool, FunTool, ale i zostavovaniu vlastných GUI pre modely rôznych elektromechanických systémov, ktorých počet v čase písania tohto textu dosahuje niekoľko desiatok a ktoré sa využívajú v priamej výučbe tohto i nadväzujúcich predmetov (CAD v elektrotechnike, Elektrické stroje, Elektrické pohony, Regulované pohony, Servomechanizmy, Dynamika elektrických strojov, atď. až po Riadenie robotov a pod.).

Pod elektromechanickým systémom si predstavujeme systém, ktorý integruje v sebe elektrickú a mechanickú časť, z ktorých síce každá môže pracovať osobitne, ale pre efektívne vykonávanie činnosti je nevyhnutná kooperácia oboch častí, ktoré sa vzájomne ovplyvňujú vo svojom pôsobení. Elektromechanický systém je podsystémom mechatronického systému, ktorý vznikne integráciou riadiacej časti spolu s riadiacimi algoritmi do elektromechanického systému.

Modelovanie a analýza elektromechanického systému pozostáva z týchto častí:

- 1) Zostavenie matematického modelu aplikáciou fyzikálnych zákonov s použitím matematického aparátu
- 2) Úprava matematického modelu (napr. jeho linearizácia)
- 3) Zostavenie blokovej schémy, jej úprava príp. zjednodušenie a analýza
- 4) Doplnenie parametrov systému
- 5) Zostavenie programovej schémy pre číslicovú simuláciu
- 6) Nastavenia parametrov simulácie (konfigurácia parametrov riešiča)
- 7) Samotný priebeh simulácie
- 8) Analýza a interpretácia výsledkov, príp. úprava modelu a opätovná simulácia

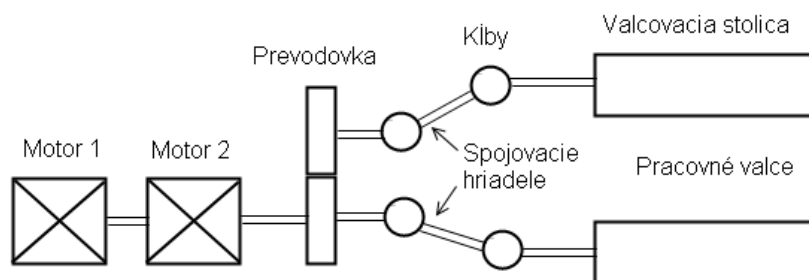
Výsledkom je model systému, ktorý v ďalšom možno použiť pre návrh riadiacich algoritmov a pred vlastnou realizáciou riadiaceho systému ho využiť na simuláciu systému ako celku.

Pri modelovaní elektromechanických systémov nám ide o modelovanie ich dynamiky, pohybu a pod. Budeme uvažovať dynamické systémy so sústredenými parametrami, ktoré sú popísané diferenciálnymi rovnicami, medzi ktorými základnými rovnicami sú pohybové rovnice.

Základným predpokladom pre porozumenie textu je zvládnutie základov práce s programom MATLAB, s diferenciálnymi rovnicami a s algoritmami numerického riešenia diferenciálnych rovníc, s maticovým počtom a prenosovými funkciami, majú zvládnuté základy elektrotechniky i mechaniky, a so základmi teórie regulácie. Vysvetľovanú látku je nutné prakticky precvičiť na počítači, čo mu sú venované cvičenia z tohto predmetu.

1.2 Príklad modelovania zložitého elektromechanického systému

Na Obr. 1.1 je znázornená všeobecná štruktúra elektromechanického systému – valcovacia stolica [1] s elektrickým pohonom. Sú tu zobrazené jednotlivé komponenty systému, ktoré sú navzájom prepojené vzájomnými väzbami elektrickými, mechanickými i tokom informácie: elektrický motor, napájaný z výkonového polovodičového meniča, snímače regulovaných veličín, riadiace obvody, mechanické obvody i samotný technologický (valcovací) proces. Riadiace obvody obsahujú mnoho regulačných slučiek. Napr. valcovacia stolica (Obr. 1.1) patrí k jedným z najzložitejších elektromechanických systémov vôbec: spomeňme prúdovú a nadradenú rýchlostnú slučku pre reguláciu samotného motora, ale nachádzajú sa tu aj ďalšie regulačné obvody, vyplývajúce z technológie výroby.



Obr. 1.1 Valcovacia stolica typu duo ako príklad zložitého priemyselného elektromechanického systému

Pohonný systém je často kombinovaný s hydraulickým systémom pre nastavovanie valcovacej medzery, takže vzniká multidoménový systém. Matematický popis systémov však zjednocuje ich modelovanie bez ohľadu na to, v akej doméne sa systém nachádza.

Kľúčovým problémom pri riešení takéhoto systému ako celku je preto zjednodušenie výsledného modelu systému tak, aby tento model bol relatívne jednoduchý ale pritom zohľadňoval všetky relevantné javy, ktoré potrebujeme vyšetrovať. Napr. z hľadiska simulácie časové konštanty elektrických podsystemov sú relatívne malé (rádovo milisekundy) v porovnaní s časovými konštantami mechanického podsystemu, takže je ich možné zanedbať. Okrem toho v popisovanom elektromechanickom systéme spravidla existuje mix rôznych podsystemov – analógových i digitálnych (digitálne riadenie), takže je potrebné rozhodnúť sa pre určitú platformu. Ako vyplýva z uvedeného prehľadu, otázka zostavenia modelu a jeho zjednodušenia pri zložitejších systémoch je náročnou úlohou, vyžadujúcou aký-taký prehľad v oblasti modelovania systémov.

The diagram illustrates a control system for a mechanical drive. It consists of the following components and their interconnections:

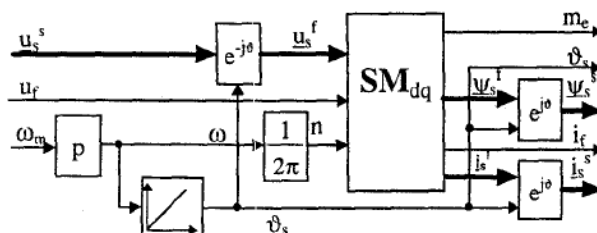
- napájací zdroj** (power source): Represented by a circuit symbol with a capacitor and an inductor.
- menič** (inverter): Represented by a circuit symbol for a semiconductor switch.
- elektrický motor** (electric motor): Represented by a circle with the letter 'M' and '3~' (three-phase).
- mechanický systém** (mechanical system): Represented by a schematic of a mass-spring-damper system.
- technologický proces** (technological process): Represented by a schematic of a three-phase motor or similar process.

The components are connected in a sequence: napájací zdroj → menič ↔ elektrický motor ↔ mechanický systém ↔ technologický proces. The connections between the inverter, motor, and mechanical system are bidirectional.

Two control levels are indicated by dashed boxes:

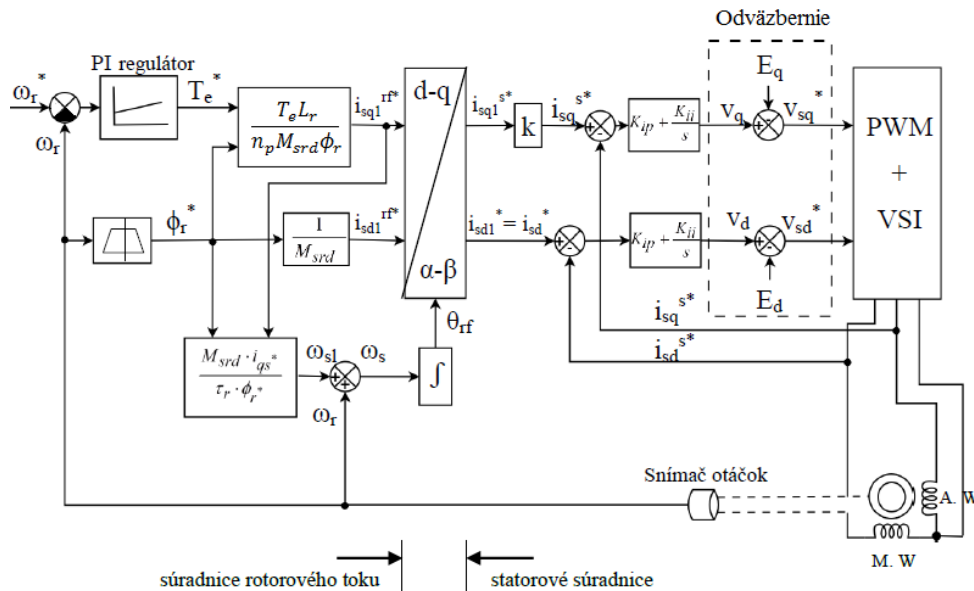
- úroveň riadenia I.** (control level I): Encloses the **menič** and **elektrický motor**.
- úroveň riadenia II.** (control level II): Encloses the **elektrický motor**, **mechanický systém**, and **technologický proces**.

Podobne model elektrického motora, bez ohľadu na jeho typ, vo všeobecnosti pozostáva z troch častí: elektrické obvody statora (rotora) generujúce prúd, elektromagnetický obvod vytvárajúci moment motora a nasleduje mechanický obvod generujúci otáčavú rýchlosť motora, spätne ovplyvňujúci elektrický obvod indukovaným napätím, ktorého veľkosť závisí od tejto rýchlosti. Na Obr. 1.3 je síce nakreslená štruktúrna schéma synchronného motora, ale v princípe podobná štruktúra platí aj pre iné typy motorov, ako je jednosmerný motor, či asynchronný motor a pod.

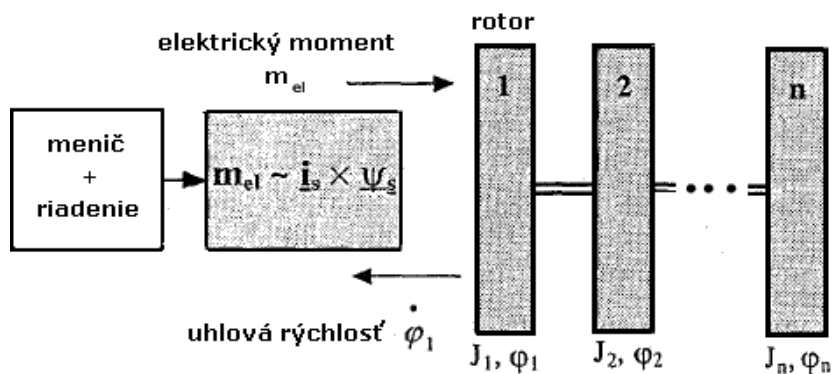


5

Ďalším v poradí je model regulačných obvodov pohonu (napr. na Obr. 1.5), ktoré bývajú rôznej zložitosti. Příklad modelu elektrického regulovaného pohonu (regulovaný pohon s frekvenčne riadeným dvojfázovým asynchrónnym motorom) je uvedený na obr. 1.5.



Najdôležitejšou časťou modelu motora je reprezentácia väzby medzi elektrickým a mechanickým podsystemom (Obr. 1.6). Moment vytváraný elektrickým strojom pôsobiaci na mechanickú časť systému predstavuje jeho budiacu funkciu. Na obrázku sú znázornené dve spätnoväzobné slučky – vnútorná je prúdová (v control layer I) a vonkajšia rýchlostná (otáčková, control layer II). Ními môžeme ovplyvňovať vlastnosti motora.



Obr. 1.6 Väzba medzi elektrickou a mechanickou časťou pohonu

Mechanický podsystem na pravej strane obrázka obsahuje prvky so sústredenými parametrami, ako sú momenty zotrvačnosti motora, prevodovky, spojok, spojovacích hriadeľov i samotných valcov.

V uvedenom prípade nemusí ísť iba o jednotlivé elementy s tuhou väzbou, ale väzba medzi mechanickými členmi môže byť pružná a nelineárna, čo ďalej zvyšuje zložitosť systému. Modelovanie pružnej väzby umožňuje vyšetrovať torzné vibrácie mechanického systému, ktorý modelujeme pomocou pružných a tlmiacich členov. Na matematický popis pohybu využívame Newtonove pohybové rovnice, alebo sa tento dá popísať zákonmi Lagrangeovej mechaniky.

Cieľom modelovania elektromechanických systémov je komplexná simulácia tohto systému bez ohľadu na to, či ide o elektrické, mechanické, či riadiace obvody. Pre ňu musíme zvoliť vhodnú metódu riešenia systému, veľkosť integračného kroku, presnosť riešenia a pod.

Práve uvedený prehľad poukázal na okruh problémov, ktorými sa budeme zaoberať v ďalších častiach tohto učebného textu.

2 Prenosové funkcie elektrických a mechanických obvodov

V tejto kapitole sa budeme zaoberať problematikou zostavenie prenosových funkcií elektrických, mechanických a elektromechanických obvodov analytickým spôsobom, pomocou matematického modelovania, zostavením diferenciálnych rovníc aplikáciou niektorých fyzikálnych zákonov, známych z elektrických obvodov (Kirchhoffove zákony, Newtonove zákony). Využijeme pritom charakteristické zákonitosti medzi elektrickým prúdom a napätím v elektrických obvodoch, medzi silou a rýchlosťou v translačných mechanických systémoch, resp. medzi momentom a uhlovou rýchlosťou v rotačných mechanických systémoch.

2.1 Prenosová funkcia pasívneho elektrického obvodu

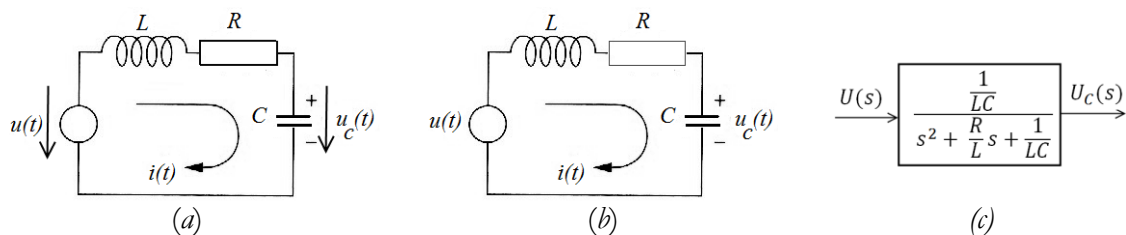
Uvedieme tu princíp odvodenia prenosovej funkcie v elektrickom obvode pozostávajúcom z pasívnych prvkov R, L, C a zo zdrojov napätia $u(t)$, resp. prúdu $i(t)$. Indukčnosť a kondenzátor predstavujú zásobníky energie (elektromechanickej, resp. elektrostatickej), zatiaľ čo v odpore sa energia stráca.

V obvode zadefinujeme vstupnú veličinu, výstupnú veličinu a nájdeme medzi nimi hľadaný prenos aplikujúc prvý a druhý Kirchhoffov zákon [2]. Pri zostavovaní rovníc využívame zákonitosti medzi napätím a prúdom na jednotlivých prvkoch R, L, C (Tab. 1). Pri riešení vychádzame zo slučkových prúdov a pre každú slučku zostavíme napäťové rovnice, ktoré upravíme pomocou vzťahov v Tab. 2.1 tak, aby sme dostali diferenciálne rovnice (vylúčením integrálov z rovníc obvodu).

Tab. 2.1 Vzťahy medzi napätím a prúdom, resp. napätím a nábojom pasívnych R, L, C prvkov obvodu a odpovedajúce impedancie Laplaceových obrazov prvkov

Prvok obvodu	Napätie-prúd	Prúd-napätie	Napätie-náboj	Impedancia $Z(s) = \frac{U(s)}{I(s)}$
Kondenzátor	$u(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau$	$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$	$u(t) = \frac{1}{C} q(t)$	$Z_C(s) = \frac{1}{Cs}$
Odpor	$u(t) = R i(t)$	$i(t) = \frac{1}{R} u(t)$	$u(t) = R \frac{dq(t)}{dt}$	$Z_R(s) = R$
Indukčnosť	$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau$	$u(t) = L \frac{d^2q(t)}{dt^2}$	$Z_L(s) = Ls$

Odvoďme prenos v jednoduchom sériovom $R - L - C$ obvode (Obr. 2.1).



Obr. 2.1 Sériový R-L-C obvod: a) v časovej oblasti; b) v operátorovej oblasti; c) prenos obvodu

Vstupom je napätie zdroja a výstupom napätie na niektorom z prvkov obvodu – d napr. zvolíme napätie $u_C(t)$ na kondenzátore. Napíšeme rovnice pre napätia na jednotlivých prvkoch v slučke:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = u(t) \quad (2.1)$$

V tejto rovnici vylúčime integrál zavedením náboja $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$, ktorý nahradíme napätím na kondenzátore $q(t) = Cu_C(t)$. Po úprave dostaneme:

$$LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = i(t) \quad (2.2)$$

Rovnicu prevedieme do Laplaceovej transformácie:

$$(LCs^2 + RCs + 1)U_C(s) = U(s) \quad (2.3)$$

odkiaľ dostaneme hľadaný prenos:

$$F(s) = \frac{U_C(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (2.4)$$

V ďalšom odvodíme postup, ktorý nám umožní automatizovať zostavenie prenosovej funkcie. Pre impedanciu platí:

$$Z(s)I(s) = U(s) \quad (2.5)$$

kde pre indukčnosť je $Z_L(s) = Ls$, pre kondenzátor $Z_C(s) = 1/Cs$ a pre odpor $Z_R = R$.

Platí to aj pre impedanciu slučky $Z(s) = Ls + R + \frac{1}{Cs}$ a teda:

$$\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right)I(s) = U(s) \quad (2.6)$$

čo slovami zapíšeme [3]:

$$(suma\ imedancií\ v\ slučke).I(s) = suma\ napäťových\ zdrojov$$

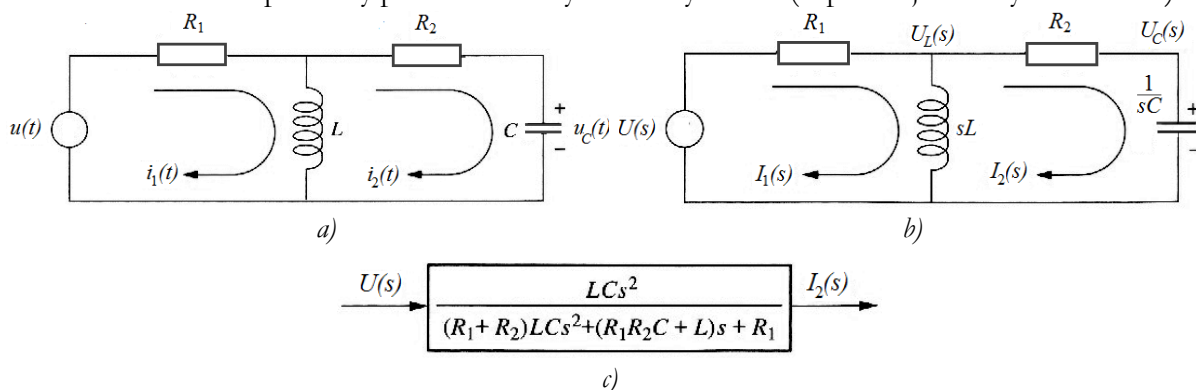
kde $I(s)$ je operátorový obraz slučkového prúdu.

Ak z rov. (2.6) vyjadríme prúd a dosadíme do rovníc pre napätia na prvkoch v slučke:

$$U_L = Ls I(s) \quad U_R = R I(s) \quad U_C = \frac{1}{Cs} I(s) \quad (2.7)$$

dostaneme prenosovú funkciu medzi vstupným napätím a napätím na ľubovoľnom prvku.

Zovšeobecňime tieto poznatky pre viacsľučkový elektrický obvod (napr. dvojsľučkový na Obr. 2.2).



Obr. 2.2 Dvojsľučkový elektrický obvod: a) v časovej oblasti; b) v operátorovej oblasti; c) prenos obvodu

Pre každú slučku napíšeme napäťovú rovnicu. Počet potrebných rovníc odpovedá počtu slučiek – viď rov. (2.8) a (2.9). V týchto dvoch rovniciach sú neznámymi prúdy $I_1(s)$ a $I_2(s)$. Vyriešime ich niektorou z metód riešenia lineárnych rovníc (pomocou Cramerovho pravidla, alebo dosadením z jednej rovnice do druhej).

$$[R_1 + Ls] I_1(s) - Ls I_2(s) = U(s) \quad (2.8)$$

$$-Ls I_1(s) + \left[R_2 + Ls + \frac{1}{Cs} \right] I_2(s) = 0 \quad (2.9)$$

Napr. prúd $I_2(s)$ vyriešený pomocou Cramerovho pravidla je:

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} (R_1 + Ls) & U(s) \\ -Ls & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{Ls}{\Delta} U(s) \quad (2.10)$$

kde Δ je determinant sústavy. Ak výstupom je napätie na kondenzátore, potom prenos vzhľadom na vstupné napätie je:

$$F(s) = \frac{U_C(s)}{U(s)} = \frac{1}{Cs} \frac{I_2(s)}{U(s)} \quad (2.11)$$

Pre riešenie viacsľučkových obvodov s výhodou využijeme symbolický počet v MATLABe.

Ak sa analyticky pozrieme na rovnice (2.8) a (2.9), môžeme ich slovne popísať nasledovne:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} \text{Suma impedancií} \\ \text{v slučke 1} \end{array} \right] I_1(s) - \left[\begin{array}{c} \text{Suma impedancií} \\ \text{v slučke 2} \end{array} \right] I_2(s) &= \left[\begin{array}{c} \text{Suma napäťových} \\ \text{zdrojov v slučke 1} \end{array} \right] \quad (2.12) \\ - \left[\begin{array}{c} \text{Suma impedancií} \\ \text{v slučke 1} \end{array} \right] I_1(s) + \left[\begin{array}{c} \text{Suma impedancií} \\ \text{v slučke 2} \end{array} \right] I_2(s) &= \left[\begin{array}{c} \text{Suma napäťových} \\ \text{zdrojov v slučke 2} \end{array} \right] \quad (2.13) \end{aligned}$$

čo nám umožňuje rýchlo napísať rovnice obvodu a ťažisko riešenia prenosovej funkcie obvodu sa takto presúva do (symbolického) riešenia sústavy lineárnych rovníc. Samozrejme, tieto poznatky možno rozšíriť na viacsľučkové obvody.

V prípade systému s viacerými slučkami ako 2, je toto pravidlo nasledovné:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Suma} \\ \text{impedancií} \\ \text{v slučke 1} \end{array} \right] I_1(s) - \left[\begin{array}{c} \text{Suma} \\ \text{impedancií} \\ \text{medzi 1 - 2} \end{array} \right] I_2(s) - \left[\begin{array}{c} \text{Suma} \\ \text{impedancií} \\ \text{medzi 1 - 3} \end{array} \right] I_3(s) = \left[\begin{array}{c} \text{Suma napäťových} \\ \text{zdrojov v slučke 1} \end{array} \right] \quad (2.14)$$

a podobnú zákonitosť možno odvodiť aj pre rozsiahlejšie obvody.

Uvedená metóda umožňuje automatizovať zostavovanie rovníc a rýchlo dospieť ku výsledku, samozrejme s využitím Symbolic toolboxu v MATLABe príp. programu Maple.

2.2 Prenosová funkcia zaväzbeného operačného zosilňovača

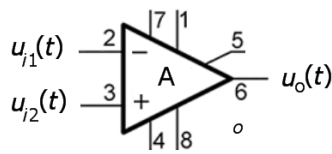
Na rozdiel od predchádzajúcich pasívnych elektrických obvodov budeme analyzovať vlastnosti aktívnych obvodov s operačnými zosilňovačmi. Ide o analógové zosilňovače s veľkým napät'ovým zosilnením. Aj keď ich používanie v súvislosti s rozvojom digitálneho spracovania signálov je na ústupe, predsa sú nezastupiteľné v mnohých oblastiach aplikácií a ešte nájdu oblasti ich aplikácií. So vstupnými napät'ovými signálmi môžu vykonávať rôzne matematické operácie ako inverzia, súčet, rozdiel, integrovanie, derivovanie násobenie konštantou.

Z nášho hľadiska je najdôležitejšie, že operačné zosilňovače môžu realizovať rôzne prenosové funkcie, [4]. Operačný zosilňovač má nasledujúce vlastnosti:

- Nekonečné napät'ové zosilnenie: $A \rightarrow \infty$ (ideálne)
- Nekonečná vstupná impedancia: $Z_i \rightarrow \infty$ (ideálne)
- Nulová výstupná impedancia: $Z_o \rightarrow 0$ (ideálne)
- Nekonečne široké frekvenčné pásmo – frekvenčná nezávislosť

Výstupné napätie je dané zosilnením rozdielu napätí na vstupoch (Obr. 2.3)

$$u_o(t) = A[u_{i2}(t) - u_{i1}(t)] \quad (2.15)$$



Legenda:

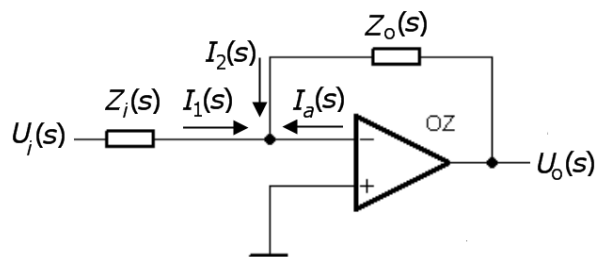
- | | |
|------------------------|---------------------------------------|
| 2 - neinverujúci vstup | 4, 7 - napájacie napätie |
| 3 - inverujúci vstup | 1, 5 - korekcia napät'ovej nesymetrie |
| 6 - výstup | |

Obr. 2.3 Operačný zosilňovač

2.2.1 Inverujúci operačný zosilňovač

Ak vstupné napätie $u_{i2}(t) = 0$ (uzemnený neinverujúci vstup), potom výstupné napätie OZ je dané (Obr. 2.4):

$$u_o(t) = -Au_{i1}(t) \quad (2.16)$$



Obr. 2.4 Zapojenie inverujúceho operačného zosilňovača

Keďže operačný zosilňovač má nekonečnú vstupnú impedanciu, vysoké zosilnenie, potom $I_a(s) = 0$, $u \approx 0$ a $I_1(s) = -I_2(s)$. Z toho vyplýva:

$$I_1(s) = \frac{U_i(s)}{Z_i(s)}; \quad I_o(s) = \frac{U_o(s)}{Z_o(s)} \quad (2.17)$$

a hľadaný prenos je:

$$F(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{Z_o(s)}{Z_i(s)} \quad (2.18)$$

Podľa toho, aké impedancie $Z_i(s)$ a $Z_o(s)$ sú zapojené, rozoznávame rôzne prenosové funkcie. Niektoré prenosové funkcie sú prehľadne uvedené v Tab. 2.1 (samozrejme, existujú aj zložitejšie zapojenia, tu neuvedené).

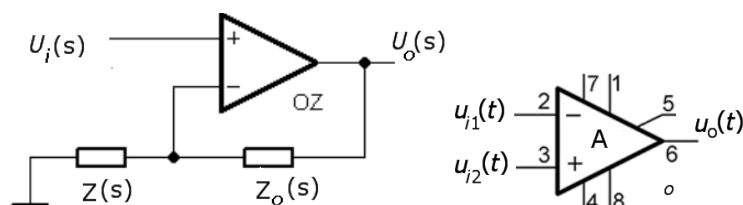
Tab. 2.2 Prehľad základných zapojení operačného zosilňovača pre modelovanie prenosových funkcií

Názov	$Z_i(s)$	$Z_o(s)$	Prenosová funkcia $F(s)$
Invertor	R_i	R_o	$F(s) = -\frac{R_o}{R_i}$
Sumátor	R_1, R_2, R_3	R_o	$F(s) = -\left(\frac{R_o}{R_1} + \frac{R_o}{R_2} + \frac{R_o}{R_3}\right)$
Integrátor (dolná priepusť)	R_i	C_o	$F(s) = -\frac{1}{R_i C_o s}$
Derivátor (horná priepusť)	R_i	R_o	$F(s) = -R_o C_i s$
P sústava I. rádu	R_i	R_o paralelne s C_o	$F(s) = -\frac{R_o/R_i}{1 + sR_o C_o}$
PI člen	R_i paralelne s C_i	R_o paralelne s C_o	$F(s) = -\frac{1}{sC_o R_i} + \frac{C_i}{C_o}$
PD člen	R_i paralelne s C_i	R_o	$F(s) = -\frac{R_i}{R_o} (1 + R_i C_i s)$
PID člen	R_i paralelne s C_i	R_o v sérii s C_o	$F(s) = -\frac{R_o}{R_i} \frac{(1 + sT_i)(1 + sT_o)}{sT_o}$ $T_i = R_i C_i \quad T_o = R_o C_o$
PD sústava I. rádu	R_i paralelne s C_i	R_o paralelne s C_o	$F(s) = -\frac{R_i}{R_o} \frac{1 + R_i C_i s}{1 + sR_o C_o}$

2.2.2 Neinvertujúci operačný zosilňovač

V zapojení neinvertujúceho operačného zosilňovača (Obr. 2.5) platí podľa rov. (2.18):

$$U_o(s) = A[U_i(s) - U_1(s)] = A U_i(s) - \frac{Z(s)}{Z(s) + Z_o(s)} U_o(s) \quad (2.19)$$



Obr. 2.5 Zapojenie neinvertujúceho operačného zosilňovača

odkiaľ dostávame pre hľadaný prenos:

$$F(s) = \frac{Z(s) + Z_o(s)}{Z(s)} \quad (2.20)$$

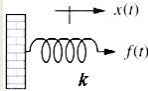
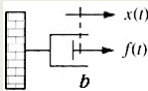
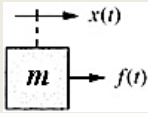
2.3 Prenosová funkcia mechanického obvodu

Riešenie mechanických obvodov je podobné, ako riešenie elektrických. Mechanické obvody poznáme translačné (stat' 2.3.1) a rotačné (stat' 2.3.2). Matematické vyjadrenie v oboch prípadoch je rovnaké a formálne v oboch prípadoch je také isté, ako pri elektrických obvodoch (bližšie sa tomu venuje popis elektromechanickej analógie v stati 2.3.3)

2.4 Prenos translačného mechanického systému

Translačné (tiež posuvné) mechanické systémy pozostávajú, podobne ako elektrické, z troch základných druhov pasívnych prvkov: pružina s koeficientom pružnosti k , viskózný tlmič s koeficientom viskózneho tlmenia b a hmota m . Ako budiaci signál (vstupná veličina) tu vystupuje sila $f(t)$. Pružina a hmota pritom predstavuje zásobník energie, v tlmiči sa, naopak, energia stráca. Vlastnosti prvkov, vyjadrené matematicky, sú uvedené v Tab. 2.3.

Tab. 2.3 Prehľad základných prvkov translačného mechanického obvodu a príslušné prenosové funkcie

Prvok obvodu	Sila-rýchlosť (analógia $m - L$)	Sila-dráha (analógia $m - C$)	Mechanická impedancia $Z_M(s) = \frac{F(s)}{X(s)}$
Pružina 	$f(t) = k \int_0^t v(\tau) d\tau$	$f(t) = k x(t)$	$Z_{Mk}(s) = k$
Tlmič (viskózný) 	$f(t) = b v(t)$	$f(t) = b \frac{dx(t)}{dt}$	$Z_{Mb}(s) = bs$
Hmota 	$f(t) = m \frac{dv(t)}{dt}$	$f(t) = m \frac{d^2 v(t)}{dt^2}$	$Z_{Mm}(s) = \frac{1}{ms}$

V porovnaní s vlastnosťami prvkov elektrického obvodu (Tab. 2.1) vidíme, že:

a) pri porovnaní stĺpcov **Sila-rýchlosť** a **Napätie-prúd** dostávame tzv. **$m - L$** analógiu medzi elektrickým a mechanickým systémom:

- mechanická sila odpovedá elektrickému napätiu $f(t) \sim u(t)$
- rýchlosť telesa zodpovedá elektrickému prúdu $v(t) \sim i(t)$
- pružina je analogická kondenzátoru $k \sim C$
- viskózne tlmenie zodpovedá elektrickému odporu $b \sim R$
- hmotnosť je ekvivalentná s indukčnosťou $m \sim L$

V tomto prípade v mechanickom obvode suma síl ako funkcia rýchlosti zodpovedá sume napätí v slučke, ktorou preteká prúd. Výsledná diferenciálna rovnica translačného mechanického obvodu je ekvivalentná diferenciálnej rovnici prúdu v slučke.

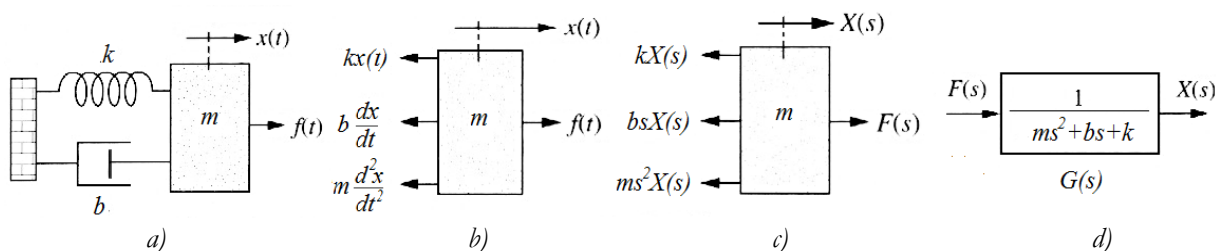
b) pri porovnaní stĺpcov **Sila-dráha** a **Prúd-napätie** je analógia **$m - C$** medzi elektrickým a mechanickým systémom nasledovná (opačná voči predchádzajúcemu prípadu):

- pružina je analogická indukčnosti $k \sim L$
- viskózný tlmič zodpovedá odporu $b \sim R$
- hmotnosť je analogická s kondenzátorom $m \sim C$

V tomto prípade suma síl ako funkcia rýchlosti je ekvivalentná sume prúdov závisiacich od napätí. Výsledné diferenciálne rovnice translačného mechanického obvodu sú analogické diferenciálnym rovniciam zostaveným pre uzlové napätia.

Uvedené analógie medzi elektrickými a mechanickými obvodmi sú bližšie diskutované v podkap. 2.6.

Nájďme prenosovú funkciu najjednoduchšieho mechanického obvodu, kde teleso o hmotnosti m je upevnené na pružine a tlmiči (Obr. 2.7a). Ako si ukážeme, výsledná diferenciálna rovnica je analogická diferenciálnej rovnici sériového RLC obvodu.



Obr. 2.6 Teleso s jedným stupňom voľnosti: a) kinematická schéma; b) rozklad síl v časovej oblasti; c) rozloženie síl znázornené v operátorovej oblasti; d) prenos systému

Pri riešení rozkreslíme sily pôsobiace na teleso (Obr. 2.7b, c) a pomocou Newtonovho zákona:

$$f_m(t) = m a(t) = m \frac{dv(t)}{dt} = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \quad (2.21)$$

napišeme rovnicu rovnováhy síl (pohybovú rovnicu):

$$f_m(t) + f_b(t) + f_c(t) = f(t) \quad (2.22)$$

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t) \quad (2.23)$$

čo. v Laplaceovej transformácii má tvar:

$$ms^2 X(s) + bsX(s) + kX(s) = F(s) \quad (2.24)$$

Ak vstupom je sila $F(s)$, výstupom dráha telesa $X(s)$, potom prenosová funkcia systému $G(s)$ je:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \quad (2.25)$$

Jednotlivé zložky v rovnici (2.25) predstavujú sily od hmotnosti, tlmiča a pružiny:

$$F_m(s) = ms^2 X(s) \quad F_b(s) = bs X(s) \quad F_c(s) = k X(s) \quad (2.26)$$

Ak tieto výrazy porovnáme s odpovedajúcimi výrazmi v rovnici (2.3) a uvažujeme tiež impedanciu v rovnici (2.5), potom dostávame ekvivalentné „mechanické impedancie“ $Z_M(s)$ a to pre hmotnosť $Z_{Mm}(s)$, tlmič $Z_{Mb}(s)$ a pružinu $Z_{Mc}(s)$:

$$Z_{Mm}(s) = ms^2 \quad Z_{Mb}(s) = bs \quad Z_{Mc}(s) = k \quad (2.27)$$

Index „M“ v impedancii zdôrazňuje, že ide o „mechanickú impedanciu“ (tento výraz sa bežne nepoužíva). Výsledná mechanická impedancia $Z_M(s)$ telesa je daná súčtom:

$$Z_M(s) = Z_{Mm}(s) + Z_{Mb}(s) + Z_{Mc}(s) = ms^2 + bs + k \quad (2.28)$$

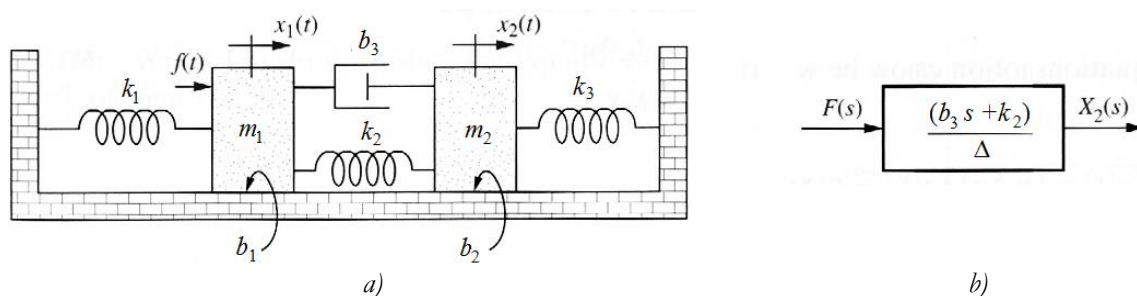
takže sumu síl pôsobiacich na teleso môžeme vyjadriť pomocou mechanickej impedancie telesa a jeho dráhy:

$$F(s) = Z_M(s) X(s) \quad (2.29)$$

čo slovami zapíšeme:

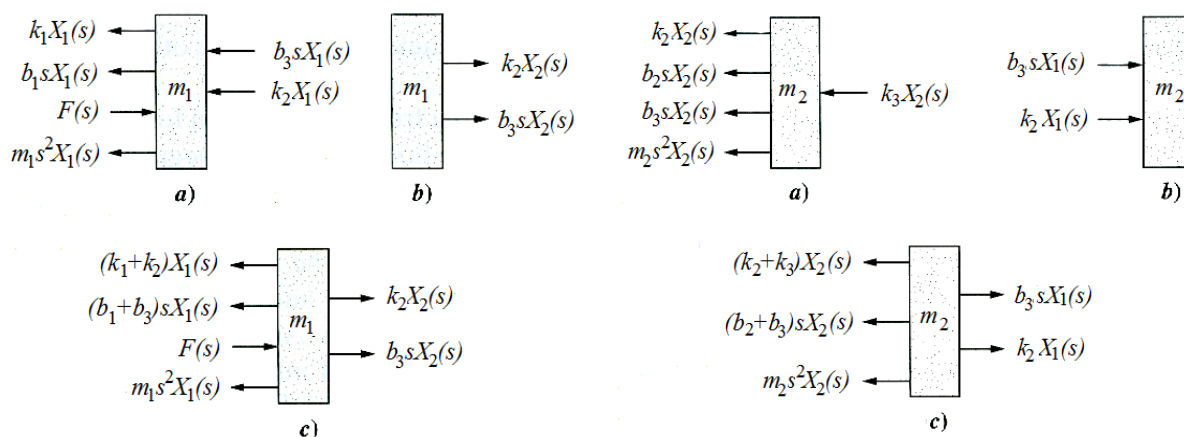
$$(suma impedancií telesa) \cdot X(s) = suma budiacich síl \quad (2.30)$$

Zovšeobecňujeme tieto poznatky pre zložitejší mechanický systém (system s dvoma stupňami voľnosti na Obr. 2.7a, [2]). Počet stupňov voľnosti je určený súčtom možných pohybov každého telesa, ak ostatné telesá sú v pokoji. Počet stupňov voľnosti je rovný počtu nezávislých diferenciálnych rovníc, ktoré vieme zostaviť pre mechanický systém.



Obr. 2.7 Mechanický systém s dvoma stupňami voľnosti

Pre zistenie vplyvu jednotlivých síl v systéme použijeme metódu uvoľnenia - osamotníme každé teleso a nakreslíme na ňu pôsobiace sily (silový diagram, Obr. 2.8).



Prehľad síl pôsobiacich na prvé teleso

Prehľad síl pôsobiacich na druhé teleso

Obr. 2.8 Sily pôsobiace na jednotlivé telesá: a) sily pôsobiace vlastné teleso v dôsledku jeho pohybu; b) sily pôsobiace na vlastného teleso v dôsledku pohybu susedného telesa; c) všetky sily pôsobiace na dané teleso

Zostavíme pohybové rovnice v Laplaceovej transformácii:

$$[m_1s^2 + (b_1 + b_3)s + (k_1 + k_3)]X_1(s) - (b_3s + k_2)X_2(s) = F(s) \quad (2.31)$$

$$- (b_1s + k_2)X_1(s) + [m_2s^2 + (b_2 + b_3)s + (k_2 + k_3)]X_2(s) = 0 \quad (2.32)$$

V týchto dvoch rovniciach sú neznámymi dráhy telies $X_1(s)$ a $X_2(s)$. Vyriešime ich niektorou z metód riešenia lineárnych rovníc (pomocou Cramerovho pravidla, alebo dosadením z jednej

rovnice do druhej). Ak vstupom systému je sila $F(s)$ a výstupom je dráha druhého telesa $X_2(s)$ potom prenosová funkcia je (Obr. 2.7b):

$$G(s) = \frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{b_3s + k_2}{\Delta} \quad (2.33)$$

kde Δ je determinant sústavy:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_1s^2 + (b_1 + b_3)s + (k_1 + k_3) & -(b_3s + k_2) \\ (b_1s + c_2) & m_2s^2 + (b_2 + b_3)s + (k_2 + k_3) \end{vmatrix} \quad (2.34)$$

Pre vyriešenie determinantu opäť s výhodou využijeme symbolický počet v MATLAbE. Rovnice (2.33) a (2.34) môžeme, analogicky k rovniciam elektrického obvodu (2.8) a (2.9), zapísať slovne:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} \text{Suma impedancií} \\ \text{pripojených} \\ \text{k telesu 1} \end{array} \right] X_1(s) - \left[\begin{array}{c} \text{Suma impedancií} \\ \text{medzi} \\ \text{telesami 1 a 2} \end{array} \right] X_2(s) &= \left[\begin{array}{c} \text{Suma síl} \\ \text{pôsobiacich} \\ \text{na teleso 1} \end{array} \right] \quad (2.35) \\ - \left[\begin{array}{c} \text{Suma impedancií} \\ \text{medzi} \\ \text{telesami 1 a 2} \end{array} \right] X_1(s) + \left[\begin{array}{c} \text{Suma impedancií} \\ \text{pripojených} \\ \text{k telesu 2} \end{array} \right] X_2(s) &= \left[\begin{array}{c} \text{Suma síl} \\ \text{pôsobiacich} \\ \text{na teleso 2} \end{array} \right] \quad (2.36) \end{aligned}$$

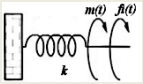
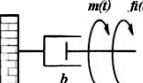
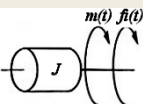
2.4.1 Prenos rotačného mechanického systému

Rotačné mechanické systémy sa riešia podobne ako translačné systémy:

- sila sa nahradí momentom $f(t) \sim m(t)$
- translačná rýchlosť sa nahradí uhlovou rýchlosťou ... $v(t) \sim \omega(t)$
- dráha sa nahradí uhlom natočenia $x(t) \sim \theta(t)$

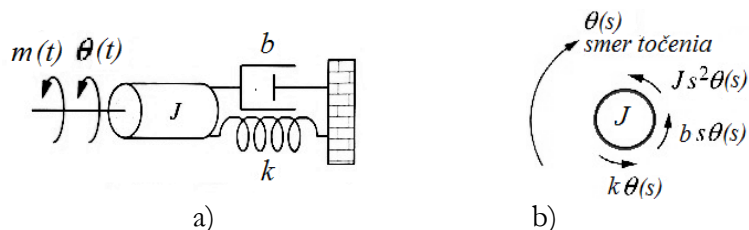
Aj pasívne prvky rotačného systému sú ekvivalentné pasívnym prvkom translačného systému: torzná pružina s koeficientom pružnosti k , torzný viskózný tlmič s koeficientom viskózneho tlmenia b a moment zotrvačnosti J . Ako budiaci signál (vstupná veličina) tu vystupuje moment $m(t)$. Vlastnosti prvkov, vyjadrené matematicky, sú uvedené v Tab. 2.4.

Tab. 2.4 Prehľad základných prvkov rotačného mechanického obvodu a príslušné prenosové funkcie

Prvok obvodu	Sila-rýchlosť (analógia $m - L$)	Sila-dráha (analógia $m - C$)	Impedancia $Z_M(s) = \frac{F(s)}{X(s)}$
Torzná pružina 	$m(t) = k \int_0^t \omega(\tau) d\tau$	$m(t) = k \theta(t)$	$Z_{Mk}(s) = k$
Torzný tlmič (viskózný) 	$m(t) = b \omega(t)$	$m(t) = b \frac{d\theta(t)}{dt}$	$Z_{Mb}(s) = bs$
Moment zotrvačnosti 	$m(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$	$m(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	$Z_{Mm}(s) = \frac{1}{Js}$

Počet stupňov voľnosti rotačného systému zistíme zo súčtu počtu telies, ktoré sa otáčajú, zatiaľ, čo ostatné sú v pokoji. Takto postupne preveríme celý systém.

Odvodíme prenosovú funkciu rotačného telesa, ktoré je pripojené k pevnej podložke cez torznú pružinu paralelne s torzným tlmičom (Obr. 2.9a), na ktoré pôsobí moment $m(t)$.



Obr. 2.9 Mechanický rotačný systém s jedným stupňom voľnosti

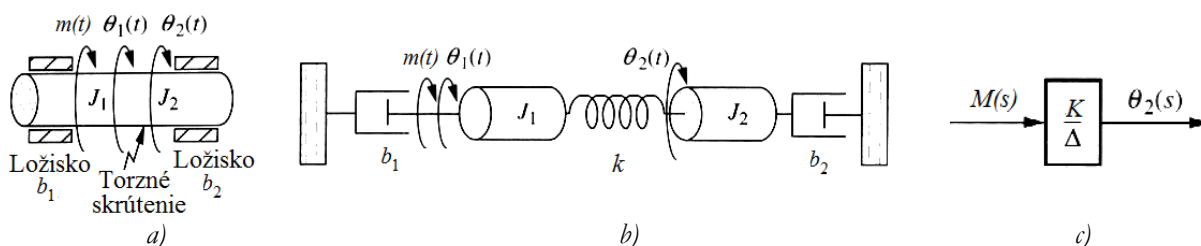
Pred zostavením pohybových rovníc analyzujeme pôsobenie jednotlivých momentov (Obr. 2.9b):

$$Js^2\theta(s) + b_1s\theta(s) + k\theta(s) = M(s) \quad (2.37)$$

Odkiaľ prenosová funkcia je:

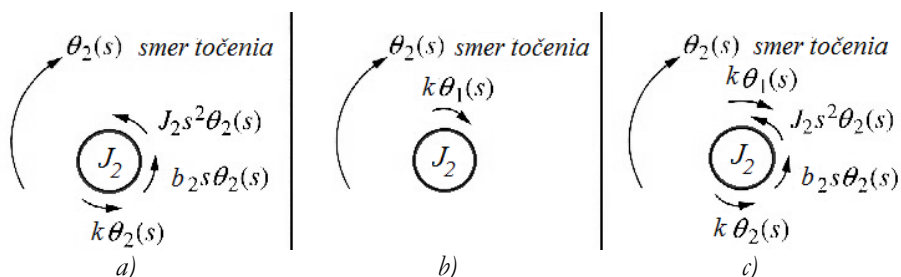
$$\frac{\theta(s)}{M(s)} = \frac{1}{Js^2 + bs + k} \quad (2.38)$$

Pre zovšeobecnenie poznatkov zvolíme systém s dvoma stupňami voľnosti (Obr. 2.10a). Dve zotrvačné telesá sú spojené torznou pružinou. Obe telesá sú uložené v ložiskách, ktoré predstavujú viskózne tlmiče (Obr. 2.10b).



Obr. 2.10 Rotačný mechanický systém s dvoma stupňami voľnosti

Pred zostavením pohybových rovníc rozkreslíme každé teleso zvlášť a zakreslíme momentové pôsobenie ostatných rotačných telies na dané teleso metódou uvoľnenia (Obr. 2.11).



Obr. 2.11 Pôsobenie momentov na prvé teleso: a) momenty pôsobiace na prvé teleso v dôsledku pohybu iba toho telesa; b) momentové pôsobenie druhého telesa na prvé; c) výsledný momentový diagram

Pre momentovú rovnováhu prvého a druhého telesa napíšeme rovnice, ktoré upravíme do tvaru:

$$(J_1s^2 + b_1s + k) \theta_1(s) - k\theta_2(s) = M(s) \quad (2.39)$$

$$-k\theta_2(s) + (J_2s^2 + b_2s + k) \theta_2(s) = M(s) \quad (2.40)$$

Riešením sústavy lineárnych rovníc vypočítame $\theta_2(s)$, odkiaľ dostaneme prenosovú funkciu:

$$G(s) = \frac{\theta_2(s)}{M(s)} = \frac{K}{\Delta} \quad (2.41)$$

(viď Obr. 210c), kde Δ je determinant sústavy rovníc (2.32) a (2.33)

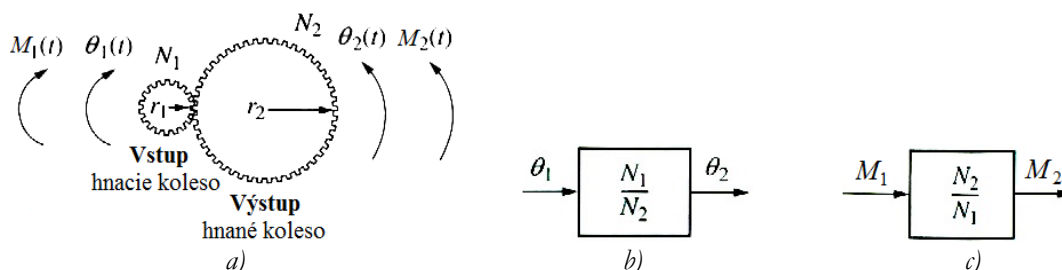
$$\Delta = \begin{vmatrix} J_1 s^2 + b_1 s + k & -k \\ -k & J_2 s^2 + b_2 s + k \end{vmatrix} \quad (2.42)$$

Ako v predchádzajúcich prípadoch, tak aj teraz môžeme zapísať pravidlo pre zostavovanie rovníc:

$\left[\begin{array}{c} \text{Suma impedancií} \\ \text{pripojených} \\ \text{k telesu 1} \end{array} \right] \theta_1(s) - \left[\begin{array}{c} \text{Suma impedancií} \\ \text{medzi} \\ \text{telesami 1 a 2} \end{array} \right] \theta_2(s) = \left[\begin{array}{c} \text{Suma momentov} \\ \text{pôsobiacich} \\ \text{na teleso 1} \end{array} \right]$	(2.43)
$- \left[\begin{array}{c} \text{Suma impedancií} \\ \text{medzi} \\ \text{telesami 1 a 2} \end{array} \right] \theta_1(s) + \left[\begin{array}{c} \text{Suma impedancií} \\ \text{pripojených} \\ \text{k telesu 2} \end{array} \right] \theta_2(s) = \left[\begin{array}{c} \text{Suma momentov} \\ \text{pôsobiacich} \\ \text{na teleso 2} \end{array} \right]$	(2.44)

2.4.2 Prenos rotačného mechanického systému s prevodovkou

Rotačné mechanické systémy často obsahujú prevodovku, ktorú môžeme riešiť ako bezstratovú, alebo do modelu zahrnúť aj je straty. Najprv uvažujeme ideálnu lineárnu prevodovku bez vôle v zuboch. Jednostupňová prevodovka je principiálne nakreslená na Obr. 2.12a.



Obr. 2.12 Jednostupňová prevodovka: a) náčrtok; b) prenos medzi uhlami natočenia vstupného a výstupného hriadeľa (dtto platí pre uhlovú rýchlosť); c) prevod medzi vstupným a výstupným momentom

Obvodová rýchlosť na obvodě obidvoch ozubených kôl je rovnaká $v_1 = v_2$ a keďže $v = r\theta$, a tiež $\omega = \dot{\theta}$, pre prevod prevodovky (Obr. 2.12b) môžeme odvodiť:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{N_2}{N_1} = j \quad (2.45)$$

kde j je prevodový pomer. Pri prevode do pomala je prevod $j > 1$ a naopak.

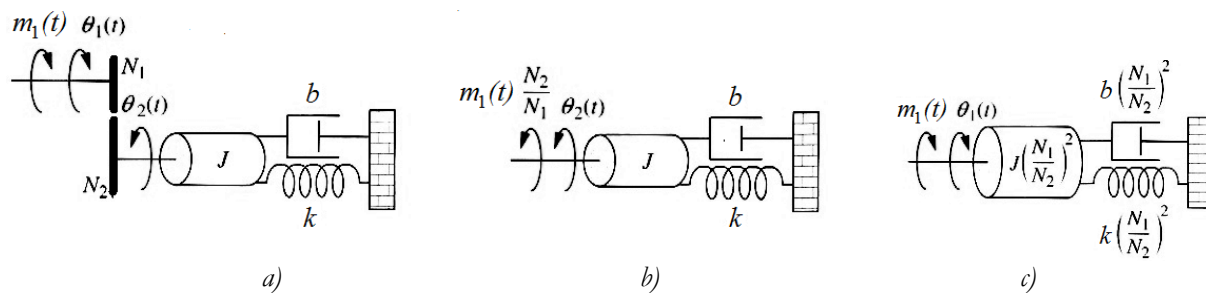
Vzťah medzi vstupným a výstupným momentom odvodíme na základe zachovania výkonu na vstupnej a výstupnej strane ($P = M\omega$):

$$M_1 \omega_1 = M_2 \omega_2 \quad (2.46)$$

odkiaľ vyplýva, že moment na hriadeľi je priamo úmerný počtu zubov príslušného ozubeného kola prevodovky (Obr. 2.12c):

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{N_2}{N_1} = j \quad (2.47)$$

V ďalšom vyšetříme, ako sa mení mechanická impedancia mechanického systému pri uvažovaní prevodovky (Obr. 2.13).



Obr. 2.13 Postupný prepočet mechanickej impedancie z výstupného hriadeľa cez prevodovku na vstupný hriadeľ

Moment na výstupnej strane prevodovky je:

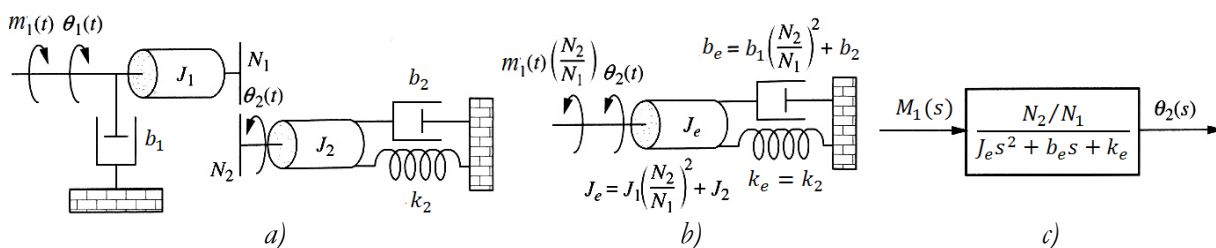
$$M_2(s) = j M_1(s) = (Js^2 + bs + k) \theta_1(s) \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = (Js^2 + bs + k) \frac{\theta_1(s)}{j^2} \quad (2.48)$$

Z tejto rovnice vyjadríme vzťah medzi momentom M_1 a odpovedajúcim uhlom natočenia θ_1 :

$$M_1(s) = (Js^2 + bs + k) \frac{\theta_1(s)}{j^2} = \left(\frac{J}{j^2}s^2 + \frac{b}{j^2}s + \frac{k}{j^2}\right) \theta_1(s) \quad (2.49)$$

Tým sme prepočítali mechanickú impedanciu z výstupu (index 2) na vstup (index 1).

Nájďme prenosovú funkciu dvojhmotnostného mechanického systému na Obr. 2.14a, ktorý je budený momentom M_1 , pričom výstupom zo systému je uhol natočenia výstupného hriadeľa θ_2 , t.j. $G(s) = \theta_2(s)/M_1(s)$.



Obr. 2.14 Postupný výpočet prenosovej funkcie mechanického systému

Prepočítajme impedancie zo vstupného hriadeľa na výstupný násobením prevodom j^2 a tiež moment zo vstupného hriadeľa na výstupný násobením prevodom j :

Pohybová rovnica pre výstupný hriadeľ je (Obr. 2.14b):

$$M_2(s) = M_1(s)j = (J_e s^2 + b_e s + k_e) \theta_2(s) \quad (2.50)$$

kde jednotlivé parametre s indexom e predstavujú ekvivalentný moment zotrvačnosti J_e na druhom hriadeľi, ekvivalentný koeficient tlmenia b_e a ekvivalentný koeficient pružnosti k_e :

$$J_e = J_1 j^2 + J_2; \quad b_e = b_1 j^2 + b_2; \quad k_e = k_2 \quad (2.51)$$

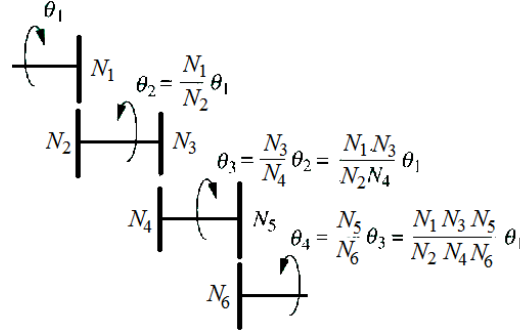
Dosadením do rovnice (2.50) dostaneme hľadaný prenos (Obr. 2.15c):

$$G(s) = \frac{\theta_2(s)}{M_1(s)} = \frac{N_2/N_1}{J_e s^2 + b_e s + k_e} \quad (2.52)$$

čo je znázornené blokom na Obr. 2.14c.

V prípade, ak sa požaduje veľký prevodový pomer medzi vstupným a výstupným hriadeľom, príslušné ozubené koleso by bolo veľmi veľké, čo by zhoršovalo dynamiku systému (t.j. malo by veľký moment zotrvačnosti, ktorý sa zväčšuje so štvrtou mocninou priemeru rotačného telesa). Preto sa používa viacstupňová prevodovka, ktorá obsahuje viac dvojíc menších ozubených kôl (Obr. 2.15) a výsledný prevod získame súčinom jednotlivých prevodov, $j = j_1 j_2 j_3$:

$$\theta_4 = \frac{N_1 N_3 N_5}{N_2 N_4 N_6} \theta_1 = \frac{1}{j_1} \frac{1}{j_2} \frac{1}{j_3} \theta_1 = \frac{1}{j} \theta_1 \quad (2.53)$$



Obr. 2.15 Viacstupňová prevodovka

V skutočnosti mechanické prevodovky nie sú ideálne, bezstratové, ale každá prevodovka má mechanické straty viskóznym trením, čím sa znižuje účinnosť prevodovky.

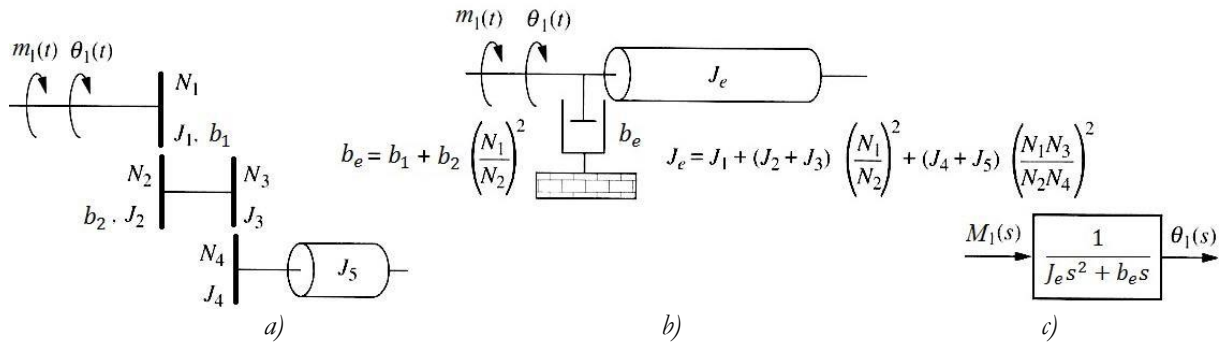
Nájďme prenosovú funkciu dvojhmotnostného systému s prevodovkou podľa Obr. 2.16a, pričom v ložiskách vstupného hriadeľa je viskózne trenie b_1 a v prevodovke uvažujeme so stratami na druhom stupni, vyjadrenými tlmením b_2 .

Zavedieme mechanické impedancie, ktoré prepočítame na vstupný hriadeľ, θ_1 . Pri ich prepočte musíme uvažovať tiež príslušný prevodový pomer; takto tlmenie b_2 prepočítame cez prevod $b_2(N_1/N_2)^2 = b_2/j^2$. Momenty zotrvačnosti J_3 a J_4 prepočítavame cez dva prevody (Obr. 2.16b):

$$(J_4 + J_5) \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4} \right)^2 = (J_4 + J_5) \frac{1}{(j_1 j_2)^2} \quad (2.54)$$

Dosadíme do pohybovej rovnice:

$$(J_e s^2 + b_e s) \theta_1(s) = M_1(s) \quad (2.55)$$



Obr. 2.16 Výpočet prenosovej funkcie $G(s) = \theta_2(s)/M_1(s)$ dvojhmotnostného systému s ideálnou prevodovkou

kde indexom e sú označené ekvivalentné veličiny:

$$J_e = J_1 + (J_2 + J_3) \frac{1}{j_1^2} + (J_4 + J_5) \frac{1}{(j_1 j_2)^2}; \quad b_e = b_1 + b_2 \frac{1}{j_1^2} \quad (2.56)$$

Po dosadení do rov. (2.55) vypočítame hľadanú prenosovú funkciu (Obr. 2.16c):

$$G(s) = \frac{\theta_1(s)}{M_1(s)} = \frac{1}{J_e s^2 + b_e s} = \frac{1}{s(J_e s + b_e)} \quad (2.57)$$

2.5 Prenosová funkcia elektromechanického systému

Elektromechanický systém pozostáva z elektrického a mechanického pod systému, pričom existencia každého z nich osamotene nemá význam (len spoločne vykonávajú užitočnú činnosť) a v mnohých prípadoch sa tieto pod systémy ani nedajú navzájom oddeliť. Typickým predstaviteľmi takých systémov sú elektrické motory, ktorých vstupnou veličinou je elektrické napätie a na výstupe je mechanická veličina: moment, uhlová rýchlosť, príp. uhol natočenia, resp. pri lineárnych elektrických motoroch je to sila, rýchlosť a posunutie (dráha).

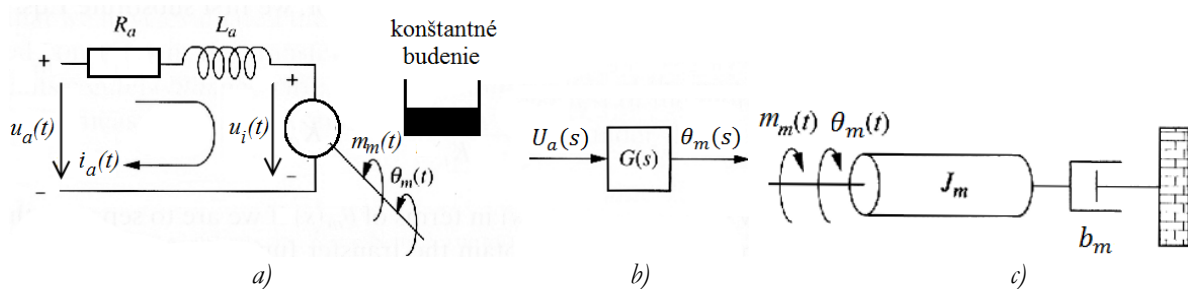
V podstate každý elektrický stroj pracuje na rovnakom princípe napájacie napätie napája vinutia motora (reprezentované odporom, indukčnosťou a zdrojom protinapätia), v ktorých sa vytvára magnetické pole.

Vzájomným pôsobením magnetických polí rotora a statora dochádza ku otáčaniu rotora. Z veličín magnetického poľa sa vytvára moment, pôsobiaci na mechanickú časť motora reprezentovanú momentom zotrvačnosti a pripojeným mechanizmom. Výstupná veličina motora (uhlová rýchlosť) cez spätnú väzbu ovplyvňuje elektrické obvody (t.j. zdroj protinapätia).

Jedným z najjednoduchších motorov z hľadiska modelovania je jednosmerný motor s permanentnými magnetmi, príp. cudzobudený obsahujúci navyše aj budiace vinutie statora.

Prenos motora

Zachovajúc vyššie uvedený postup pri odvodení prenosov mechanických obvodov, kde sme uvažovali s uhlom natočenia θ , odvodíme prenos jednosmerného cudzobudeného motora s konštantným budením vrátane viskózneho trenia (Obr. 2.17a).



Obr. 2.17 J jednosmerný cudzobudený motor s uvažovaním momentu zotrvačnosti pracovného mechanizmu

Pri otáčaní rotora vzniká indukované napätie, ktoré je úmerné veľkosti magnetického toku a uhlovej rýchlosti motora (= derivácii uhla natočenia rotora):

$$U_i(s) = c\Phi \omega_m(s) = c\Phi s \theta_m(s) \quad (2.58)$$

Pre obvod rotora, pozostávajúceho zo sériového zapojenia odporu, indukčnosti a zdroja protinapätia platí podľa II. Kirchhoffovho zákona rovnica:

$$R_a I_a(s) + L_a s I_a(s) + U_i(s) = U_a(s) \quad (2.59)$$

Súčin magnetického toku a prúdu dáva elektromagnetický moment motora:

$$M_m(s) = c\Phi I_a(s) \quad (2.60)$$

odkiaľ vyjadríme prúd $I_a(s)$ a spolu s rov. (2.60) dosadíme do rov. (2.61):

$$\frac{(R_a + L_a s) M_m(s)}{c\Phi} + c\Phi s \theta_m(s) = U_a(s) \quad (2.61)$$

Rotor má moment zotrvačnosti J_m a viskózne tlmenie b_m . Jeho pohybová rovnica je:

$$M_m(s) = (J_m s^2 + b_m s) \theta_m(s) \quad (2.62)$$

Po dosadení za moment motora do rovnice (2.62) dostaneme:

$$\frac{(R_a + L_a s)(J_m s^2 + b_m s)}{c\Phi} \theta_m(s) + c\Phi s \theta_m(s) = U_a(s) \quad (2.63)$$

V skutočnosti indukčnosť kotvy L_a je oveľa menšia ako odpor R_a takže ju môžeme zanedbať:

$$\left[\frac{R_a}{c\Phi} (J_m s + b_m) + c\Phi \right] s \theta_m(s) = U_a(s) \quad (2.64)$$

Hľadaná prenosová funkcia je:

$$G(s) = \frac{\theta_m(s)}{U_a(s)} = \frac{\frac{c\Phi}{R_a J_m}}{s \left[s + \frac{1}{J_m} \left(b_m + \frac{(c\Phi)^2}{R_a} \right) \right]} \quad (2.65)$$

Ide o integračnú sústavu I. rádu s prenosom:

$$G(s) = \frac{K}{s(s + \alpha)} \quad (2.66)$$

Ak výstupnou veličinou je uhlová rýchlosť motora $s \theta_m(s) = \omega_m(s)$, potom prenos motora je:

$$G(s) = \frac{\omega_m(s)}{U_a(s)} = \frac{\frac{c\Phi}{R_a J_m}}{s + \frac{1}{J_m} \left[b_m + \frac{(c\Phi)^2}{R_a} \right]} \quad (2.67)$$

čo predstavuje proporcionálnu sústavu I. rádu.

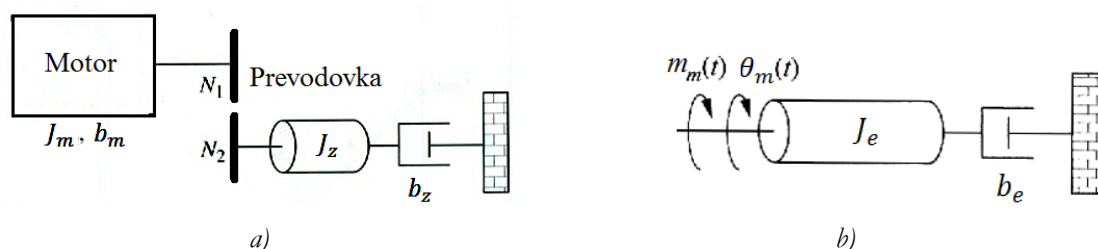
Poznámka: ak by sme nezanedbali indukčnosť L_a , potom predchádzajúci prenos sa rozšíri nasledovne:

$$G(s) = \frac{\omega_m(s)}{U_a(s)} = \frac{\frac{c\Phi}{R_a J_m}}{(1 + sT_a)s + \frac{1}{J_m} \left[(1 + sT_a)b_m + \frac{(c\Phi)^2}{R_a} \right]} \quad (2.68)$$

t.j., o.i. sa zvýši rád sústavy. T_a v rovnici (2.68) predstavuje časovú konštantu kotvy motora $T_a = L_a/R_a$.

Prenos motora s prevodovkou

Uvažujme motor s momentom zotrvačnosti J_m a tlmením rotora b_m , ktorý cez prevodovku s prevodom j poháňa pracovný mechanizmus s momentom zotrvačnosti J_z a s tlmením b_z (Obr. 2.18a).



Obr. 2.18 Motor s prevodovkou a pracovným mechanizmom s momentom zotrvačnosti J_z

Prenosová funkcia bude formálne taká istá, ako v rovnici (2.68), avšak s uvažovaním ekvivalentného tlmenia a ekvivalentného momentu zotrvačnosti:

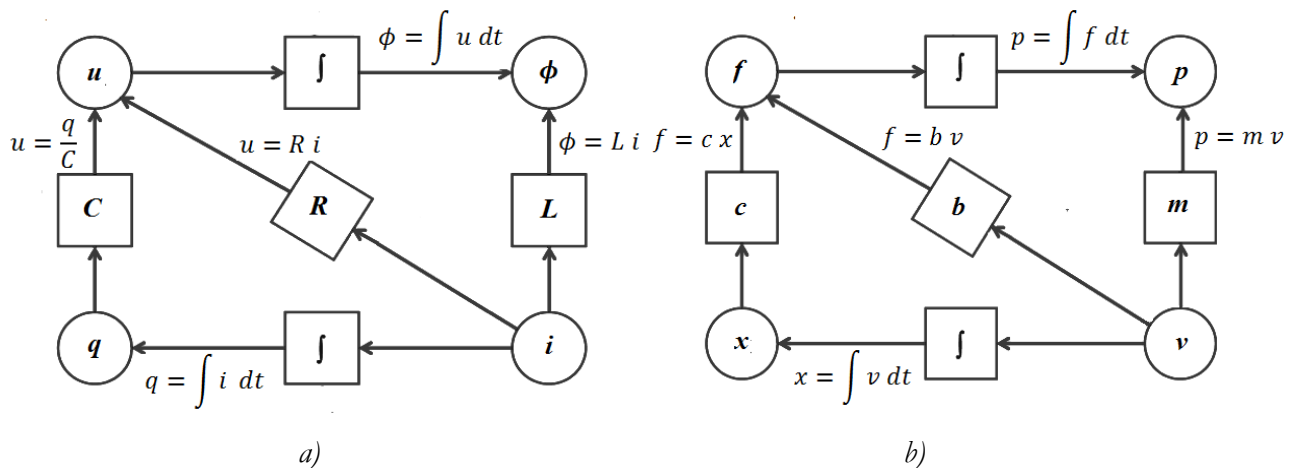
$$G(s) = \frac{\omega_m(s)}{U_a(s)} = \frac{\frac{c\Phi}{R_a J_e}}{s + \frac{1}{J_e} \left[b_e + \frac{(c\Phi)^2}{R_a} \right]} \quad (2.69)$$

kde (pozri obr. 2.18b):

$$J_e = J_m + \frac{J_z}{j^2} = J_m + J_z \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2; \quad b_e = b_m + \frac{b_z}{j^2} = b_m + b_z \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \quad (2.70)$$

2.6 Elektro-mechanická analógia

Ide o analógiu elektrických a mechanických obvodov. Elektromechanickými analógiami nazývame také elektrické a mechanické deje, ktoré majú rovnaké matematické, alebo aj grafické riešenia. Kritériom analógie je totožnosť matematického riešenia. Parametre a premenné elektrického obvodu možno prepočítať na parametre a premenné mechanického obvodu a naopak. Na základe uvedenej analógie možno zostaviť schému mechanického obvodu podobnú schéme elektrického obvodu. Kirchhoffove zákony v elektrickom obvode zodpovedajú pohybovým rovniciam v mechanickom obvode. Vzťahy pre vzájomný prepočet elektrických a odpovedajúcich mechanických veličín sú prehľadne uvedené na Obr. 2.19, [5].



Obr. 2.19 Všeobecná štruktúra pre prepočet elektrických (a) a mechanických (b) veličín

Rozoznávame dva druhy elektro-mechanickej analógie [5]:

- 1) sériová analógia (m-L), ak rovnice mechanického obvodu zodpovedajú rovniciam platným pre slučky v elektrickom obvode.
- 2) paralelná analógia (m-C), ak rovnice mechanického obvodu zodpovedajú rovniciam platným pre uzly.

2.6.1 Sériová analógia

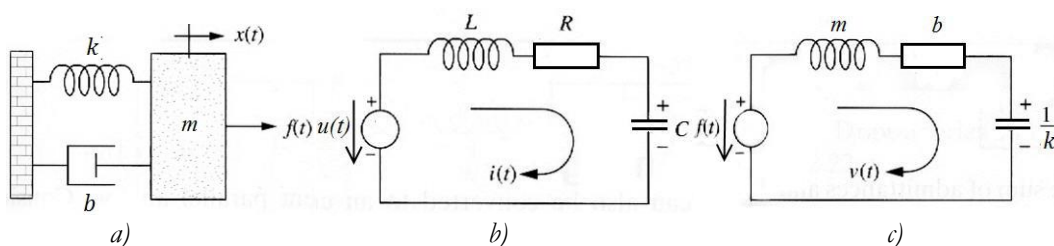
Ide tu o ekvivalenciu II. Kirchhoffovho zákona v slučke elektrického obvodu s d'Alambertovým zákonom pre mechanický obvod. Základné pravidlo sériovej analógie je vyjadrené v Tab. 2.5, kde je tiež vyjadrená analógiu energie magnetického poľa v indukčnosti a pohybovou energiou pohybujúceho sa telesa (odtiaľ tiež názov m-L analógia).

Tab. 2.5 Tabuľka sériovej (m-L) analógie

Sériová analógia (napätie-sila, m-L)	
Elektrický obvod	Mechanický obvod
$\sum_{\text{slučka}} \text{napätí} = 0$	$\sum_{\text{teleso}} \text{síl} = 0$
$\frac{1}{2} Li^2$	$\frac{1}{2} mv^2$

Mechanický obvod (závažie na pružine s tlmičom) na Obr. 2.20a je popísaný rovnicou (2.24), ktorú upravíme tak, aby miesto dráhy sa v nej vyskytovala rýchlosť $v = dx/dt$, t.j. $V(s) = sX(s)$:

$$(ms^2 + bs + k) X(s) = \frac{(ms^2 + bs + k)}{s} sX(s) = \left(ms + b + \frac{k}{s} \right) V(s) = F(s) \quad (2.71)$$



Obr. 2.20 Ekvivalentné schémy mechanického a sériového elektrického obvodu

Pre slučkové napätie v sériovom RLC obvode podľa Obr. 2.20b môžeme podľa II. Kirchhoffovho zákona napísať rovnicu:

$$\left(Ls + R + \frac{1}{Cs} \right) I(s) = U(s) \quad (2.72)$$

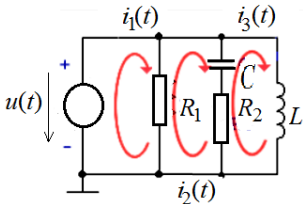
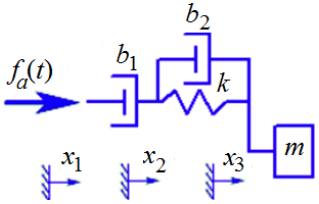
Podobne z rov- (2.71) môžeme zostaviť ekvivalentnú schému (Obr. 2.20c), ktorá platí pre mechanický obvod. Prehľad analogických mechanických a elektrických veličín a vzorcov je uvedený v Tab. 2.6.

Tab. 2.6 Ekvivalentné veličiny mechanickej a sériovej elektrickej analógie

Mechanická veličina		Elektrická veličina	
hmotnosť	$= m$	indukčnosť	$= L$
viskózne tlmenie	$= b$	odpor	$= R$
pružnosť	$= k$	kapacita	$= C$
sila	$= f(t)$	zdroj napätia	$= u(t)$
rýchlosť	$= v(t)$	slučkový prúd	$= i(t)$
Ďalšie (odvodené) veličiny			
dráha	$= x(t) = \int v(\tau) d\tau$	náboj	$= Q(t) = \int i(\tau) d\tau$
zrýchlenie	$= a(t)$	zmena prúdu	$= di(t)/dt$
pohybová energia	$= \frac{1}{2} m v^2(t)$	energia magnetického poľa	$= \frac{1}{2} L i^2(t)$
Potenciálna energia	$= \frac{1}{2} c f^2(t)$	energia elektrického poľa	$= \frac{1}{2} C u^2(t)$

Nedostatkom tejto analógie je, že je jednoduchá iba v prípade, ak cez indukčnosť tečie iba jeden prúd. Pri aplikácii tejto analógie každý elektrický obvod nahradíme mechanickým obvodom. Odpory nahradíme tlmiacimi členmi, kondenzátory mechanickými pružinami, indukčnosťami hmotnosťami, prúdové zdroje sa stanú vstupnou rýchlosťou a napäťové zdroje generátormi sily. Postup pri konverzii elektrického systému na ekvivalentný mechanický je prehľadne uvedený v Tab. 2.7.

Tab. 2.7 Postup pri prevode elektrického obvodu na ekvivalentný mechanický obvod pomocou m-L analógie

Krok riešenia	Výsledok
1) V elektrickom obvode označíme slučkové prúdy. Zvolíme ich tak, aby cez indukčnosť tiekol iba jeden prúd.	
2) Pre každú slučku napíšeme slučkové rovnice.	$\sum_{\text{slučka 1}} u = 0 = u_a + (i_2 - i_1) R_1$ $\sum_{\text{slučka 2}} u = 0 = (i_1 - i_2) R_1 + \frac{1}{C} \int (i_3 - i_2) dt + (i_3 - i_2) R_2$ $\sum_{\text{slučka 3}} u = 0 = \frac{1}{C} \int (i_2 - i_3) dt + (i_2 - i_3) R_2 - L \frac{di_3}{dt}$
3) Prepíšeme rovnice pomocou analógie.	$\sum_{x_1} f = 0 = f_a + (v_2 - v_1) b_1$ $\sum_{x_2} f = 0 = (v_1 - v_2) b_1 + k \int (v_3 - v_2) dt + (v_3 - v_2) b_2$ $\sum_{x_3} f = 0 = k \int (v_2 - v_3) dt + (v_2 - v_3) b_2 - m \frac{dv_3}{dt}$ $= k (x_2 - x_3) + (v_2 - v_3) b_2 + m a_3$
4) Nakreslíme mechanický systém, ktorý zodpovedá týmto rovniciam.	

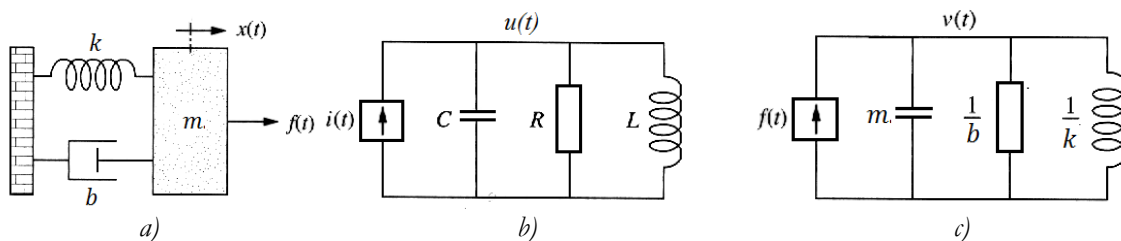
2.6.2 Paralelná analógia

Elektrický/mechanický obvod možno konvertovať tiež na paralelný obvod, čo je druhý prístupom ku elektro-mechanickej analógii. Základné pravidlo paralelnej analógie je vyjadrené v Tab. 2.8 – ide tu o ekvivalenciu I. Kirchhoffovho zákona v slučke elektrického obvodu s d'Alembertovým zákonom pre mechanický obvod. Je tu tiež vyjadrená energia elektrostátického poľa v kondenzátore, ktorá je ekvivalentná pohybovej energii pohybujúceho sa telesa (odtiaľ tiež názov m-C analógia).

Tab. 2.8 Tabuľka paralelnej (m-C) analógie

Paralelná analógia (prúd-sila, m-C)	
Elektrický obvod	Mechanický obvod
$\sum_{uzol} \text{prúdov} = 0$	$\sum_{teleso} \text{síl} = 0$
$\frac{1}{2}Cu^2$	$\frac{1}{2}mv^2$

Zostavme paralelnú analógiu jednoduchého mechanického obvodu na Obr. 2.21a.



Obr. 2.21 Vytvorenie paralelného obvodu: a) mechanický systém, b) požadovaný elektrický ekvivalent, c) paralelná analógia mechanického systému

Jeho pohybová rovnica je vyjadrená podľa rov. (2.73):

$$(ms^2 + bs + k)X(s) = \left(ms + b + \frac{k}{s}\right)V(s) = F(s) \quad (2.73)$$

Ak porovnáme túto rovnicu s rovnicou pre paralelný elektrický obvod zostavenou na základe aplikácie I. Kirchhoffovho zákona pre paralelný obvod na Obr. 2.23b:

$$\left(Ls + \frac{1}{R} + \frac{1}{Cs}\right)U(s) = I(s) \quad (2.74)$$

Vidíme, že suma admitancií v elektrickom obvode zodpovedá mechanickej impedancii mechanického obvodu. Konverzia je uvedená na Obr. 2.23c. Ekvivalentné parametre paralelných obvodov – elektrického a mechanického sú uvedené v Tab. 2.8.

Tab. 2.9 Ekvivalentné veličiny mechanickej a sériovej elektrickej analógie

Mechanická veličina		Elektrická veličina	
hmotnosť	$= m$	kapacita	$= C$
viskózne tlmenie	$= b$	vodivosť	$= 1/R$
pružnosť	$= k$	indukčnosť	$= L$
Sila	$= f(t)$	zdroj prúdu	$= v(t)$
rýchlosť	$= v(t)$	uzlové napätie	$= u(t)$

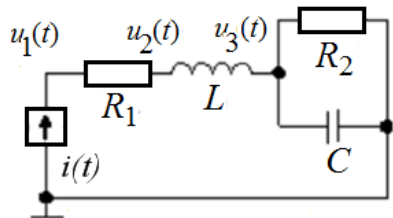
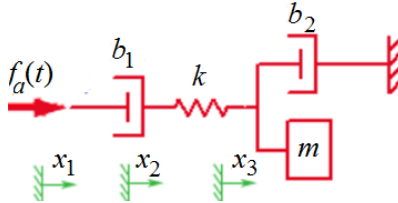
V prípade, ak mechanický systém má viac ako jeden stupeň voľnosti, jednotlivé mechanické prvky viazané pohybom sa v schéme ekvivalentnej schéme elektrického obvodu objavujú ako paralelné elektrické prvky pripojené k uzlu. Prvky dvoch susedných pohybů sa kreslia ako paralelné elektrické prvky pripojené ku dvom odpovedajúcim uzlom.

Nevýhodou tejto analógie je, že je priamo a jednoducho aplikovateľná na systémy, kde kondenzátor možno uzemniť. Toto vyplýva z analógie medzi energiou kondenzátora a energiou pohybujúceho sa telesa, ako analógie medzi elektrickým uzemnením, ktorého napätie je rovné nule a mechanickým „uzemnením“ (nemenná poloha).

Postup pri konverzii elektrického obvodu na ekvivalentný mechanický obvod

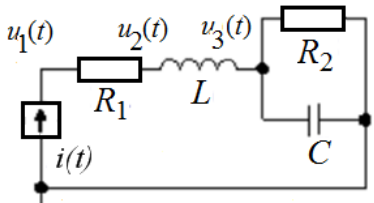
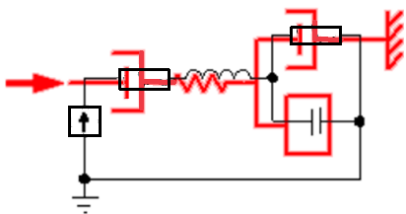
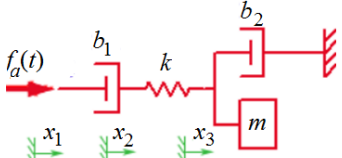
je prehľadne uvedený v Tab. 2.10. Kondenzátor je tu uzemnený (ak by nebol uzemnený, výsledkom je zložitejšie riešenie polohy v mechanickom systéme a riešenie si vyžaduje väčšiu pozornosť).

Tab. 2.10 Postup pri prevode elektrického obvodu na ekvivalentný mechanický obvod pomocou m-C analógie

Krok riešenia	Výsledok
1) V elektrickom obvode označíme jednotlivé uzly.	
2) Pre každý uzol napíšeme napät'ové rovnice.	$\sum_{\text{uzol } 1} i = 0 = i_a + \frac{u_2 - u_1}{R_1}$ $\sum_{\text{uzol } 2} i = 0 = \frac{u_1 - u_2}{R_1} + \frac{1}{L} \int (u_3 - u_2) dt$ $\sum_{\text{uzol } 3} i = 0 = \frac{1}{L} \int (u_2 - u_3) dt - \frac{u_3}{R_2} - C \frac{du_3}{dt}$
3) Na základe tabuľky analógie prepíšeme rovnice pomocou analógie, kde každý elektrický uzol bude nahradený polohou.	$\sum_{x_1} f = 0 = f_a + (v_2 - v_1) b_1$ $\sum_{x_2} f = 0 = (v_1 - v_2) b_1 + k \int (v_3 - v_2) dt + (v_3 - v_2) b_2$ $= (v_1 - v_2) b_1 + k (x_3 - x_2) + (v_3 - v_2) b_2$ $\sum_{x_3} f = 0 = k \int (v_2 - v_3) dt + v_3 b_2 - m \frac{dv_3}{dt}$ $= k (x_2 - x_3) + v_3 b_2 + m a_3$
4) Nakreslíme mechanický systém, ktorý zodpovedá týmto rovniciam.	

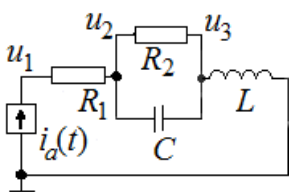
Iný spôsobom, ako získať schému mechanického obvodu priamo zo schémy elektrického obvodu, spočíva v priamom nahradení (prekreslení) elektrických prvkov ich mechanickými ekvivalentmi podľa Tab. 2.9. Postup je prehľadne vysvetlený v Tab. 2.11. Pri porovnaní výsledkov v Tab. 2.9 a Tab. 2.11 zistíme, že obe riešenia dávajú rovnaké výsledky.

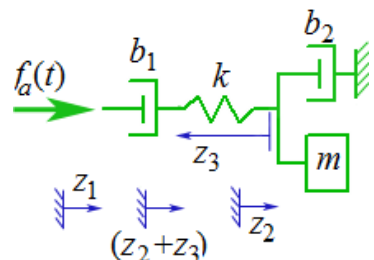
Tab. 2.11 Postup pri priamom prepise elektrického obvodu na mechanický pomocou m-C analógie

Krok riešenia	Výsledok
1) V elektrickom obvode označíme jednotlivé uzly.	
2) Každý prvok elektrického obvodu obvodom nahradíme jeho mechanickým ekvivalentom: prúdové zdroje zdrojmi síl, napät'ové zdroje zdrojmi rýchlosti, odpory tlmičmi, indukčnosti pružinou a kondenzátory (ktoré musia byť uzemnené) hmotnosťami. Každý uzol zodpovedá určitej polohe (alebo rýchlosti).	
3) Označíme prúdy, polohy a prvky mechanického obvodu tak, ako boli uvedené v pôvodnom elektrickom obvode.	

V uvedenom obvode bol kondenzátor uzemnený. V tomto prípade polohu telesa možno zvoliť ako absolútna poloha (v pomere ku zvolenému súradnicovému systému). Ak kondenzátor je uzemnený, potom musíme zaviesť relatívne polohy a riešenie je zložitejšie (Tab. 2.11). V nasledujúcom príklade riešime obvod s tou istou štruktúrou ako v predchádzajúcom príklade, ale v elektrickom obvode zameníme dve vetvy (Tab. 2.12). V podstate je to úplne rovnaký obvod, ale cez indukčnosť tečú dva vetvové prúdy.

Tab. 2.12 Postup pri priamom prepise elektrického obvodu na mechanický pomocou m-C analógie v prípade neuzemneného kondenzátora

Krok riešenia	Výsledok
1) V elektrickom obvode označíme jednotlivé uzly.	
2) Pre každý uzol napíšeme napät'ové rovnice.	$\sum_{uzol\ 1} i = 0 = i_a + \frac{u_2 - u_1}{R_1}$ $\sum_{uzol\ 2} i = 0 = \frac{u_1 - u_2}{R_1} + C \frac{d(u_3 - u_2)}{dt} + \frac{u_3 - u_2}{R_2}$ $\sum_{uzol\ 3} i = 0 = C \frac{d(u_2 - u_3)}{dt} + \frac{u_2 - u_3}{R_2} + \frac{1}{L} \int u_3 dt$

3) Na základe tabuľky analógie prepíšeme rovnice, pričom každý elektrický uzol bude nahradený polohou.	$\sum_{x_1} f = 0 = f_a + (v_2 - v_1) b_1$ $\sum_{x_2} f = 0 = (v_1 - v_2) b_1 + m \frac{d(v_3 - v_2)}{dt} + (v_3 - v_2) b_2 =$ $= (v_1 - v_2) b_1 + m (a_3 - a_2) + (x_3 - x_2) b_2$ $\sum_{x_3} f = 0 = m \frac{d(v_2 - v_3)}{dt} + (v_2 - v_3) b_2 - m \int v_3 dt$ $= m (a_2 - a_3) + (v_2 - v_3) b_2 + k x_3$
4) Táto sústava rovníc predstavuje problém, keďže zrýchlenie telesa o hmotnosti m nie je pevné vzhľadom ku súradnicovému systému, ale je pomerné. Môžeme to obísť zadefinovaním novej sústavy polôh.	$z_1 = x_1, \quad \dot{z}_1 = v_1, \ddot{z}_1 = a_1$ $z_2 = x_2 - x_3 \quad \dot{z}_2 = v_2 - v_3, \quad \ddot{z}_2 = a_2 - a_3$ $z_3 = x_3, \quad \dot{z}_3 = v_3, \ddot{z}_3 = a_3$
5) Použijúc tieto nové premenné v ďalšom prepíšeme pohybové rovnice	$\sum_{z_1} f = 0 = f_a + [(\dot{z}_2 + \dot{z}_3) - \dot{z}_1] b_1$ $\sum_{z_2} f = 0 = [z_1 - (\dot{z}_2 + \dot{z}_3)] b_1 - m \ddot{z}_2 - b_2 \dot{z}_2$ $\sum_{z_3} f = 0 = m \ddot{z}_2 + b_2 \dot{z}_2 - c z_3$
6) Nakreslíme mechanický systém, ktorý zodpovedá týmto rovniciam, kde však: $x_2 = z_2 + z_3$, $z_2 + z_3 - z_1 = x_2 - x_1$ Poloha z_3 zodpovedá predĺženiu pružiny. Poloha na ľavej strane pružiny a koeficient tlmenia b_2 je známy iba vzhľadom ku polohe z_2 vo vzdialenosti od telesa s hmotnosťou m.	

Vidíme, že štruktúra výsledného systému je taká istá, ako v predchádzajúcom prípade (v inom súradnicovom systéme, ktorý bol zostavený pre prípad, že cez indukčnosť tečie iba jeden prúd).

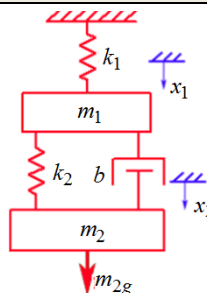
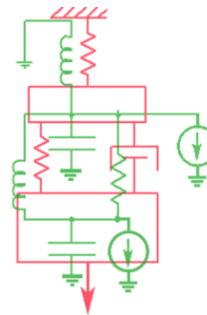
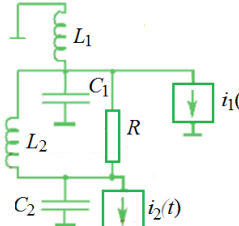
Postup pri konverzii mechanického obvodu (sila-prúd) na ekvivalentný elektrický obvod

Tento postup, prehľadne uvedený v Tab. 2.12 je opačným ku práve popísanému riešeniu: buď to riešime matematicky, alebo graficky, nahradením ekvivalentných prvkov obvodu presne v opačnom poradí, ako tou bolo pri prepise elektrického obvodu na mechanický:

- zdroje sily nahradíme prúdovými zdrojmi,
- trecie elementy nahradíme odpormi a
- hmotnosti nahradíme kondenzátormi (ktoré musia byť uzemnené!).

Každá poloha sa stáva uzlom obvodu.

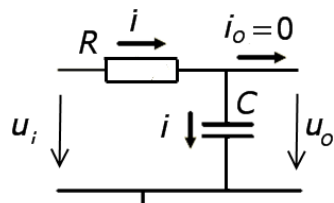
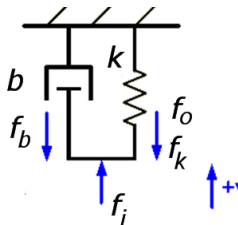
Tab. 2.13 Postup pri zostavení schémy elektrického obvodu
ekvivalentného ku mechanickému obvodu

Krok riešenia	Výsledok
1) V mechanickom systéme vyznačíme jednotlivé polohy.	
2) Cez mechanický obvod nakreslíme elektrický tak, že mechanické prvky nahradíme ich elektrickými ekvivalentmi: • zdroje sily ↔ zdrojmi prúdu, • vstupné rýchlosti ↔ napäťovými zdrojmi, • trecie prvky ↔ odpormi, • pružiny ↔ indukčnosťami, • telesá ↔ kondenzátormi (t.j. hmotnosti kapacitami), ktoré musia byť uzemnené).	
3) Nakoniec označíme uzly a elektrického systému takými indexmi, ako majú odpovedajúce prvky pôvodného mechanického systému.	

2.6.3 Príklady na jednoduché obvody elektro-mechanickej analógie

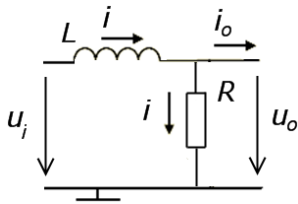
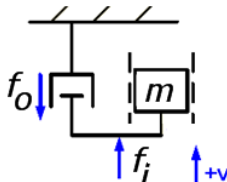
Príklad 1:

Tab. 2.14

Elektrický obvod – RC filter	Mechanický obvod – tlmič a pružina
	
$u_i - u_R - u_C = 0$	$f_i - f_b - f_k = 0$
$u_i - iR - u_o = 0$	$f_i - bv - f_o = 0$
$u_i - RC \frac{du_o}{dt} - u_o = 0$	$f_i - \frac{1}{k} \frac{df_o}{dt} b - f_o = 0$
$F(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{1 + sRC}; \quad T = RC$	$F(s) = \frac{F_o(s)}{F_i(s)} = \frac{1}{1 + sb/k}; \quad T = \frac{b}{k}$

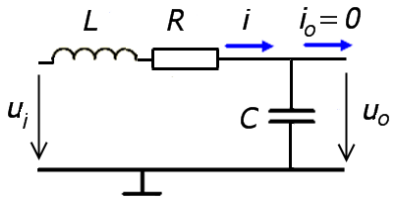
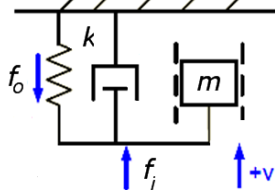
Príklad 2:

Tab. 2.15

Elektrický obvod – RL filter	Mechanický obvod – tlmič a hmota
	
$u_i - u_L - u_R = 0$	$f_i - f_b - f_m = 0$
$u_i - L \frac{di}{dt} - u_o = 0$	$f_i - bv - m \frac{dv}{dt} = 0$
$u_i - \frac{L}{R} \frac{du_o}{dt} - u_o = 0$	$f_i - \frac{m}{b} \frac{df_o}{dt} - f_o = 0$
$F(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{1 + sL/R}; \quad T = \frac{L}{R}$	$F(s) = \frac{F_o(s)}{F_i(s)} = \frac{1}{1 + sL/R}; \quad T = \frac{L}{R}$

Príklad 3:

Tab. 2.16

Elektrický obvod – RLC filter	Mechanický obvod – tlmič, pružina, hmota
	
$u_i - u_L - u_R - u_C = 0$	$f_i - f_k - f_b - f_m = 0$
$u_i - L \frac{di}{dt} - Ri - u_o = 0$	$f_i - kx - bv - m \frac{dv}{dt} = 0$
$u_i - L \frac{d}{dt} \left(C \frac{du_o}{dt} \right) - RC \frac{du_o}{dt} - u_o = 0$	$f_i - f_o - \frac{b}{k} \frac{df_o}{dt} - \frac{m}{k} \frac{d^2 f_o}{dt^2} = 0$
$LC \frac{d^2 u_o}{dt^2} + RC \frac{du_o}{dt} + u_o = u_i$	$\frac{m}{k} \frac{d^2 f_o}{dt^2} + \frac{b}{k} \frac{df_o}{dt} + f_o = f_i$
$F(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2d}{\omega_0} s + 1}$	$F(s) = \frac{F_o(s)}{F_i(s)} = \frac{1}{\frac{m}{k} s^2 + \frac{b}{k} s + 1} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2d}{\omega_0} s + 1}$
$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}; \quad d = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}; \quad K = 1$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad d = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{1}{km}}; \quad K = 1$

3 DYNAMICKÉ VLASTNOSTI ZÁKLADNÝCH PRENOSOVÝCH SÚSTAV

Väčšina priemyselných sústav pozostáva z proporcionálnych, príp. proporcionálno-derivačných sústav prvého až tretieho rádu. Pre správne pochopenie dynamických vlastností systémov je potrebné dokonale poznať vplyv charakteristických parametrov systému na jeho dynamické vlastnosti, ktoré sú vyjadrené časovými alebo frekvenčnými charakteristikami.

V tejto kapitole sa preto budeme zaoberať analýzou základných analýzou vlastností dynamických sústav I. až III. rádu a tiež modelmi nelinearit systému.

3.1 Dynamická sústava I. rádu

Lineárna dynamická sústava prvého rádu je popísaná diferenciálnou rovnicou prvého rádu, ktorá na pravej strane obsahuje proporcionálny člen (ide o proporcionálnu sústavu I. rádu) alebo aj derivačnú zložku vstupnej veličiny – v tom prípade hovoríme o proporcionálno-derivačnej sústave I. rádu:

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \quad (3.1)$$

Po úprave môžeme vyjadriť jej prenos na tvar:

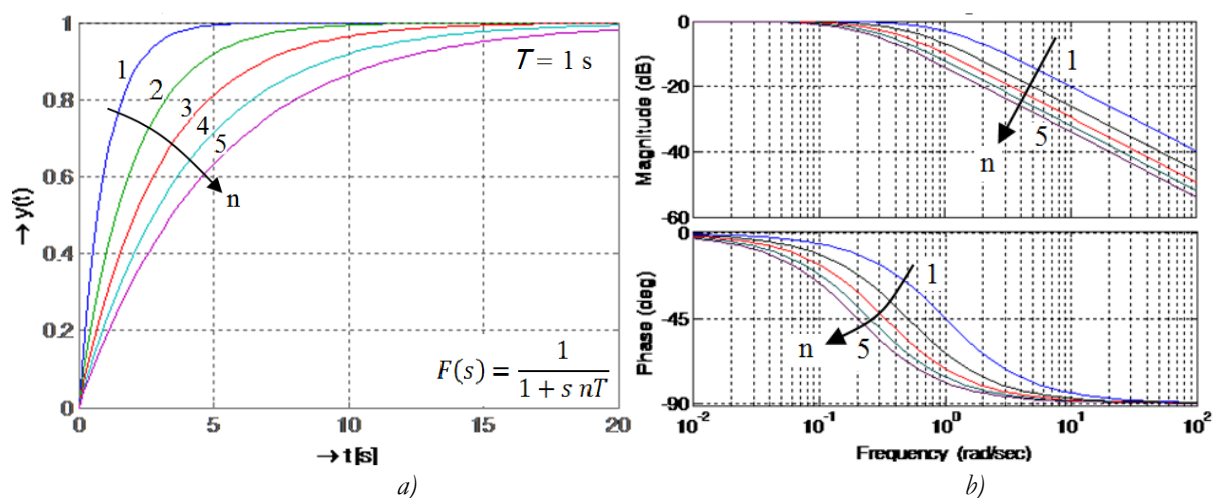
$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K \frac{1 + sT_D}{1 + sT} \quad (3.2)$$

kde K je zosilnenie, T – časová konštanta, T_D je derivačná časová konštanta:

Spätná Laplaceova transformácia pri jednotkovom vstupnom skoku a $T_D = 0$ dáva časovú funkciu:

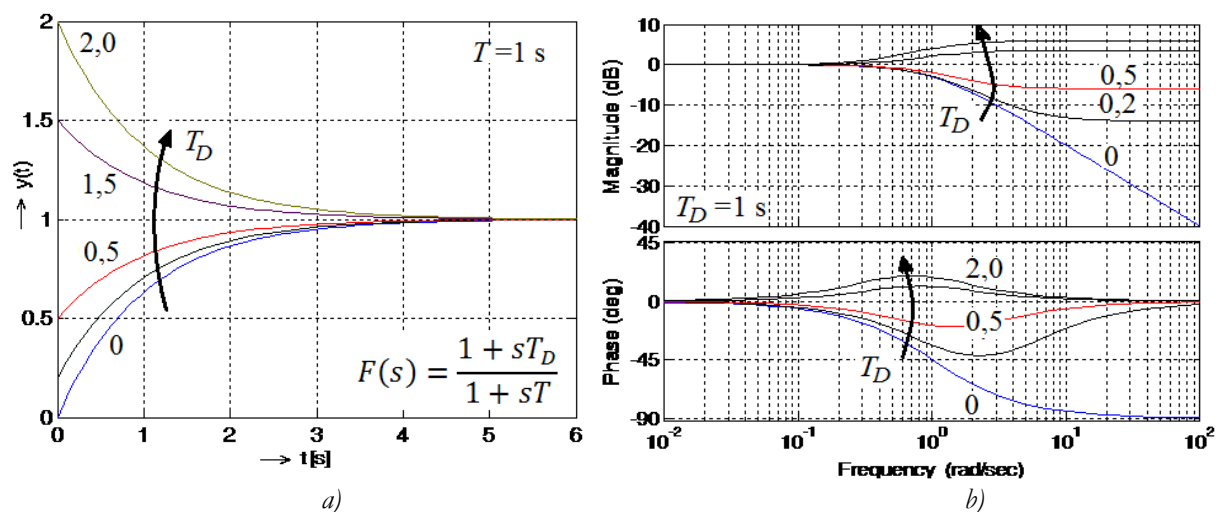
$$y(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (3.3)$$

Aj keď derivačná zložka sa pri tejto sústave vyskytuje zriedka, ukážme jej vplyv na prenos. Časová ododzva (a stabilita sústavy) závisí od pólov funkcie, ale na priebeh prechodových charakteristík vplýva ja veľkosť derivačnej zložky. Na Obr. 3.1a sú nakreslené prechodové charakteristiky proporcionálnej sústavy ($T_D = 0$) pre rôzne hodnoty časovej konštanty T . Na Obr. 3.1b sú odpovedajúce logaritmické frekvenčné charakteristiky.



Obr. 3.1 Proporcionálna sústava I. rádu a) prechodové charakteristiky; b) logaritmické frekvenčné charakteristiky

Vplyv nuly prenosu $n = -1/T_D$ na dynamické vlastnosti PD sústavy ($T_D \neq 0$) je zrejmý z priebehov časových i frekvenčných charakteristik na Obr. 3.2. Nula prenosu spôsobuje, že prechodová charakteristika pre čas $t = 0$ začína v bode T_D/T .



Obr. 3.2 Proporcionálno-derivačná sústava I. rádu ($T = 1$ s, $T_D = 0,1; 0,2; 0,4$ s):
a) časové charakteristiky, b) poloha pólu a nuly prenosu, c) logaritmické frekvenčné charakteristiky

3.2 Dynamická sústava II. rádu

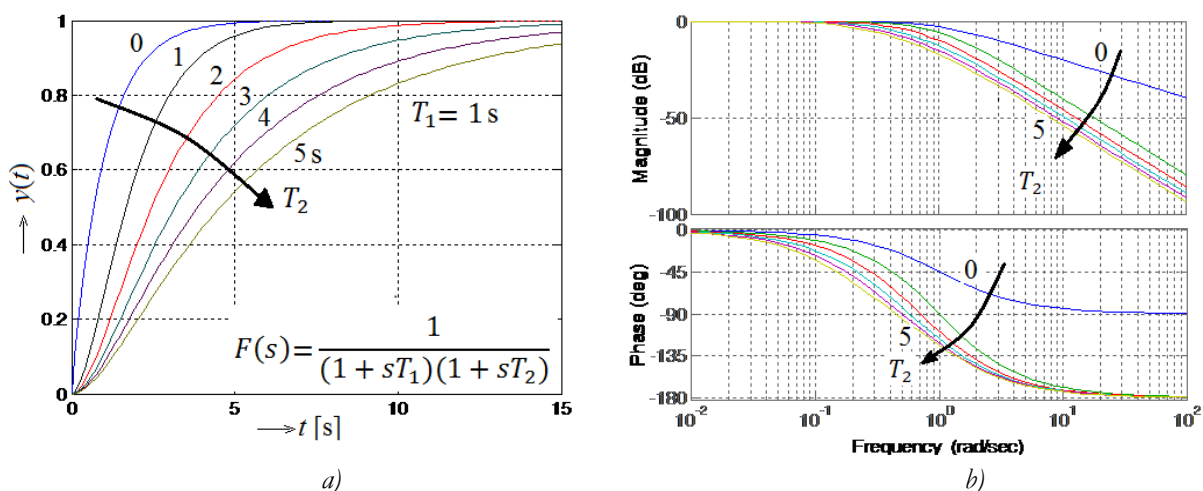
3.2.1 Proporcionálna sústava II. rádu nekmitavá

Prenos tejto sústavy možno vyjadriť v tvare:

$$F(s) = \frac{1}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} \quad (3.4)$$

t.j. má 2 reálne póly $s_1 = -1/T_1$ a $s_2 = -1/T_2$.

Dynamika sústavy závisí od pomeru časových konštánt T_1/T_2 , čo vidno aj na prechodových charakteristikách na Obr. 3.3a.



Obr. 3.3 Vplyv časovej konštanty nekmitavej sústavy II. rádu na: a) prechodové charakteristiky
b) logaritmické frekvenčné charakteristiky, $T_1 = 1$ s, $T_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ s

V prípade, ak jeden z pólov má 10x väčšiu vzdialenosť od imaginárnej osi, jeho vplyv možno zanedbať a takúto sústavu možno nahradiť sústavou prvého rádu.

3.2.2 Proporcionálna sústava II. rádu kmitavá

Lineárna dynamická sústava prvého rádu je popísaná diferenciálnou rovnicou druhého rádu, ktorá na pravej strane obsahuje proporcionálny člen (ide o proporcionálnu sústavu II. rádu) alebo aj derivačnú zložku vstupnej veličiny – v tom prípade hovoríme o proporcionálno-derivačnej sústave II. rádu:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_1 \frac{d}{dt} u(t) + b_0 u(t) \quad (3.5)$$

Jej prenosová funkcia je:

$$F(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (3.6)$$

ktorá má dva póly a jednu nulu prenosu. V tejto stati analyzujeme prípad bez nuly v prenosovej funkcii. Pre analýzu dynamických vlastností je vhodnejšie vychádzať z diferenciálnej rovnice:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2d\omega_0 \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = Ku(t) \quad (3.7)$$

čo vedie na štandardný prenos sústavy II. rádu:

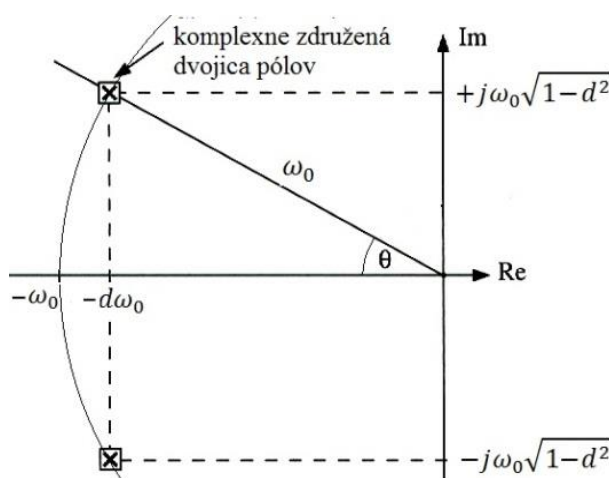
$$F(s) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2d}{\omega_0} s + 1} \quad (3.8)$$

V ďalšom predpokladajme $K = 1$. Dynamické vlastnosti závisia od frekvencie netlmených kmitov ω_0 a od tlmenia sústavy d a sú dané polohou pólov prenosovej funkcie (Obr. 3.4):

$$s_{1,2} = -d\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-d^2} \quad (3.9)$$

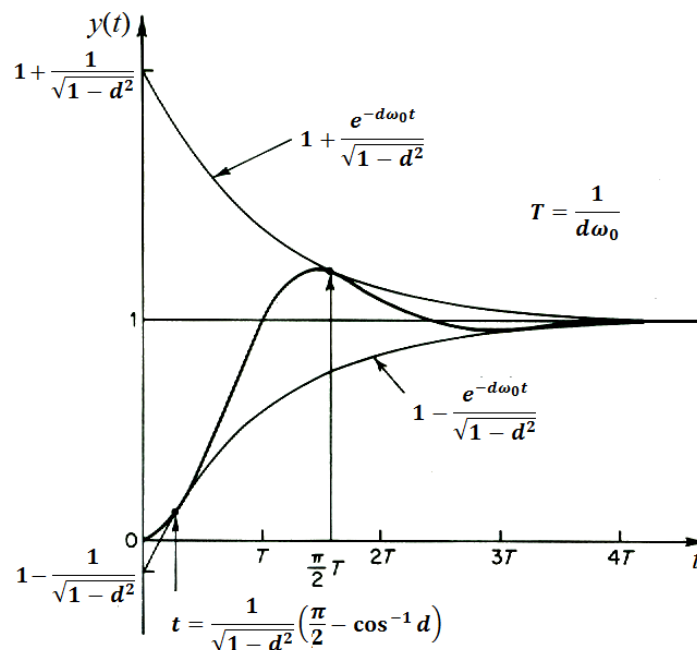
Priebeh prechodovej charakteristiky dostaneme spätnou Laplaceovou transformáciou prenosu v rov. (3.8), pričom uvažujeme s jednotkovým skokom $U(s) = 1/s$ na vstupe sústavy:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} e^{-d\omega_0 t} \sin\left(\omega_0\sqrt{1-d^2}t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}\right) + \quad (3.10)$$



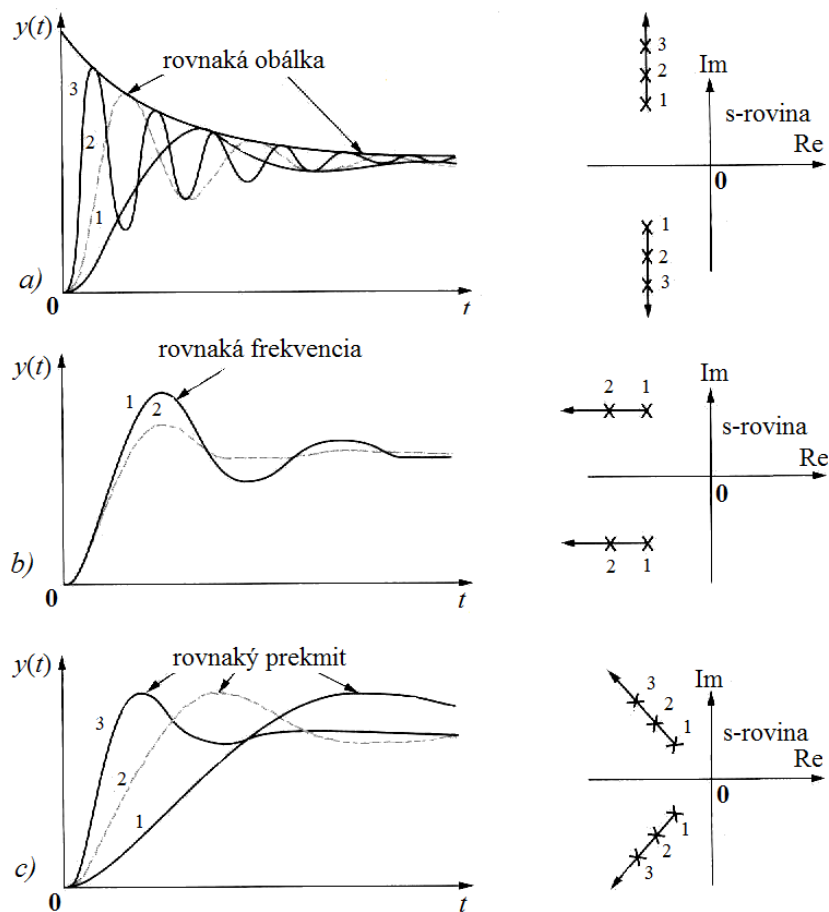
Obr. 3.4 Poloha pólov kmitavej sústavy II. rádu

Od veľkosti tlmenia d závisia obálky časových priebehov kmitov funkcie i prvé maximum, čo je zobrazené na Obr. 3.5.



Obr. 3.5 Priebek obálok prechodových charakteristík kmitavej sústavy II. rádu

Pribeh prechodových charakteristík tlmeného kmitavého systému závisí od polohy pólov v rovine koreňov. Tvar prechodových charakteristík v závislosti od zmeny reálnej, resp. imaginárnej časti dvojice komplexných koreňov je uvedený na Obr. 3.6.



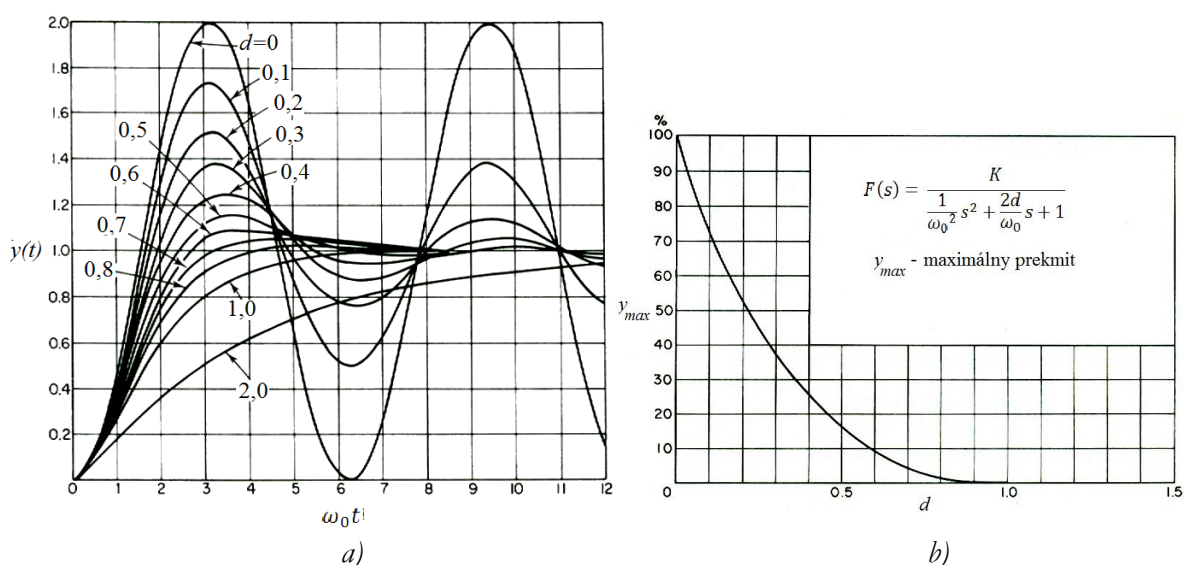
Obr. 3.6 Prechodové charakteristiky kmitavej sústavy II. rádu v závislosti od polohy pólov: a) s konštantnou reálnou časťou; b) s konštantnou imaginárnou časťou; c) s konštantným tlmením

V závislosti od veľkosti tlmenia d rozlišujeme niekoľko základných prípadov (Tab. 3.1, [14]).

Tab. 3.1 Vlastnosti sústavy II. rádu v závislosti od veľkosti tlmenia d

Tlmenie	Korene	Charakteristika	Ďalšie vlastnosti
$d > 1$	$s_{1,2} = -\omega_0(d \pm \sqrt{d^2 - 1})$	Nekmitavá sústava s dvoma zápornými reálnymi koreňmi.	$F(s) = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)}$ $= \frac{1/(s_1 s_2)}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$
$d = 1$	$s_{1,2} = -\omega_0$	Aperiodický priebeh – najrýchlejší nábeh..	$F(s) = \frac{1}{(s - s_1)^2}$
$d = 0,707$	$ Re(s_i) = Im(s_i) , \quad i = 1, 2$	Reálna časť koreňa je rovná imaginárnej. Prekmit je 4,3 %.	$ -d\omega_0 = j\omega_0\sqrt{1-d^2} $ $\Rightarrow d = \sqrt{2}$
$0 < d < 1$	$s_{1,2} = -d\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-d^2}$	Kmitavá sústava s tlmenými kmitmi.	Kruhovú frekvenciu kmitov $\omega_0\sqrt{1-d^2}$
$d = 0$	$s_{1,2} = \pm j\omega_0$	Kmitavá sústava s netlmenými kmitmi	$F(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2}s^2 + 1}$

Priebeh odpovedajúcich prechodových charakteristík v závislosti od tlmenia systému je uvedený na Obr. 3.7a. Maximálny prekmit tiež závisí od veľkosti tlmenia d a táto závislosť je znázornená na Obr. 3.7b.



Obr. 3.7 Priebehy prechodovej charakteristiky kmitavej sústavy II. rádu v závislosti od hodnoty tlmenia d

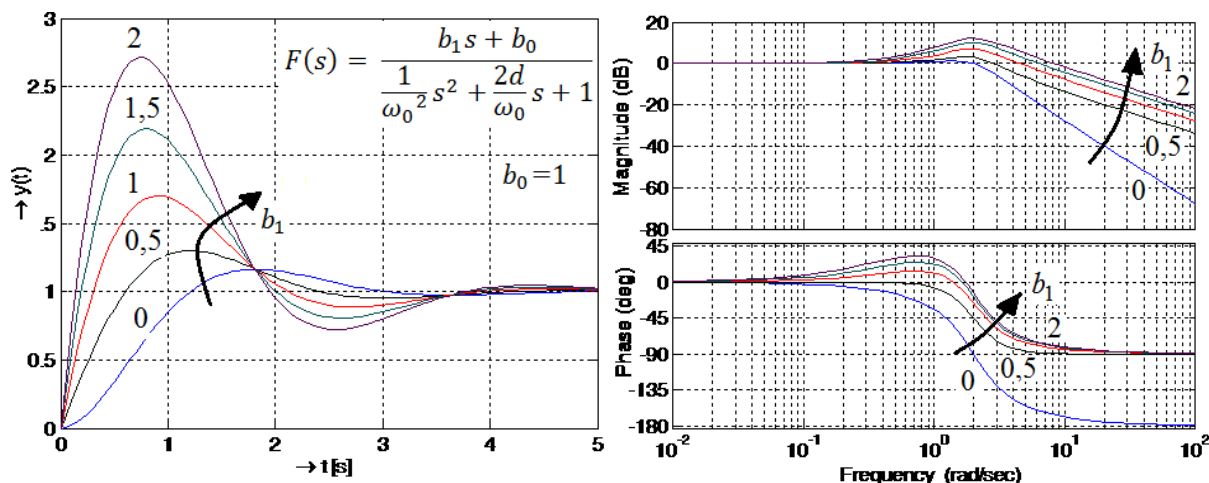
3.2.3 Proporcionálno-derivačná kmitavá sústava II. rádu

Proporcionálno-derivačná sústava II. rádu s prenosom

$$F(s) = \frac{b_1 s + b_0}{\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2d}{\omega_0} s + 1} \quad (3.11)$$

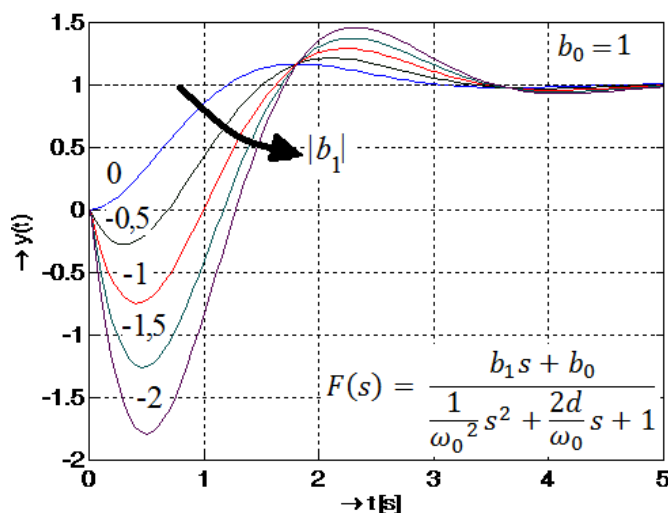
obsahuje nulu systému $s = -b_0/b_1$, ktorá ovplyvňuje priebeh prechodových charakteristík: ich amplitúdu, ale nie charakter (napr. tlmené kmity aj v tomto prípade budú tlmenými).

Prechodové charakteristiky závisia od veľkosti nuly prenosovej funkcie, ako je to zobrazené na Obr. 3.8. Tieto časové ododzvy platia pre PD sústavu II. rádu: $\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$ a $d = 0,5$, t.j. pre polohu pólov $s_{1,2} = -1 \pm 1,732j$ a $b_0 = 1$. Mení sa hodnota nuly: pre hodnoty koeficienta $b_1 = 0; 0,5; 1; 1,5; 2$ odpovedajúca (záporná) nula systému nadobúda postupne hodnoty $z_1 = \infty; -2; -1; -0,666; -0,5$.



Obr. 3.8 Vplyv polohy nuly systému kmitavej PD sústavy II. rádu pre: $\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$ a $d = 0,5$ na:
a) prechodové charakteristiky, b) Bodeho logaritmické frekvenčné charakteristiky

Kladná nula prenosu spôsobuje podkmit prechodovej charakteristiky na začiatku priebehu (Obr. 3.9). Priebehy platia tú istú sústavu II. rádu, ako na Obr. 3.8, ale pre záporné hodnoty: $b_1 = 0; -0,5; -1; -1,5; -2$, t.j. pre kladné hodnoty núl prenosu $z_1 = \infty; 2; 1; 0,666; 0,5$.



Obr. 3.9 Vplyv kladnej nuly systému na prechodové charakteristiky PD kmitavej sústavy II. rádu

Nula prenosu vplýva na veľkosť prekmitu a jej vplyv možno zanedbať, ak je vzdialená od imaginárnej osi podľa nerovnosti: ∞

$$\left| \frac{b_0/b_1}{d\omega_0} \right| \geq 10 \quad (3.12)$$

3.3 Dynamické sústavy vyšších rádu

V prípade, ak kmitavá sústava je vyššieho rádu ako 2, nedá sa jednoznačne určiť frekvencia kmitov a prekmit – tretí pól výrazne vplýva na dynamické vlastnosti sústavy. Analyzujme prenos proporcionálnej kmitavej sústavy III. rádu v tvare:

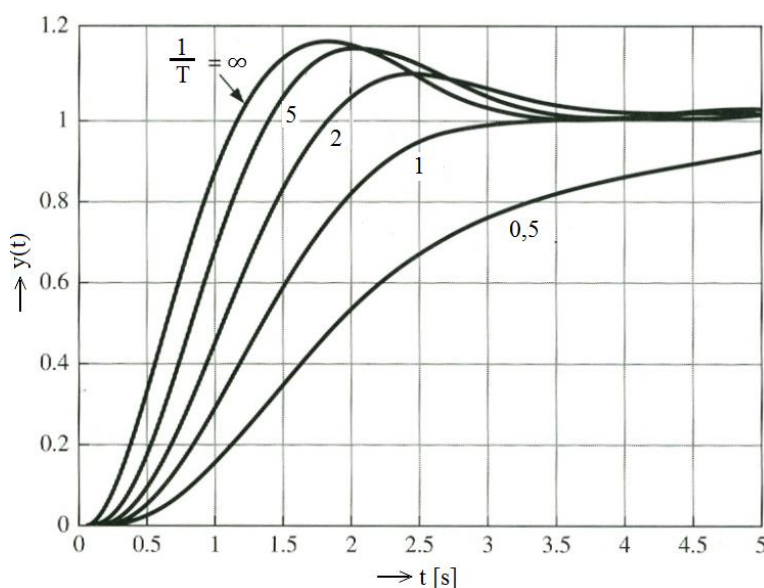
$$F(s) = \frac{1}{(1 + sT) \left(\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2d}{\omega_0} s + 1 \right)} \quad (3.13)$$

ktorý má dvojicu komplexne združených pólů z reálnou zložkou $-d\omega_0$ a pól na zápornej reálnej osi $-1/T$ (Obr. 3.10). Ak reálny pól je 10 násobne vzdialenejší od imaginárnej osi, t.j. ak platí

$$\left| \frac{1/T}{d\omega_0} \right| \geq 10 \quad (3.14)$$

jeho vplyv spravidla môžeme zanedbať.

Vplyv polohy tretieho pólu na odozvu kmitavej sústavy pre $\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$ a $d = 0,5$ (platí pre sústavu II. rádu) je znázornený na Obr. 3.9. Čím je poloha tretieho pólu v rovine koreňov vzdialenejšia vľavo od reálnej osi, tým je jeho vplyv menší a naopak – čím je bližšia ku imaginárnej osi, tým viac prevláda kmitavý charakter sústavy II. rádu.

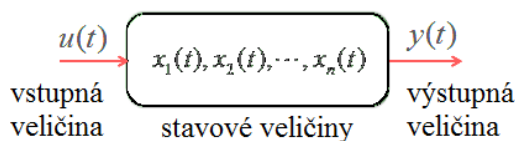


Obr. 3.10 Vplyv polohy tretieho (reálneho) pólu na časovú odozvu systému proporcionálnej kmitavej sústavy III. rádu (ak sústava druhého rádu má $\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$ a $d = 0,5$)

4 MODELOVANIE DYNAMICKÝCH SYSTÉMOV V STAVOVOM PRIESTORE

4.1 Stavový opis systému

Modelovanie v stavovom priestore predstavuje určitý druh prepisu diferenciálnych rovníc systému na sústavu diferenciálnych rovníc I. rádu, ktoré prehľadne vieme usporiadať do maticového tvaru. Vnútorý opis SISO systému (s jedným vstupom a výstupom) je vyjadrený reláciou medzi vstupnou veličinou $u(t)$, n vnútornými (stavovými) veličinami $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ a výstupnou veličinou $y(t)$ systému (Obr. 4.1). Keďže vnútorné stavové veličiny sa menia dynamicky, s časom, matematicky sú popísané diferenciálnymi rovnicami - stavovými rovnicami.



Obr. 4.1 Veličiny SISO systému

Stavové rovnice systému môžeme získať dvoma spôsobmi:

- matematickým spôsobom pomocou prepisu diferenciálnej rovnice n -tého rádu opisujúcej systém, pričom nie všetky stavové veličiny majú fyzikálny význam,
- alebo z priameho popisu systému pomocou fyzikálnych zákonov a zavedením vnútorných – stavových veličín, ktoré majú priamy fyzikálny význam. Počet stavových veličín pritom zodpovedá počtu zásobníkov energie v systéme (elektrostatickej, elektromagnetického poľa, potenciálnej, kinetickej, tepelnej a pod.).

Lineárny dynamický systém s jedným vstupom a výstupom (SISO) je opísaný lineárnou diferenciálnou rovnicou s konštantnými parametrami:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^{(i)}y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^{(j)}u(t)}{dt^j} \quad (4.1)$$

kde $a_n = 1$, a_i , b_j pre $i = 0, 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, m$ sú parametre (konštanty).

Túto diferenciálnu rovnicu n -tého rádu môžeme prepísať na n diferenciálnych rovníc 1-rádu, čo zapíšeme v maticovom tvare:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + d u(t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Rovnice (4.2) sa nazývajú stavovými rovnicami. Ich parametrami sú matica dynamiky $\mathbf{A}$ rozmeru $(n \times n)$, vstupný vektor $\mathbf{b}$ rozmeru $(n \times 1)$, výstupný vektor (riadkový) $\mathbf{c}^T$ rozmeru $(1 \times n)$ a koeficient d je priamy prenos zo vstupu na výstup.

Rozmery vektorov a matic vyplývajú aj z náčrtku na Obr. 4.2.

$\dot{\mathbf{x}}(t)$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{b}$	n
$y(t)$	$\mathbf{c}^T$	d	1
1	n	1	

Obr. 4.2 Rozmery matíc a vektorov stavového popisu SISO systému

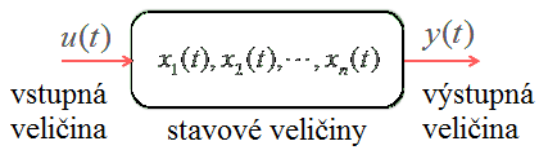
Stavové rovnice nelineárneho dynamického SISO systému majú tvar:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \\ y &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, u)\end{aligned}\tag{4.3}$$

$\mathbf{f}$ a $\mathbf{h}$ sú všeobecné nelineárne funkcie vektora stavových veličín $\mathbf{x}(t)$ a vstupnou veličinou $u(t)$.

Stavový popis systému možno rozšíriť aj na prípad MIMO systémov s viacerými vstupmi a výstupmi (Obr. 4.3). V tomto prípade v stavových rovniciach vystupuje matica dynamiky $\mathbf{A}$ rozmeru $(n \times n)$, vstupná matica $\mathbf{B}$ rozmeru $(n \times p)$, výstupná matica $\mathbf{C}$ rozmeru $(q \times n)$ a matica $\mathbf{D}$ priameho prenosu zo vstupu na výstup rozmeru $(q \times p)$.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} u(t)\end{aligned}\tag{4.4}$$



Obr. 4.3 Veličiny MIMO systému

Rozmery vektorov a matíc pre MIMO systém vyplývajú tiež z náčrtku na Obr. 4.4.

$\dot{\mathbf{x}}(t)$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	n
$y(t)$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{D}$	q
1	n	p	

Obr. 4.4 Rozmery matíc a vektorov stavového popisu SISO systému

Zostavenie stavových modelov dynamických systémov predstavuje veľmi dôležitú časť návrhu systému, pretože získané stavové rovnice I. rádu vedú priamo na riešenie diferenciálnych rovníc numerickými metódami, čo sa v praxi môže napr. využiť napr. pri návrhu riadenia systému, či návrhu rôznych trénerov a pod.

4.2 Metódy zostavenia stavového modelu dynamického systému

4.3 Rozpis diferenciálnej rovnice n-tého rádu na n-diferenciálnych rovníc I. rádu

Stavové rovnice (diferenciálne rovnice I. rádu) možno získať rozpisom diferenciálnej rovnice n-tého rádu zavedením vhodných stavových veličín. V tomto prípade môže ísť o zavedenie fiktívnych stavových veličín, ktoré nemusia mať priamy fyzikálny význam. Ilustrujme túto metódu na príklade lineárnej diferenciálnej rovnice bez pravej strany v tvare:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = u(t) \quad (4.5)$$

Stavové veličiny môžeme zaviesť rôznymi spôsobmi (existuje nekonečne veľa spôsobov zavedenia stavových veličín: novú sadu stavových veličín môžeme vytvoriť lineárnou kombináciou predchádzajúcej sady stavových veličín). Zmysluplné je, ak:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad x_3 = \ddot{y}, \quad \dots, \quad x_n = y^{(n-1)} \quad (4.6)$$

kde:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dots, \quad \dot{x}_{n-1} = x_n, \quad \dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + u(t) \quad (4.7)$$

čo v maticovom zápise vyzerá nasledovne:

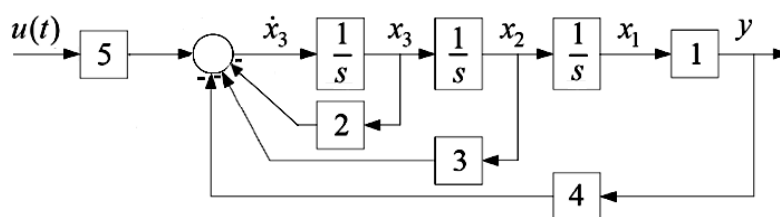
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.8)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]x$$

Príklad: Pre diferenciálnu rovnicu:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 4y = 5u \quad (4.9)$$

odpovedajúca bloková schéma je na Obr. 4.5.



Obr. 4.5 Bloková schéma riešenia diferenciálnej rovnice tretieho rádu bez derivácií na pravej strane (proporcionálna sústava)

V prípade, ak ide o diferenciálnu rovnicu s pravou stranou:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \quad (4.10)$$

osamostatníme najvyššiu deriváciu a na pravej strane zoskupíme jednotlivé derivácie:

$$\frac{d^n y}{dt^n} = a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + \left(a_m \frac{d^m y}{dt^m} - b_m \frac{d^m u}{dt^m} \right) + \dots + \left(a_1 \frac{dy}{dt} - b_1 \frac{du}{dt} \right) + (a_0 y - b_0 u) \quad (4.11)$$

Prehľadnejšie riešenie je pri použití Laplaceovej transformácie, napr. pre $n = 3, m = 2$ je jeden z možných postupov nasledovný, kde $Y = Y(s)$, $U = U(s)$, $X_i = X_i(s)$, pre $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} s^3 Y &= s^2 (a_2 Y - b_2 U) + s(a_1 Y - b_1 U) + (a_0 Y - b_0 U) / \frac{1}{s} \\ s^2 Y &= s(a_2 Y - b_2 U) + (a_1 Y - b_1 U + X_1) / \frac{1}{s} \\ s Y &= (a_2 Y - b_2 U + X_2) / \frac{1}{s} \\ Y &= \frac{1}{s} X_3 \end{aligned} \quad (4.12)$$

kde sme zaviedli veličiny:

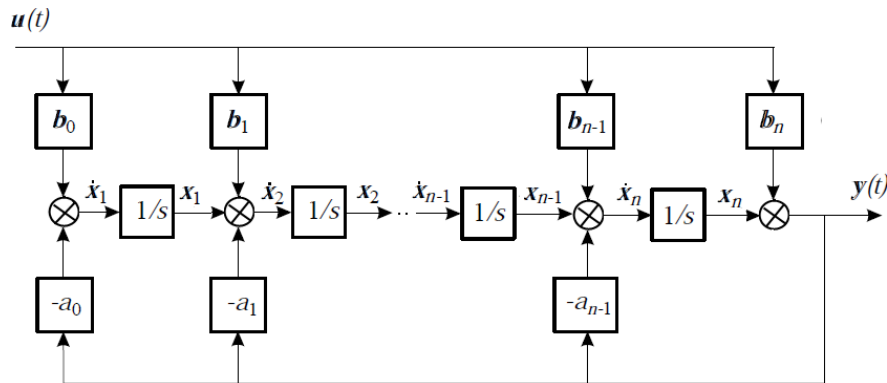
$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{s} (a_0 Y - b_0 U) \\ X_2 &= \frac{1}{s} (a_1 Y - b_1 U + X_1) \\ X_3 &= \frac{1}{s} (a_2 Y - b_2 U + X_2) \end{aligned} \quad (4.13)$$

čo vieme prepísať do maticovej formy stavového zápisu:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} sX_1 \\ sX_2 \\ sX_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} U \\ Y &= [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Bloková schéma tejto realizácie vo všeobecnom prípade pre $m = n$ je na Obr. 4.6.

Poznámka: uvedené matematické operácie platia pre $a_n = 1$. V prípade, ak táto rovnosť neplatí, vydělíme pôvodnú diferenciálnu rovnicu týmto koeficientom a_n . Týmto spôsobom vieme prepísať každú prenosovú funkciu sústavy n -tého rádu na ekvivalentný stavový model. Stavové veličiny zavedené týmto spôsobom však nemusia mať priamy fyzikálny význam.

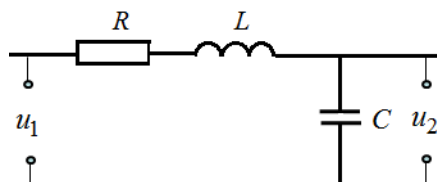


Obr. 4.6 Bloková schéma riešenia diferenciálnej rovnice n -tého rádu s deriváciami na pravej strane

Existuje viac rôznych spôsobov rozpisu lineárnej diferenciálnej rovnice n -tého rádu s pravou stranou na sústavu diferenciálnych rovníc I. rádu, čo vedie na zostavenie stavového modelu systému. Pomocou niektorých postupov dostaneme vhodné (kanonické - štandardné) tvary, ktoré sa využívajú v regulačnej technike (posúdenie pozorovateľnosti systému, návrh pozorovateľov a pod.). Bližšie takéto metódy rozpisu sú uvedené v lit. [19]-[20].

4.3.1 Analytické odvodenie stavového modelu elektrického systému

Zostavme stavový popis RLC filtra II. rádu, ktorého schéma je na Obr. 4.6, [20].



Obr. 4.7 Elektrická schéma filtračného článku II. rádu

Vstupom do obvodu je vstupné napätie u_i (index i – input) a na výstupe dostávame výstupné napätie (napätie na kondenzátore) $u_o = u_c$ (index o – output). Predpokladajme výstup naprázdno, teda obvodom tečie iba prúd i cez kondenzátor. Obvod obsahuje dva zásobníky energie: elektromagnetickej, uloženej v magnetickom poli cievky a elektrostatickej, uloženej v kondenzátore; teda ide o dynamickú sústavu II. rádu. Rovnice, popisujúce zmenu stavových veličín v obvode, sú nasledovné:

$$\begin{aligned} i &= C \frac{du_c}{dt} \\ u_L &= L \frac{di}{dt} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Tieto rovnice doplníme rovnicou pre II. Kirchhoffov zákon:

$$u_R + u_L + u_C = u_i \quad (4.16)$$

odkiaľ:

$$u_L = u_i - u_R - u_C = u_i - Ri - u_C \quad (4.17)$$

V rovniciach (4.15) osamostatníme prvé derivácie a doplníme výrazmi (4.16) a (4.17):

$$\begin{aligned} \frac{du_c}{dt} &= \frac{1}{C} i \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{L} u_L = \frac{1}{L} (u_i - Ri - u_C) \end{aligned} \quad (4.18)$$

čo odpovedá maticovému zápisu (pri zadaní výstupnej veličiny $u_o = u_c$):

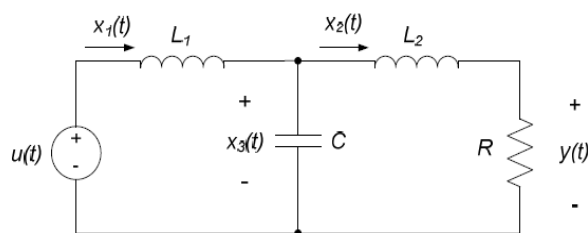
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{du_c}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u_i \\ u_o &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} u_c \\ i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.19)$$

resp. po označení stavových veličín $x_1 = u_c$, $x_2 = i$, vstupnej veličiny $u = u_i$ a výstupnej veličiny $y = u_c = x_1$, dostávame hľadané matice stavového popisu:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = [1 \quad 0] \quad (4.20)$$

Pri tomto spôsobe zavedenia stavových veličín, na rozdiel od predchádzajúcich metód, tieto stavové veličiny majú priamy fyzikálny význam.

Príklad: Zostavte stavový model obvodu na Obr. 4.8.



Obr. 4.8 Elektrický obvod

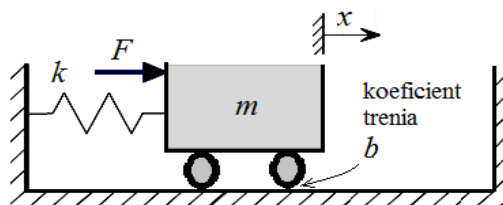
Riešenie:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/L_1 \\ 0 & -R/L_2 & 1/L_2 \\ 1/C & -1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0 \cdot u(t) \quad (4.21)$$

4.3.2 Analytické zostavenie stavového modelu mechanického systému

Aj pre mechanické systémy opísané diferenciálnymi rovnicami možno odvodiť ich stavové modely. Stavovými veličinami sú tu spravidla rýchlosti a posunutia telies (rotačné/translačné). Uvedme niekoľko príkladov na zostavenie stavového popisu mechanického systému.

- a) Jednoduchý translačný systém (Obr. 4.9, [19]) je opísaný diferenciálnymi rovnicami (4.22), v ktorom je vlastne pružina s koeficientom pružnosti k je pripojená paralelne ku tlmiču b :



Obr. 4.9 Jednoduchý translačný systém

$$m \frac{dv}{dt} = F - kx - bv \quad (4.22)$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

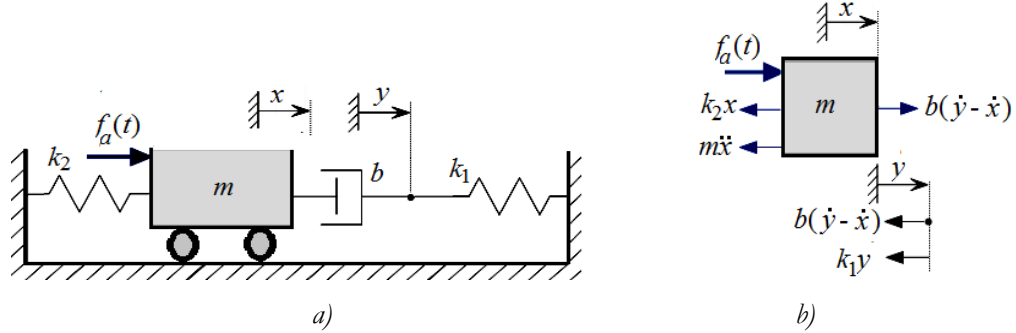
odkiaľ po krátkom výpočte a usporiadaní výsledkov do rovníc do maticovej formy dostávame stavový zápis:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} F \quad (4.23)$$

$$u_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} F$$

Rád systému (počet stavových veličín) závisí od počtu zásobníkov v systéme.

Napr. pre translačný systém na Obr. 4.10 [20] sú to 3 zásobníky energie: kinetickej, uloženej v zotrvačnej hmote a v potenciálnej, ktorá je uložená v obidvoch pružinách. Pre tieto 3 zásobníky nenergie môžeme napísať nasledovné vzťahy:



Obr. 4.10 Analyzovaný translačný systém: a) kinematická schéma, b) rozbor síl

Dynamický rovnica pre pohyb vozíka, na ktorý pôsobí sila $f_a(t)$:

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + k_2 x - b \dot{y} = f_a \quad (4.24)$$

Túto diferenciálnu rovnicu II. rádu rozpíšeme na dve diferenciálne rovnice I. rádu:

$$b \dot{y} + k_1 y - b \dot{x} = 0 \quad (4.25)$$

$$\dot{q}_1 = \dot{x} = q_2 \quad (4.26)$$

$$\dot{q}_2 = \ddot{x} = \frac{1}{m} (f_a - b \dot{x} - k_2 x + b \dot{y}) = \frac{1}{m} (f_a - b q_2 - k_2 q_1 + b q_3) \quad (4.27)$$

Pre pružinu a tlmič v pravej časti obrázku platí:

$$\dot{q}_3 = \dot{y} = \frac{1}{b} (-k_1 y + b \dot{q}_2) = \frac{1}{b} (-k_1 q_3 + b q_2) \quad (4.28)$$

Diferenciálne rovnice I. rádu so stavovými veličinami q_1, q_2, q_3 zapíšeme v štandardnom tvare sstaového popisu:

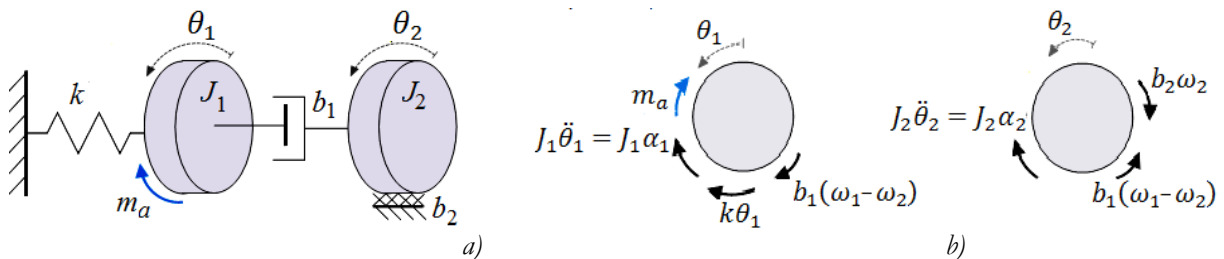
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{A} \mathbf{q} + \mathbf{b} u \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{q} + d u \end{aligned} \quad (4.29)$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k_2}{m} & -\frac{b}{m} & \frac{b}{m} \\ 0 & 1 & \frac{k_1}{b} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}^T = [0 \quad 0 \quad 1] \quad d = 0 \quad (4.30)$$

Rotačný systém s kinematickou schémou na Obr. 4.11a je opísaný dynamickou rovnicou:

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + B_{r1} \dot{\theta}_1 + K_r \theta_1 - B_{r1} \dot{\theta}_2 = -m_a \quad (4.31)$$



Obr. 4.11 Analyzovaný translačný systém: a) kinematická schéma, b) rozbor momentov

Zavedieme substitúcie:

$$q_1 = \theta_1, \quad \dot{q}_1 = \dot{\theta}_1 = q_2, \quad \dot{q}_2 = \ddot{\theta}_1, \quad q_3 = \dot{\theta}_2, \quad \dot{q}_3 = \ddot{\theta}_2 \quad (4.32)$$

Pomocou nich a rovnice (4.31) dostaneme sústavu diferenciálnych rovníc I. rádu:

$$\dot{q}_1 = \dot{\theta}_1 = q_2 \quad (4.33)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{1}{J_1}(-m_a - b_1\dot{\theta}_1 - k\theta_1 + b_1\dot{\theta}_2) = \frac{1}{J_1}(m_a - b_1q_2 - kq_1 + b_1q_3) \quad (4.34)$$

$$\dot{q}_3 = \dot{y} = \frac{1}{J_2}[-(b_2 + b_1)\dot{\theta}_2 + b_1\dot{\theta}_1] = \frac{1}{J_2}[-(b_2 + b_1)q_3 + b_1q_2] \quad (4.35)$$

odkiaľ dostaneme hľadaný stavový model:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{q} + du \end{aligned} \quad (4.36)$$

kde matice stavového popisu sú:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{J_1} & -\frac{b_1}{J_1} & \frac{b_1}{J_1} \\ 0 & \frac{b_1}{J_2} & -\frac{(b_2 + b_1)}{J_2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}^T = [0 \quad 0 \quad 1] \quad d = 0 \quad (4.37)$$

4.3.3 Zostavenie stavového modelu systému z blokovej schémy obvodu

V prípade, ak je daná bloková schéma lineárneho systému, stavový popis systému zostavíme priamo z jeho blokovej schémy týmto spôsobom:

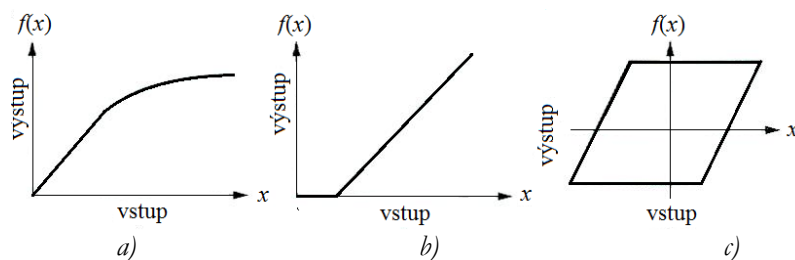
- 1) Blokovú schému systému upravíme tak., aby obsahovala iba bloky integrátorov a sústav I. rádu,
- 2) Zvolíme stavové veličiny, najvýhodnejšie na výstupe integrátorov a sústav I. rádu
- 3) Stavovú rovnicu zapíšeme nasledovne: vychádzame od stavovej veličiny a pokračujeme proti smeru toku signálu, pričom zapisujeme jednotlivé prenosy. Takto pokračujeme až po ďalšiu stavovú veličinu, resp. po vstupnú veličinu.
- 4) Výstupnú rovnicu zapíšeme už známym spôsobom.

5 MODELOVANIE NELINEÁRNYCH SYSTÉMOV

Doteraz sme sa zaoberali lineárnymi systémami, ktoré sú popísané lineárnymi diferenciálnymi rovnicami s konštantnými, časovoinvariantnými koeficientmi. Pre takéto systémy možno odvodiť prenosové funkcie, ktoré zodpovedajú lineárnym diferenciálnym rovniciam s nulovými počiatočnými podmienkami a pre ktoré platí princíp superpozície.

Žiadne reálne prvky systémov a regulačných obvodov nie sú ideálne lineárne. Statické charakteristiky sa svojim tvarom iba viac-menej blížia k lineárnemu priebehu. Odchýlky od ideálneho priebehu sú spôsobené skutočnosťami vyplývajúcimi z konštrukčného riešenia zariadenia. Napr. výstupné napätie elektronického zosilňovača nemôže byť ľubovoľne veľké, lebo je obmedzené napätím napájacích zdrojov. Podobne magnetický obvod elektromotora nemôže pojať nekonečné množstvo siločiar magnetického poľa, teda nemôže mať nekonečnú indukciu.

Tieto nelinearity nazývame parazitnými nelinearitami. Nelineárne systémy obsahujú nelineárne členy – v podstate ide o fyzikálne nelinearity a sú popísané nelineárnymi diferenciálnymi rovnicami. Jednou z najdôležitejších vlastností nelineárnych členov je závislosť ododozvy výstupu od veľkosti vstupného signálu, príp. frekvenčná závislosť od nelineárneho parametre. V nelineárnych systémoch neplatí princíp superpozície a nemožno ich popísať prenosovými funkciami. Ich vlastnosti možno vyjadriť buď graficky statickou charakteristikou, alebo matematicky nelineárnym výrazom. Príklady statických charakteristík niektorých takýchto nelineárnych členov sú uvedené na Obr. 5.1: nasýtenie, necitlivosť, hysterezia (vôľa v zuboch). Ako uvidíme v ďalšom, existujú ešte aj iné nelinearity – rôzne druhy reléovej charakteristiky, statické (Coulombovo) trenie a pod.



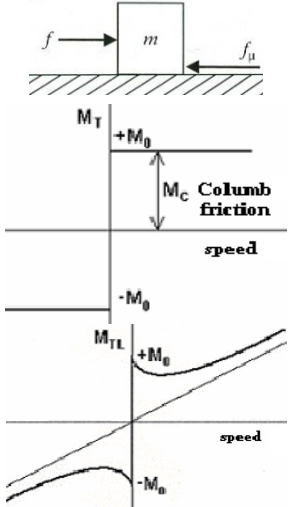
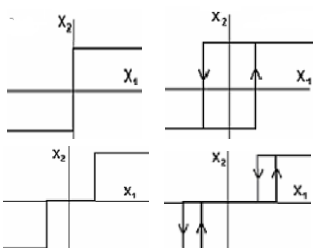
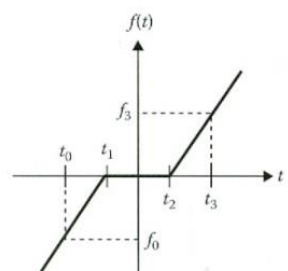
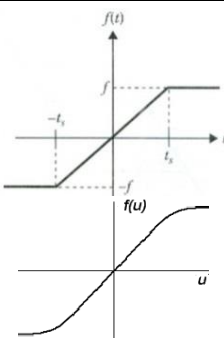
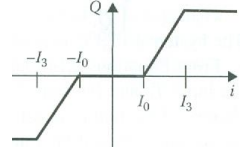
Obr. 5.1 Príklady na charakteristiky fyzikálnych nelinearít: a) nasýtenie, b) necitlivosť, c) hysterezia

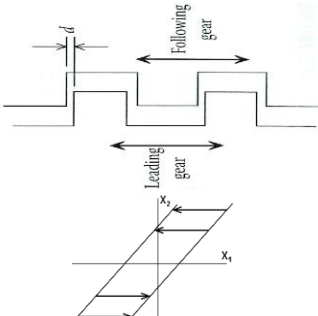
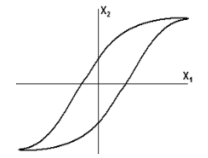
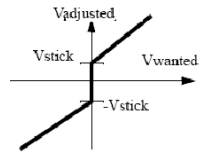
Nelineárne systémy môžu okrem fyzikálnych nelinearít obsahovať tiež matematické nelinearity, ako je násobenie, mocnina, odmocnina, goniometrické funkcie, či iné matematické funkcie. Ak pri riešení nelineárnych systémov chceme využiť dobre prepracované metódy lineárnej analýzy, potom je to možné iba za cenu linearizácie nelineárnej charakteristiky v blízkom okolí pracovného bodu. Prítom rozvineme nelineárnu funkciu pomocou Taylorovho radu v pracovnom bode a do úvahy vezmem iba lineárny člen. Keďže členy vyšších rádov zanedbáme, takáto linearizácia je platná iba v blízkom okolí pracovného bodu.

5.1 Nelinearity s nespojitosťou

Niektoré statické charakteristiky nemožno linearizovať. Obsahujú body nespojitosti, v ktorých sa derivácia funkcie mení skokom. Niektoré z nelinearít sú v systéme nežiadúce – sú to parazitické nelinearity, ako je trenie, vôľa v zuboch, nasýtenie a pod. Iné vkladáme do regulačného obvodu zámerne – sú to napr. nelinearity reléového typu, ktoré slúžia ako jednoduché dvoj- či trojpolohové regulátory. Ich výstupná veličina môže nadobúdať obmedzený počet hodnôt najčastejšie sú to dve hodnoty, ktoré zodpovedajú dvom stavom spínača, ktorý ovláda prívod energie do regulovanej sústavy. Základné charakteristiky a popis týchto nelineárnych členov sú prehľadne uvedené v Tab. 5.1 [23].

Tab. 5.1 Prehľad základných druhov nelineárnych členov s nespojitou charakteristikou

Názov	Charakteristika	Popis, matematický model
Coulombovo trenie		Coulombovo trenie sa vyskytuje najčastejšie. $m \frac{dv}{dt} + f_\mu = f$ Rozoznávame dva základné druhy trenia: - statické trenie, ktoré bráni počiatočnému pohybu, ak teleso je v kľude (kým nedôjde k tzv. odlepeniu) $f_\mu = f$, pokiaľ $f \leq f_B$ ($v = 0$) - ak sa teleso začne pohybovať, trenie má približne konštantnú hodnotu $f_\mu = \mu_0 mg$, ak $f > f_B$ ($v > 0$)
Reléová charakteristika		Rôzne typy člena s reléovou charakteristikou: - dvojpohodová - dvojpohodová s hysteréziou - trojpohodová s necitlivosťou (pásmom necitlivosti) - trojpohodová s necitlivosťou a hysteréziou
Necitlivosť		Oblasť necitlivosti („mŕtve pásmo“) – oblasť, v ktorej vstupná veličina nemá žiadny vplyv na výstup. $f(t) = f_3 \left(\frac{t - t_2}{t_3 - t_2} \right) \quad t_2 \leq t$ $= 0 \quad t_1 < t < t_2$ $= f_3 \left(\frac{t - t_1}{t_0 - t_1} \right) \quad t < t_1$
Nasýtenie		Niektoré súčiastky a zariadenia majú prirodzené maximálne hodnoty - obmedzenia, ktoré nemožno prekročiť a ktoré sú dané konštrukčným usporiadaním. Typickým predstaviteľom sú operačné zosilňovače, napájacie zdroje, snímače, obmedzovače rýchlosti a pod. $f(t) = f_s \left(\frac{t}{t_s} \right) \quad t \leq t_s$ $= \text{sgn}(f_s) \quad t > t_s$
Necitlivosť a nasýtenie		Vzniká zložením nelineárnych členov pre nasýtenie a necitlivosť. Typickým príkladom aplikácie je napr. pneumatiký ventil.

Vôľa v zuboch		Vôľa v zuboch sa prejavuje najmä v mechanických prevodovkách, kde pri reverzácii vstupného hriadeľa nedochádza okamžite ku reverzácii aj výstupného hriadeľa prevodovky.
Nelineárna hysterézia		Príkladom je hysterézná charakteristika magnetického materiálu
		

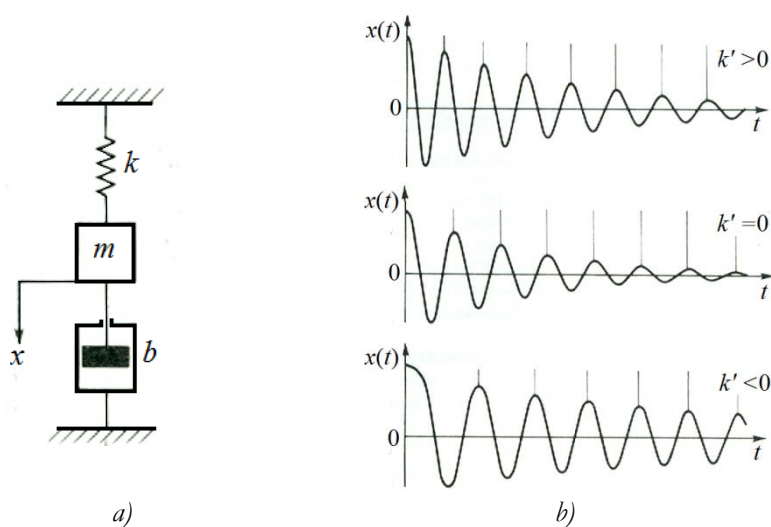
5.2 Vplyv nelinearít na časové ododzvy

Mechanický systém, pozostávajúci zo závažia o hmotnosti m , viskózneho tlmiča s koeficientom tlmenia b a zo závažia o hmotnosti m , (Obr. 4.2a), ktorého dynamika je popísaná nelineárnou dynamickou rovnicou

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) + c'x^3(t) = f(t) \quad (5.1)$$

kde $cx(t) + c'x^3(t)$ je sila v nelineárnej pružine a x je dráha (posunutie) závažia.

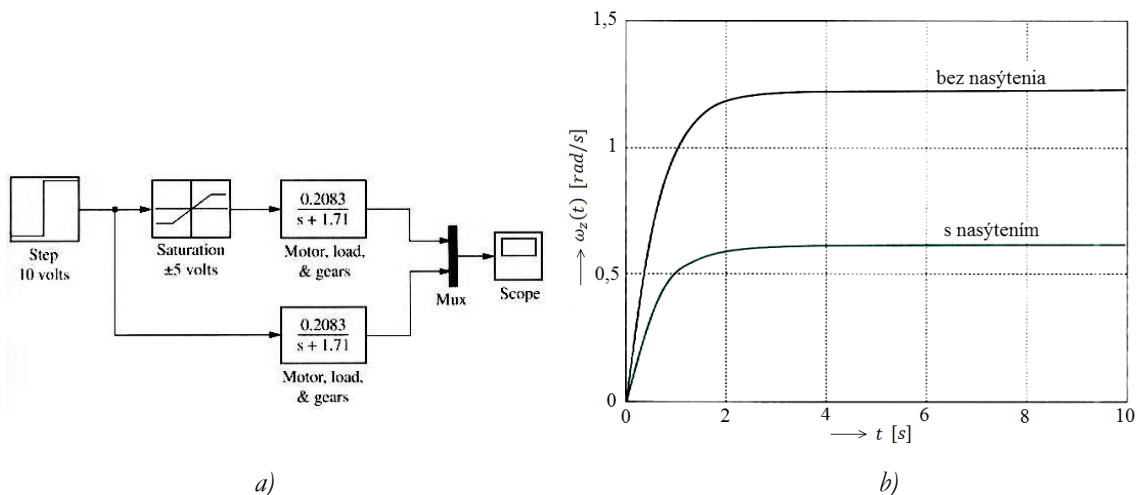
Parametre m , b a c sú kladné, zatiaľ čo konštanta c' môže byť kladná, alebo záporná. Stupeň nelinearity systému je charakterizovaný veľkosťou a znamienkom konštanty c' . Ak $c' > 0$, potom ide o tvrdnúcu pružinu, ak $c' < 0$, je to mäknúca pružina. Od znamienka a veľkosti konštanty c' závisí frekvencia vznikajúcich kmitov (Obr. 5.2b, [23]).



Obr. 5.2 Nelineárny mechanický systém (s nelineárnou pružinou) (a) a časové ododzvy systému pri rôznych hodnotách koeficienta pružnosti c' nelineárnej pružiny (b)

Vyšetríme vplyv nelineárneho člena (nasýtenie, mŕtvy chod a vôľu v zuboch) na vlastnosti proporcionálnej sústavy I. rádu, ktorá v prvom priblížení predstavuje mechanické vlastnosti motora s mechanickou časovou konštantou $t = 0,585 \text{ s} = 1/1,71 \text{ s}$. Na nasledujúcich grafoch je znázornená výstupná veličina nelineárneho systému, ktorá je porovnávaná s pôvodnou veličinou, zo systému bez zapojenej nelinearity.

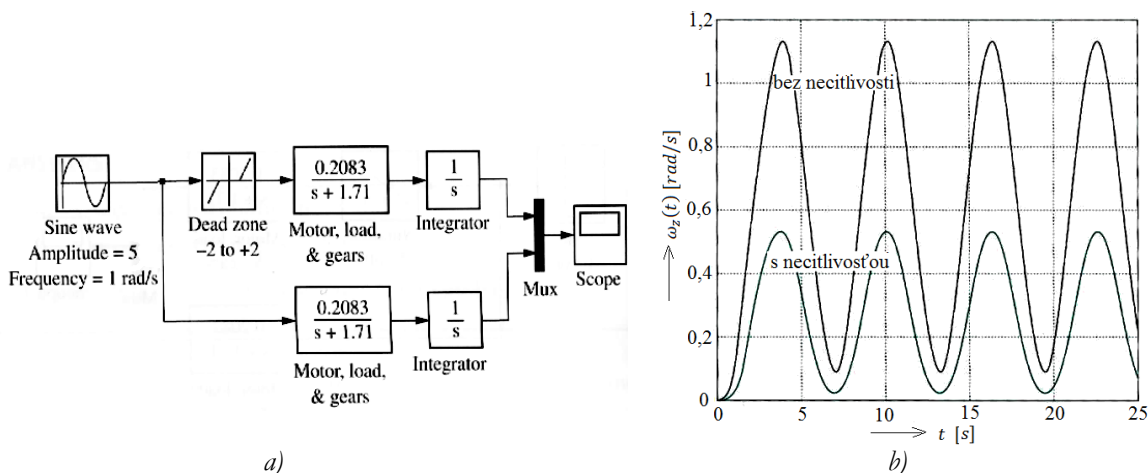
Uvažované zapojenie nelineárneho člena s nasýtením je na Obr. 5.3a. Na Obr. 5.3b je znázornený vplyv nasýtenia na veľkosť časovej odozvy systému. V praxi takýto prípad môže nastať, ak menič je nedostatočne dimenzovaný a na jeho výstupe neodstávame plné napätie (pri maximálnom riadiacom napätí na jeho vstupe). Výstup z nelineárneho systému (napr. uhlová rýchlosť na strane záťaže) má menšiu amplitúdu voči lineárnemu systému.



Obr. 5.3 Vplyv člena s nasýtením: a) simulačná schéma, b) priebehy na výstupe

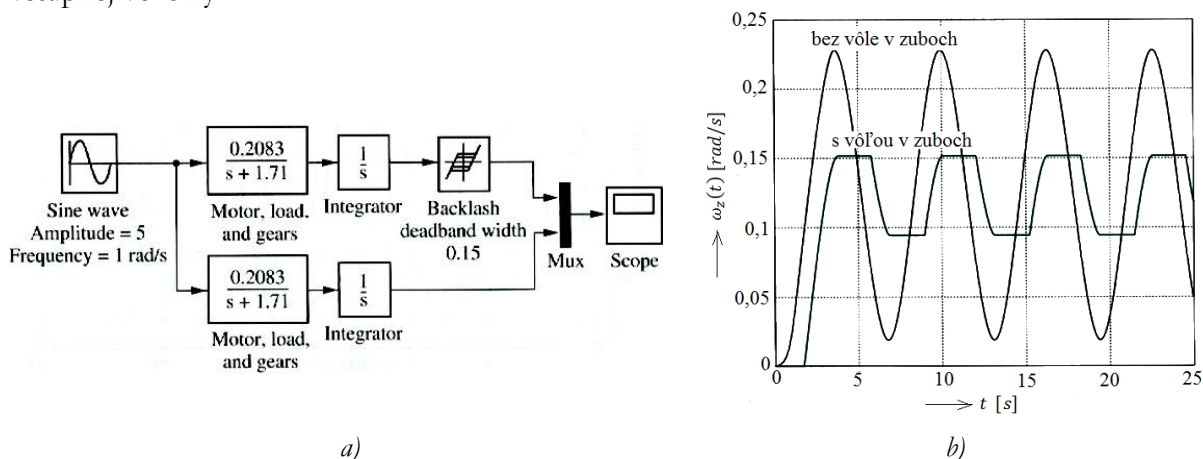
Pri vyšetrovaní ďalších systémov ako výstupnú veličinu sledujeme uhol natočenia motora, preto na jeho výstup rýchlosti zaradíme ešte integračný člen.

Ak nelineárny systém obsahuje nelineárny člen s necitlivosťou (schéma na Obr. 5.4a), čo v praxi predstavuje veľké trenie rotora motora, kedy motor nereaguje na malé napájacie napätia, potom sa táto necitlivosť prejavuje na priebehoch uhla natočenia, čím dostávame zmenšenú amplitúdu na výstupe (Obr. 5.4b) voči pôvodnej odozve systému na sínusové budenie. Vplyv vôľu v zuboch v prevodovke pohonu je znázornený v grafe pohonu na Obr. 5.4b, opäť pri sínusovom budení. Ak motor zmení smer otáčania, uhol natočenia výstupného hriadeľa ostáva nezmenený do chvíle, kým motor nezačne reverzovať.



Obr. 5.4 Vplyv suchého trenia motora na priebeh uhla natočenia hriadeľa pri sínusovom budení motora: a) simulačná schéma, b) priebehy na výstupe

Vplyv vôle v zuboch na priebeh časovej ododzvy systému pri sínusovom buzení je znázornený na Obr. 5.5. Priebeh výstupnej veličiny je deformovaný (Obr. 5.5b) a to vždy pri zmene derivácie vstupnej veličiny.



Obr. 5.5 Vplyv prevodovky so zubovou vôľou na priebeh uhla natočenia výstupného hriadeľa pri sínusovom buzení motora: a) simulačná schéma, b) priebehy na výstupe

5.3 Trvalé oscilácie a limitné cykly

V regulačných obvodoch s dvojpohovými regulátormi reléového typu s hysteréziou dochádza ku neustálom kmitom v obvode (obvod nebude kmitať vtedy, ak regulačný prvok bude obsahovať pásmo necitlivosti). Pri sledovaní dynamických dejov a statických regulačných vlastností obvodu s nespojitými členmi sa najčastejšie používa fázová rovina (priestor). Ak ide o sústavu II. rádu, stav obvodu určujú dve hodnoty – obvykle veľkosť odchýlky a jej prvá derivácia. Ak vynesieme tieto dva hodnoty na osi pravouhlého súradnicového systému, môžeme stav obvodu v každom okamihu definovať polohou zastupujúceho bodu v rovine, ktorú nazývame fázová rovina.

5.4 Linearizácia nelineárneho modelu systému

Prvým krokom pri riešení nelineárnych systémov je zostavenie diferenciálnych rovníc systému. Keďže metódy analýzy a syntézy lineárnych systémov sú veľmi dobre rozpracované, snažíme sa nelineárny systém previesť na lineárny – linearizovať ho, čo umožní aplikovať na neho lineárne metódy.

Linearizácia predstavuje vytvorenie lineárnej aproximácie nelineárneho systému v blízkom okolí ustáleného pracovného bodu, ak vstupný signál je nulový. Tento pracovný bod predstavuje rovnovážny stav systému. V druhom kroku linearizujeme nelineárnu diferenciálnu rovnicu a z linearizovanej diferenciálnej rovnice vieme pri nulových počiatočných podmienkach zostaviť prenos systému.

Ak systém obsahuje nelineárnu funkciu $y = f(x)$, potom ju linearizujeme v blízkom okolí pracovného bodu $A(x_0, y_0)$ nasledovne (Obr. 5.6a).

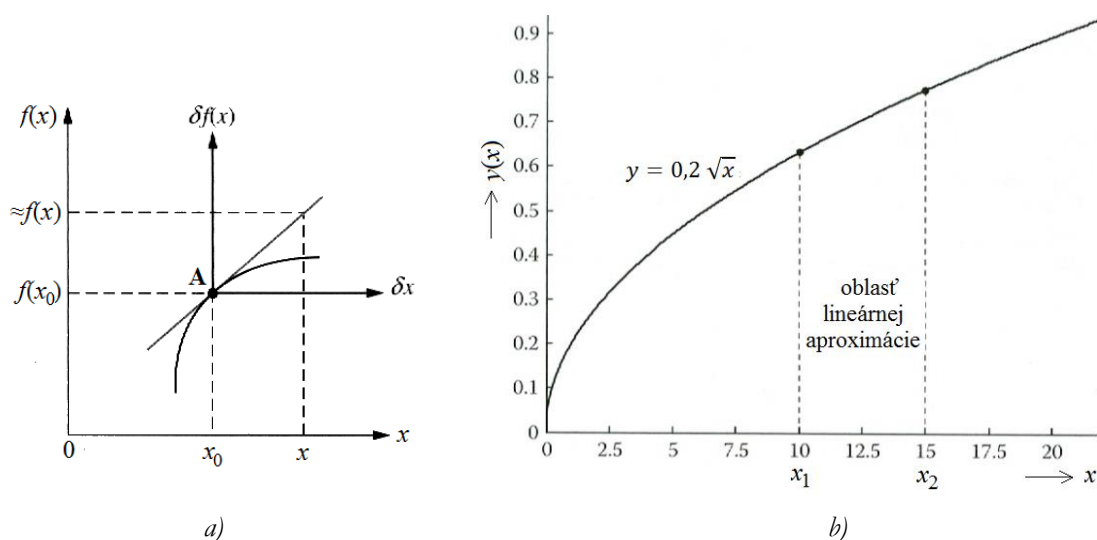
Smernicu krivky K dostaneme nasledovne:

$$y(x) - y(x_0) \approx K(x - x_0) \quad (5.2)$$

odkiaľ

$$\delta y(x) \approx K \delta x \quad (5.3)$$

$$y(x) \approx y(x_0) - (x - x_0) \approx y(x_0) + K \delta x \quad (5.4)$$



Obr. 5.6 Linearizácia nelineárnej funkcie: a) v okolí pracovného bodu **A**,
b) linearizácia funkcie $y = 0,2 \sqrt{x}$ na intervale $x_1 \leq x \leq x_2$

Tento postup môžeme formalizovať pomocou rozvoja do Taylorovho radu:

$$y(x) = y(x_0) + \left[\frac{df}{dx} \right]_{x=x_0} \frac{(x - x_0)}{1!} + \left[\frac{d^2f}{dx^2} \right]_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \left[\frac{d^3f}{dx^3} \right]_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^3}{3!} + \dots \quad (5.5)$$

kde derivácie sú v bode pre $x = x_0$. Pre malé odchýlky x okolo pracovného bodu x_0 môžeme zanedbať vyššie rády:

$$y(x) = y(x_0) + \left[\frac{df}{dx} \right]_{x=x_0} (x - x_0) + \text{výrazy pre vyššie rády} \quad (5.6)$$

čím linearizujeme funkciu $y(x)$ v tomto pracovnom bode a dostávame ten istý výraz ako v rov. (5.2):

$$y(x) - y(x_0) \approx \left[\frac{df}{dx} \right]_{x=x_0} (x - x_0) \quad (5.7)$$

resp.

$$\delta y(x) \approx [K]_{x=x_0} \delta x \quad (5.8)$$

Táto operácia odpovedá zámene krivky dotyčnicou vedenou v bode, v ktorého okolí robíme rozklad do radu. Uvedenú linearizáciu možno vykonať iba pre spojité krivky. Preto nie všetky statické charakteristiky môžu byť linearizované. Linearizácia nie je možná vtedy, keď nelinearita je príliš ostrá (skoková zmena prvej derivácie). Linearizácia potom vedie ku strate charakteristických vlastností pôvodnej závislosti.

Postup pri linearizácii:

- 1) Pomocou riešenia nelineárnych algebraických rovníc modelu určiť pracovný bod.
- 2) Prepísať všetky lineárne výrazy matematického modelu ako suma ich nominálnych hodnôt pracovného bodu a prírastkové veličiny, pričom derivácie konštantných výrazov sú rovné nule.
- 3) Nahradit' všetky nelineárne výrazy členmi nulového a prvého rádu Taylorovho rozvoja.
- 4) Taylorov rozvoj okolo pracovného bodu predstavuje konštantné výrazy vyjadrené pomocou premenných pracovného bodu a lineárne výrazy prírastkových veličín.

- 5) Pomocou algebraických rovníc definujúcich pracovný bod vykrátime konštantné výrazy a zostanú iba lineárne výrazy obsahujúce prírastkové veličiny.
- 6) Určíme počiatočné podmienky všetkých prírastkových premenných pomocou výrazov pre počiatočné podmienky premenných nelineárneho modelu.

Táto metóda umožňuje odvodiť lineárny model, ktorý aproximuje nelineárny model v blízkom okolí pracovného bodu.

5.5 Linearizácia nelineárneho stavového modelu systému

5.5.1 Linearizácia nelineárneho dynamického MIMO systému

Tento systém s n -stavovými, p -vstupnými a q -výstupnými veličinami (MIMO systém) je opísaný vektorovou diferenciálnou rovnicou dynamiky, [28]:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (5.9)$$

Medzi výstupnými a stavovými veličinami nech tiež je nelineárna závislosť daná nelineárnou vektorovou výstupnou funkciou:

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (5.10)$$

Nech derivácia i -tej stavovej veličiny je daná nelineárnou funkciou:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.11)$$

V rovnovážnom bode, danom hodnotami $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, u_{10}, u_{20}, \dots, u_{p0}$ je $\dot{x}_i = 0$. Ak definujeme prírastkové stavy pre zložky stavového a vstupného vektora:

$$\Delta x_j = x_j - x_{j0} \text{ pre } 1 \leq j \leq n \quad \text{a} \quad \Delta u_j = u_j - u_{j0} \text{ pre } 1 \leq j \leq p \quad (5.12)$$

potom linearizácia funkcie v tomto pracovnom bode je daná výrazom:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_j = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{x_j=x_{j0}} \Delta x_j + \sum_{j=1}^p \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right]_{u_j=u_{j0}} \Delta u_j \quad (5.13)$$

5.5.2 Linearizácia nelineárneho dynamického SISO systému

Linearizovaný stavový model systému SISO systému v okolí rovnovážneho stavu daného zložkami stavového vektora $\mathbf{x}_o$ a vstupnej veličiny u_o je:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{b} \Delta u \quad (5.14)$$

$$\Delta y = \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x} + \mathbf{d} \Delta u$$

kde matice majú tvar:

$$\mathbf{A} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{u_o, \mathbf{x}_o} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_o, u_o)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_o, u_o)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}_o, u_o)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}_o, u_o)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$\mathbf{b} = \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right]_{u_o, \mathbf{x}_o} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_o, u_o)}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}_o, u_o)}{\partial u} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = \left[\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right]_{u_o, \mathbf{x}_o} = \left[\frac{\partial h(\mathbf{x}_o, u_o)}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial h(\mathbf{x}_o, u_o)}{\partial x_n} \right]$$

$$\mathbf{d} = \left[\frac{\partial h}{\partial u} \right]_{u_o, \mathbf{x}_o}$$

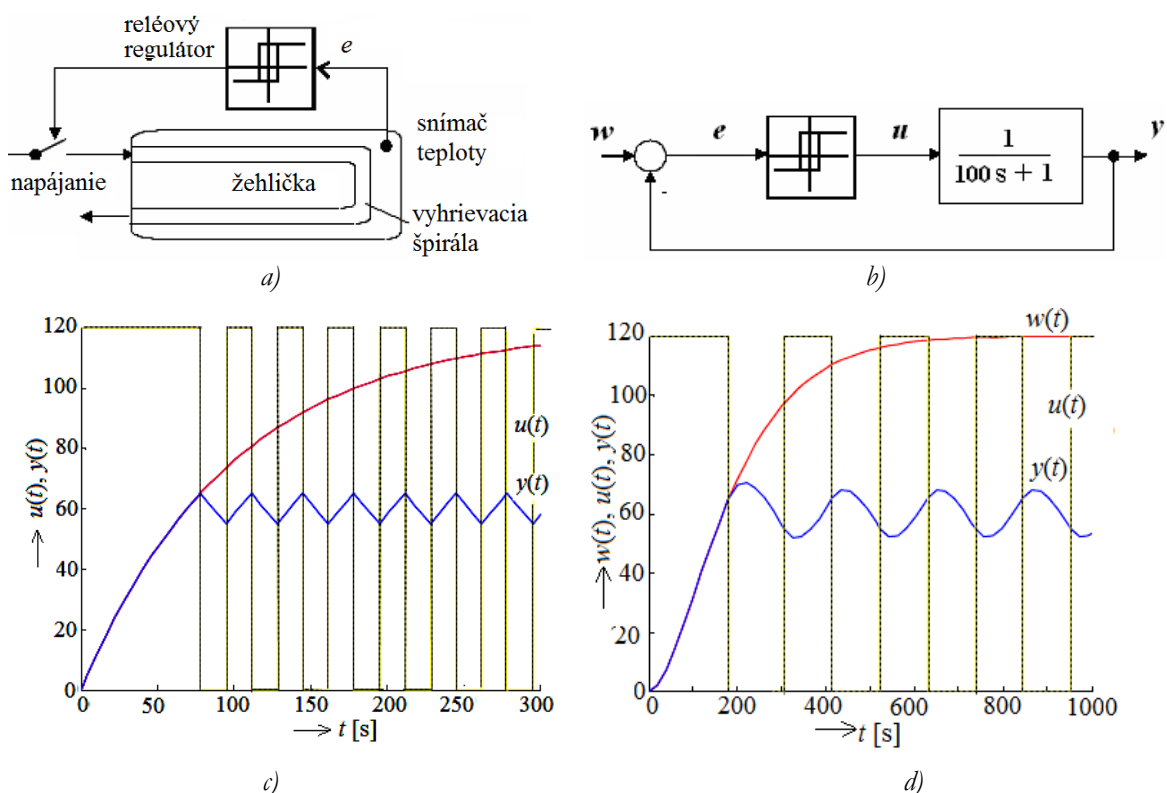
Uvedená linearizácia platí iba v blízkom okolí rovnovážneho stavu a získaný model sa často nazýva „small-signal model“. Symbol prírastku Δ sa niekedy v rovniciach vynecháva, čím implicitne máme na mysli, že pracujeme s linearizovaným systémom.

5.6 Príklady na modelovanie a linearizáciu nelineárnych systémov

5.6.1 Model dvojpolohového nelineárneho regulačného systému ohrievača

Pre ovládanie teploty ohrievacích telies sa používa dvojpolohový reléový regulátor. Náčrt analyzovaného systému na príklade žehličky je uvedený na Obr. 5.7. Model ohrievaného systému predstavuje sústavu I. rádu s prenosovou funkciou:

$$G(s) = \frac{1}{1 + 100s} \quad (5.16)$$



Obr. 5.7 Nelineárna dvojpolohová regulácia ohrievacieho telesa: a) náčrt zariadenia; b) bloková schéma regulačného obvodu; c) priebehy veličín pri sústave I. rádu; d) priebehy veličín pri sústave II. rádu

Požadovaná stredná hodnota teploty ohrievacieho telesa je 60 ° C, pričom môže kolísať v pásme 55 až 65°C. Pritom pri trvalom pripojení napájacieho napätia by teplota dosiahla hodnotu 120 °C.

Časové priebehy pôvodného systému i systémy s dvojpohovým regulátorom sú uvedené na Obr. 5.8c. Ako regulátor je použitý reléový člen s hystereziou. Veľkosť pásma, v ktorom kolíše teplota, je daná šírkou pásma hysterezie.

V prípade, ak systém by bol modelovaný ako sústava II. rádu s prenosom:

$$G(s) = \frac{1}{(1 + 100s)^2} \quad (5.17)$$

potom odpovedajúce časové ododzvy systému sú uvedené na Obr. 5.7d.

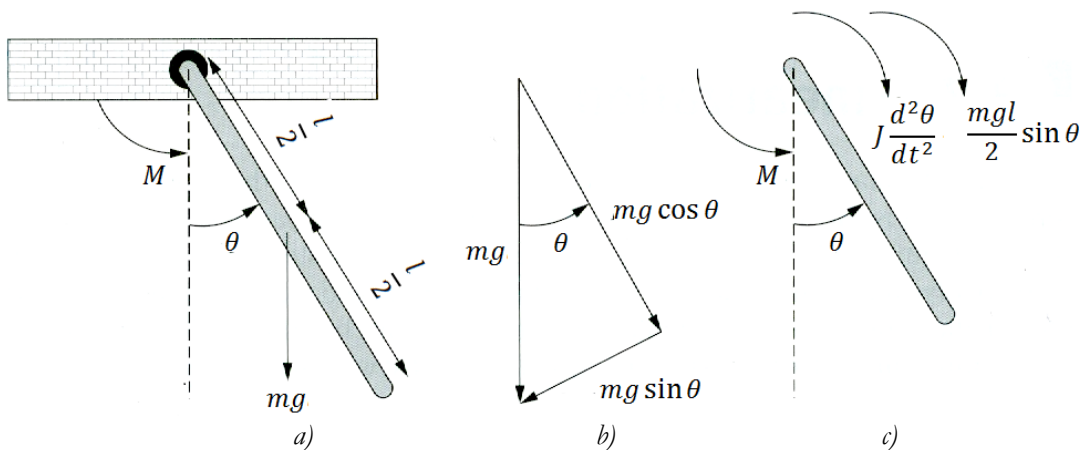
Dvojpohový reléový regulátor zavádza do systému trvalé kmity (a navyše vzniká opotrebovanie kontaktov výkonového spínača) a pre ich odstránenie je vhodnejšie použiť regulátor s reléovou charakteristikou s pásmom necitlivosti.

5.6.2 Linearizácia mechanického systému (jednoduchého kyvadla)

Jednoduché kyvadlo (Obr. 5.8a) so závažím o hmotnosti m na ramene l predstavuje nelineárnu mechanickú sústavu popísanú na základe silového a momentového diagramu (Obr. 5.8b, 5.8c) pohybovou rovnicou:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + \frac{mgl}{2} \sin\theta = M \quad y = \theta \quad (5.18)$$

kde J je moment zotrvačnosti ramena kyvadla vzhľadom k osi otáčania, g - gravitačné zrýchlenie, b - tlmenie v bode závesu, θ - uhol výchylky kyvadla od kolmice a M predstavuje hnací moment motora.



Obr. 5.8 Jednoduché kyvadlo: a) kinematická schéma, b) silový diagram, c) momentový diagram

Ak zvolíme stavové veličiny $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ a vstupnú veličinu (moment) $u = M$ a výstupnú veličinu (uhol vychýlenia) $y = \theta$, potom ekvivalentný nelineárny systém v stavovom zápise je:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{mgl}{2J} \sin x_1 - bx_2 + \frac{1}{J} u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Tento model je v tvare danom rovnicami (4.13) a (4.14), kde vektorová funkcia:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{mgl}{2J} \sin x_1 - bx_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}, u) = x_1 \quad (5.20)$$

Keďže funkcia $\mathbf{f}$ obsahuje výraz $\sin x_1$, táto nelinearita neumožňuje vyriešiť matematický model analyticky. Linearizujeme nelineárny model v rovnovážnom bode pre $x_1 = 0, x_2 = 0$, t.j. $\theta = 0, d\theta/dt = 0$ a vypočítame parciálne derivácie podľa rov. (4.18):

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgl}{2J} \cos x_1 & -b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right] = [1 \quad 0], \quad d = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial u} = 0 \quad (5.21)$$

Linearizovaný stavový model je:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgl}{2J} & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \Delta u$$

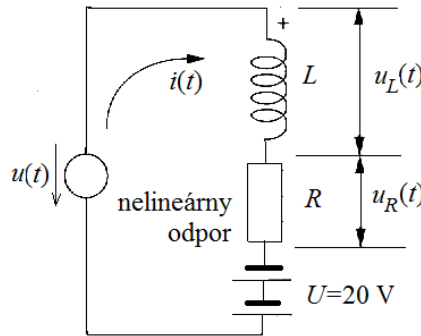
$$\Delta y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = \Delta x_1 \quad (5.22)$$

K tomu istému výsledku by sme dospeli aj linearizáciou v blízkom okolí rovnovážneho bodu $u = 0$, čo zodpovedá vertikálnej polohe kyvadla, kde malé uhly θ , kedy $\sin x \approx x$. Linearizovaný stavový model v tomto prípade je:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgl}{2J} & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u \quad (5.23)$$

5.6.3 Linearizácia nelineárneho elektrického obvodu

Nájdite prenosovú funkciu $F(s) = U_L(s)/U(s)$ nelineárneho elektrického obvodu (Obr. 5.9), ktorý obsahuje nelineárny rezistor, ktorého voltampérová charakteristika je daná vzťahom $i = 2e^{0,1 u_R}$, indukčnosť $L = 1$ H a zdroj konštantného napätia $U = 20$ V. Signál $u(t)$ predstavuje zdroj nízkeho napätia, takže pracovný bod je určený zdrojom konštantného napätia U .



Obr. 5.9 Nelineárny elektrický obvod

Riešenie:

Pre obvod zostavíme diferenciálnu rovnice pomocou druhého Kirchhoffovho zákona pričom $u_R = 10 \ln \frac{1}{2} i$:

$$u_L(t) + u_R(t) = u(t) \quad (5.24)$$

$$L \frac{di(t)}{dt} + 10 \ln \frac{1}{2} i(t) - U = u(t) \quad (5.25)$$

Najprv vyšetříme rovnovážny stav.

Položíme $u(t) = 0$ a určíme hodnotu ustáleného prúdu. Keďže $u_L(t) = L di/dt$, v ustálenom stave je $u_L(\infty) = 0$, takže na rezistore je napätie $u_R(\infty) = U$. Z charakteristiky rezistora určíme prúd: $i = 2e^{0,1 u_R} = 14,78$ A. Tento prúd predstavuje ustálený pracovný bod i_0 obvodu. Prúd v obvode bude $i = i_0 + \delta i$. Dosadením do rov. (5.26) dostávame:

$$L \frac{d(i_0 + \delta i)}{dt} + 10 \ln \frac{1}{2} (i_0 + \delta i) - U = u(t) \quad (5.26)$$

Pre linearizáciu nelineárneho výrazu $\ln \frac{1}{2} (i_0 + \delta i)$ použijeme vzťah:

$$\ln \frac{1}{2} (i_0 + \delta i) - \ln \frac{1}{2} i_0 = \left[\frac{d(\ln \frac{1}{2} i)}{dt} \right]_{t=t_0} \delta i = \left[\frac{1}{i} \right]_{t=t_0} = \frac{1}{i_0} \delta i \quad (5.27)$$

resp.:

$$\ln \frac{1}{2} (i_0 + \delta i) = \ln \left(\frac{i_0}{2} + \frac{1}{i_0} \delta i \right) \quad (5.28)$$

Po dosadení do rovnice (5.27) je linearizovaná rovnica je:

$$L \frac{di(t)}{dt} + 10 \ln \left(\frac{i_0}{2} + \frac{1}{i_0} \delta i \right) - U = u(t) \quad (5.29)$$

Ak dosadíme za $L = 1$ H a $i_0 = 14,78$ A, výsledná linearizovaná rovnica bude mať tvar:

$$\frac{d\delta i(t)}{dt} + 0,677 \delta i = u(t) \quad (5.30)$$

odkiaľ po prepise do Laplaceovej transformácie dostávame výraz pre prúd:

$$\delta i(s) = \frac{1}{s + 0,677} U(s) \quad (5.31)$$

Napätie na indukčnosti je:

$$u_L(t) = L \frac{d}{dt} (i_0 + \delta i) = L \frac{d \delta i}{dt} \quad (5.32)$$

čo v Laplaceovej transformácii dáva:

$$U_L(s) = L s \delta i(s) \quad (5.33)$$

Po dosadení do rov. (5.34) dostaneme:

$$U_L(s) = s \frac{1}{s + 0,677} U(s) \quad (5.34)$$

odkiaľ je prenos linearizovaného obvodu v pracovnom bode, ktorý je daný prúdom $i_0 = 14,78$ A:

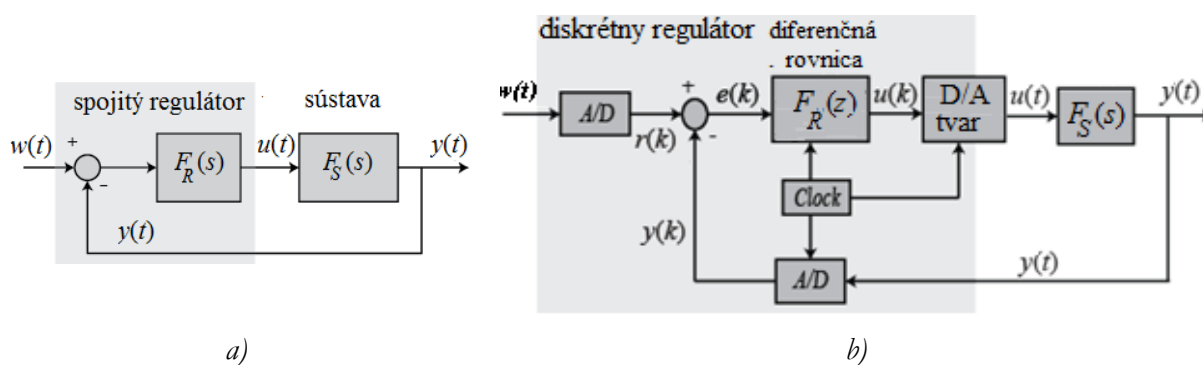
$$F(s) = \frac{U_L(s)}{U(s)} = \frac{s}{s + 0,677} \quad (5.35)$$

ktorý platí pre malé zmeny vstupného napätia $u(t)$.

6 MODELOVANIE SYSTÉMOV DISKRÉTNEHO ČASU

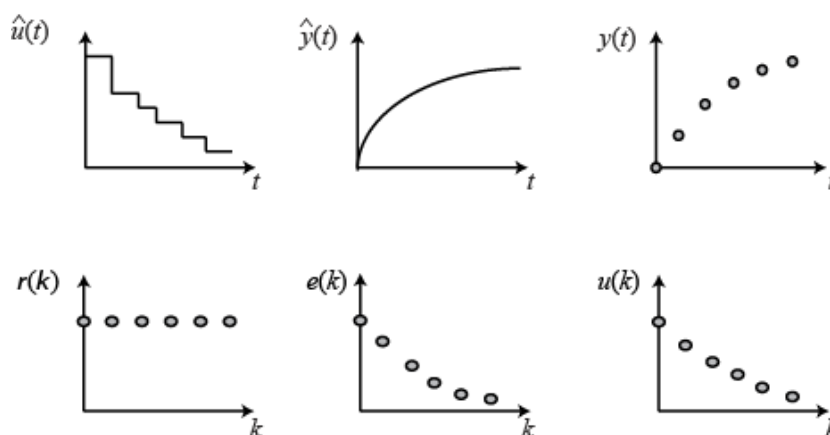
6.1 Prehľad diskretných systémov

Doteraz sme sa zaoberali spojitými dynamickými systémami – takými, ktoré na vstupe i výstupe mali spojité veličiny. V praxi sa však často stretávame so systémami, kde veličiny sa menia nespojite s určitou periódou – je to napríklad prípad číslicových regulátorov. Na Obr. 6.1 je znázornený uzavretý regulačný obvod so spojitým regulátorom (Obr. 6.1a) a s diskretným regulátorom (Obr. 6.1b), kde vytieňovaná časť predstavuje ekvivalentnú digitálnu náhradu spojitého regulátora z Obr. 6.1a. Spojitý referenčný signál sa v A/D prevodníku mení na diskretný, ktorý sa spracováva v diskretnom regulátore $F_R(z)$ a tento potom cez D/A prevodník a tzv. tvarovací obvod je vedený na vstup regulovanej sústavy so spojitým prenosom $F_S(s)$. Činnosť A/D a D/A prevodníka je riadená hodinovými impulzmi s konštantnou dobou periódy T , ktoré sú vedené z bloku Clock.



Obr. 6.1 Porovnanie regulačného obvodu:
a) so spojitým regulátorom, b) s diskretným regulátorom

Navonok sa oba systémy správajú rovnako, ale základný rozdiel medzi oboma regulačnými obvodmi spočíva v spracovaní signálov vo vnútri obvodu – regulátor na Obr. 6.1.b spracováva číslicové (diskrétné) signály, zatiaľ čo regulátor v obvode na Obr. 6.1a pracuje so spojitým signálom. Ilustračný príklad časových priebehov jednotlivých veličín v regulačnom obvode s diskretným regulátorom je uvedený na Obr. 6.2.



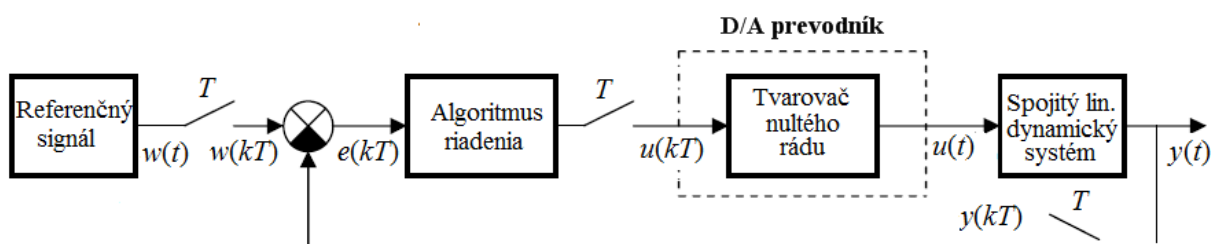
Obr. 6.2 Časové priebehy jednotlivých veličín v obvode s diskretným regulátorom

A/D prevodník na vstupe počítača predstavuje ideálny vzorkovač, ktorý prevádza spojitý výstup $y(t)$ a referenčný signál $w(t)$ s konštantnou periódou vzorkovania na T na funkcie: $y(kT), w(kT)$, ktoré sú diskkrétne v časových okamihoch $t = kT$ pre $k = 1, 2, \dots$

D/A prevodník na výstupe počítača prevádza vypočítané diskkrétne hodnoty riadenia $u(kT)$ na spojitý riadiaci signál $u(t)$. Tento prevodník „pridržiava“ vypočítanú hodnotu riadenia počas doby T a preto ho modelujeme ako ideálny vzorkovač v sériovom spojení s tzv. tvarovačom nultého rádu, na ktorého výstupe je spojitá, konštantná v každom intervale vzorkovania, privádzaná na vstup regulovaného systému po písaného spojitým prenosom $F_s(s)$

Blok, označený ako diferenčná rovnica, predstavuje vlastný naprogramovaný algoritmus riadenia – prevod vzoriek regulačnej na požadovanú hodnotu signálu vstupujúceho do sústavy.

Schému na Obr. 6.1 možno prehľadne rozkresliť tak, ako je to uvedené na Obr. 6.3 (bez ohľadu na hardvérovú realizáciu obvodu).



Obr. 6.3 Rozkreslenie schémy regulačného obvodu na diskrétnu spojitú časť

Ako vidíme, v diskrétnom regulačnom obvode sa vyskytuje ako spojitý, tak aj diskrétne signály. Pri návrhu takýchto obvodov je potrebné nájsť diskrétne ekvivalent spojitých signálov. Analýza takéhoto systému si vyžaduje použitie vhodného matematického aparátu pre diskkrétne funkcie v závislosti na čase – Z transformáciu.

Pre návrh diskrétného algoritmu riadenia existujú dva rozdielne prístupy [22]:

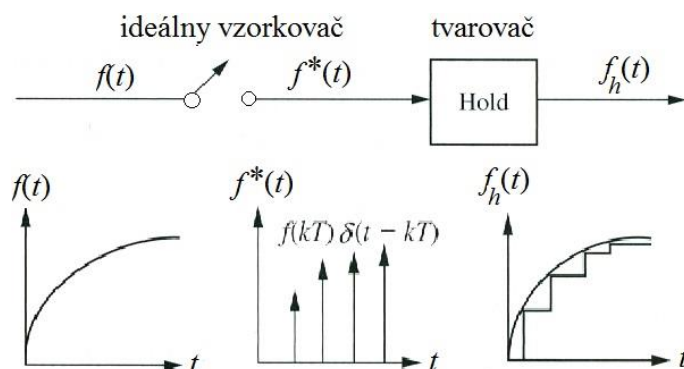
- 1) Vytvoríme diskrétne model $F_S(z)$ pre sériové spojenie prenosov riadeného spojitého lineárneho dynamického systému a tvarovača nultého rádu (s konštantným výstupom v dobe medzi diskrétnymi impulzmi) a vykonáme priamy návrh diskrétného regulátora $F_R(z)$.
- 2) Vyjdeme zo znalosti spojitých modelu $F(s)$ riadeného dynamického systému, navrhujeme spojitý regulátor $F_R(s)$ s použitím nejakej vhodnej návrhovej metódy. Následne vykonáme diskretizáciu navrhnutého spojitého regulátora, teda $F_R(s)$ prepočítame na $F_R(z)$. Tento prístup sa síce javí ako jednoduchší, ale má svoje obmedzenia – napr. neumožňuje aplikáciu špeciálnych metód návrhu pre diskkrétne systémy.

Z uvedeného vyplýva, že vhodnejšie je nájsť diskrétne ekvivalent prenosu spojitých systému – zostaviť diskrétne matematický model sústavy $F_S(z)$, v Z-transformácii (obsahujúcim aj tvarovač nultého rádu) a pracovať s ním.

6.2 Matematický popis diskrétnych systémov a z-transformácia

Filozofia matematického popisu diskrétnych systémov je nasledovná: chceme nájsť diskrétne funkciu prenosu sústavy $F_S(z)$ tak, aby vzorkovaný výstup spojitých systému s prenosom $F_S(s)$ pri po častiach konštantnom vstupe zodpovedal jeho diskrétnemu ekvivalentu. Konkrétne signál $f^*(k) = f^*(kT)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ na (Obr. 6.4a) predstavuje vzorku vstupného signálu v čase kT ,

ktorý je konštantný do časového okamihu $t = (k + 1)T$, čo je charakteristickou funkciou tvarovacieho člena (tvarovača) nultého rádu (Obr. 6.4b).



Obr. 6.4 Tvarovací člen nultého rádu: a) zapojenie tvarovacieho člena do obvodu;
b) časový priebeh výstupného signálu

Vzorky vstupného signálu $f^*(t)$ prechádzajú tvarovacím členom (Obr. 6.4b), ktorého výstupný signál vstupuje do spojitkej sústavy $F_S(s)$. Vzorkovaná funkcia $f^*(t)$ predstavuje postupnosť delta funkcií vzorkovaných zo vstupného signálu $f(t)$ v diskrétnych časových okamihoch $t = kT, k = 0, 1, 2, \dots$

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} f(kT) \delta(t - kT) \quad (6.1)$$

Tvarovací člen nultého rádu spôsobuje schodovitú aproximáciu funkcie $f(t)$ a preto výstupný signál v časovom intervale $\langle kT; (k + 1)T \rangle$ bude mať konštantnú hodnotu.

Laplaceovou transformáciou rovnice. (6.1) dostaneme:

$$F^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} f(kT) e^{-kTs} \quad (6.2)$$

Ak položíme $z = e^{Ts}$, potom túto rovnicu prepíšeme:

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} f(kT) z^{-k} \quad (6.3)$$

čo predstavuje definíciu z-transformácie signálu $f(kT)$. Teda: diskretná časová funkcia $f(kT)$ môže byť transformovaná na funkciu $F(z)$ platí aj naopak – funkcia $F(z)$ môže byť spätne transformovaná na $f(kT)$:

$$f(kT) \Leftrightarrow F(z) \quad (6.4)$$

Pri hľadaní z-obrazu signálu postupnosti impulzov používame vyššie uvedené vzťahy. Napr. pre rampovú funkciu $f(kT) = kT$ podľa rov. (6.1) dostaneme vzorkovanú funkciu:

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} kT \delta(t - kT) \quad (6.5)$$

Z ktorej po Laplaceovej transformácii tejto rovnice dostaneme:

$$F^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} kT e^{-kTs} \quad (6.6)$$

Po zavedení $z = e^{Ts}$, teda $e^{-kTs} = z^{-k}$ dostaneme z -obraz:

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} k T z^{-k} \quad (6.7)$$

Sumu v tejto rovnici upravíme do uzavretého vzťahu – po jej rozpísaní máme:

$$F(z) = T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots = Tz(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) = Tz \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (6.8)$$

čo nám dáva z-transformáciu funkcie $f(kT) = kT$.

Pre každú funkciu $F(s)$ v Laplaceovej transformácii možno nájsť ekvivalentnú funkciu $F(z)$ v z-transformácii. Obrazy niektorých základných časových funkcií sú uvedené v Tab. 6.1.

Tab. 6.1 Tabuľka obrazov v Laplaceovej transformácii a v z-transformácii niektorých časových funkcií

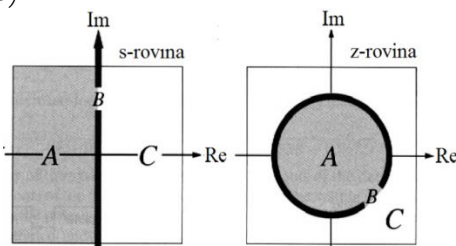
Časová funkcia $f(t)$	Vzorkovaná funkcia $f(kT)$	Laplaceov obraz $F(s)$	z-obraz $F(z)$
$1(t)$	$1(kT)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	kT	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$e^{-akT} - e^{-bkT}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{z(e^{-aT} - e^{-bT})}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$

Pre nájdenie časového originálu (vzorkovanej časovej funkcie) z jej obrazu v z-transformácii (inverzná z-transformácia) existuje niekoľko metód; pre úplnosť ich tu iba spomenieme:

- 1) Rozkladom $F(z)$ na parciálne zlomky a určením reziduí, ktoré zodpovedajú príslušným singulárnym bodom (pólom) funkcie $F(z)$.
- 2) Použitím tabuliek prevodných vzťahov
- 3) Priamym delením polynómu čitateľa polynomiálneho zlomku jeho menovateľom. Pri tomto však nemusíme získať výsledok v uzavretom tvare.
- 4) Výhodným použitím funkcií Control toolboxu v MATLABE

Vysvetlenie a aplikácie prvých troch metód je mimo náplne daného predmetu a tým aj tohto učebného textu. Použitie funkcií Control toolboxu v MATLABe je náplňou podkapitoly 11.4.

Pre úplnosť poznamenajme, že zatiaľ čo v Laplaceovej transformácii korene stabilného systému ležia v ľavej polrovine komplexnej roviny, pri z-transformácii tomu zodpovedá vnútro jednotkovej kružnice (Obr. 6.5).



Obr. 6.5 Vzájomná súvislosť stabilnej oblasti (A), nestabilnej (C) a hranice stability (B) medzi s-rovinou (polohou koreňov prenosovej funkcie $F(s)$) zodpovedajúcou z-rovinou

6.3 Modely lineárnych diskretných dynamických systémov

Diskretný dynamický systém je opísaný:

- diskretnou prenosovou funkciou v z -transformácii:
 - v tvare polynómu, alebo
 - v tvare koreňových súčiniteľov (nuly-póly-zosilnenie)
- diskretným stavovým modelom

Diskrétna prenosová funkcia.

Prenosová funkcia diskretného dynamického systému v polynomiálnom tvare je daná:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}} \quad (6.9)$$

kde konštanty a_i a b_i sú koeficientmi menovateľa, resp. čitateľa prenosovej funkcie. Časý je zápis prenosovej funkcie z operátorom z miesto z^{-1} .

Zápis v tvare koreňových súčiniteľov:

$$H(z) = \frac{q(z)}{p(z)} = k \frac{(z - q_1)(z - q_2) \dots (z - q_n)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_{nm})} \quad (6.10)$$

Stavový model v diskretnom stavovom priestore

Diskretný systém možno opísať v stavovom priestore nasledujúcimi rovnicami (pre SISO systém):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}^*(k) + \mathbf{b}u^*(k) \\ y^*(k) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*(k) + du^*(k) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Ako zápis diskretnej prenosovej funkcie, tak i stavovú reprezentáciu diskretného stavového systému v súčasnosti takmer výlučne riešime prostriedkami MATLABu (podkapitola 10.3).

Viac informácií o modelovaní diskretných systémov čitateľ nájde v [32] – [36].

7 DYNAMICKE MODELY ZÁKLADNÝCH MECHANICKÝCH PODSYSTÉMOV

7.1 Moment zotrvačnosti telies

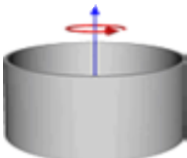
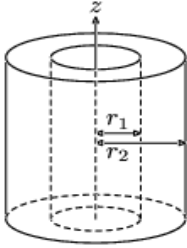
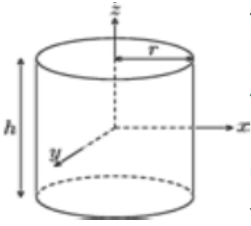
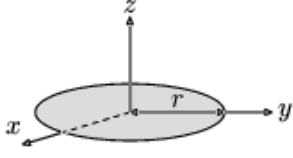
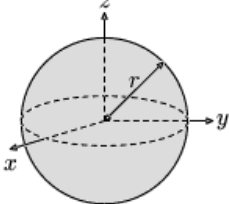
Pre analytické zostavenie dynamického modelu rotačného mechanického systému potrebujeme poznať moment zotrvačnosti telesa. Moment zotrvačnosti závisí od tvaru a hmotnosti telesa, ale aj od osi otáčania, ktorú si zvolíme (môže prechádzať ťažiskom telesa, mimo ťažiska i mimo samotného telesa). Moment zotrvačnosti I je fyzikálna veličina, ktorá vyplýva zo vzťahu:

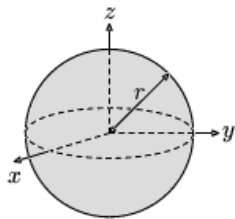
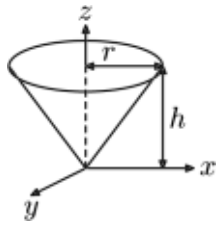
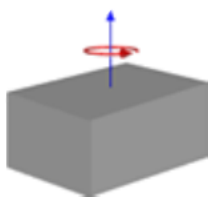
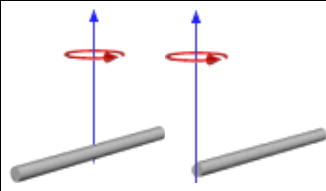
$$J = mr^2 \quad (7.1)$$

kde m je hmotnosť telesa v (kg)
 r je vzdialenosť od uvažovanej osi v (m)

Momenty zotrvačnosti najčastejšie sa vyskytujúci telies sú prehľadne uvedené v Tab. 7.1 [37].

Tab. 7.1 Momenty zotrvačnosti niektorých telies

Popis	Tvar telesa	Moment zotrvačnosti, poznámka
Dutá valcová plocha		$J = mr^2$
Dutý hrubostenný		$J_z = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$ $J_x = J_y = \frac{1}{12}m[3(r_1^2 + r_2^2) + h^2]$
Plný valec		$J = \frac{1}{2}mr^2$ $J_x = J_y = \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2)$
Tenký disk		$J_z = \frac{1}{2}mr^2$ $J_x = J_y = \frac{1}{4}mr^2$
Plná guľa		$J = \frac{2}{5}mr^2$

Dutá guľová plocha		$J = \frac{2}{3}mr^2$
Kužeľ (pravouhlý)		$J_z = \frac{3}{10}mr^2$ $J_x = J_y = \frac{3}{5}m\left(\frac{r^2}{4} + h^2\right)$
Plný kváder výška h , šírka w , dĺžka l		$J_h = \frac{1}{12}m(w^2 + h^2), \quad J_h = \frac{1}{12}m(h^2 + l^2)$ $J_d = \frac{1}{12}m(h^2 + w^2)$ Kocka: $J = \frac{1}{6}ml^2$
Tyč s dĺžkou l hmotnosťou m		S osou rotácie v strede: $J = \frac{1}{12}ml^2$ na kraji: $J = \frac{1}{3}ml^2$ platí za predpokladu, že hmotnosť tyče je rozmiestnená rovnomerne

Steinerova veta

Pre výpočet momentu zotrvačnosti telesa k osi vzhľadom na os neprechádzajúcu ťažiskom, pričom poznáme moment zotrvačnosti J_0 a vzhľadom na s ňou **rovnobežnú** os, ktorá ťažiskom prechádza, použijeme *Steinerovu* vetu. Podľa nej, ak je hmotnosť telesa m , vzdialenosť osí je d a moment zotrvačnosti J vzhľadom na tú, ktorá neprechádza ťažiskom sa vypočíta:

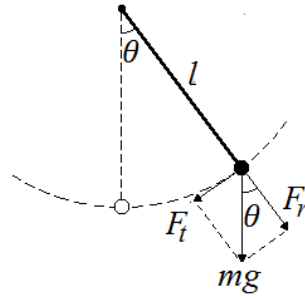
$$J = J_0 + md^2 \quad (7.2)$$

7.2 Modely kyvadiel

7.2.1 Jednoduché kyvadlo

Obr. 7.1 zobrazuje idealizované kyvadlo, s bezhmotnostnou tyčou dĺžky l , na konci ktorej je upevnené závažie s hmotnosťou m . Po vychýlení závažia z kludovej polohy toto kmitá po naznačenej kruhovej dráhe s dobou periódy T .

Na závažie pôsobí gravitačná sila, ktorú možno rozložiť do dvoch zložiek: tangenciálnej F_t , ktorá spôsobuje pohyb po kruhovej dráhe a odstredivej zložky F_r , proti ktorej v ramene kyvadla pôsobí opačná sila. Okrem toho, môže na kyvadlo pôsobiť tlmiaca sila od trenia v otočnom kĺbe a odpor prostredia (vzduchu).



Obr. 7.1 Jednoduché kyvadlo

Označme $s(t)$ dráhu od najnižšieho bodu kyvadla po polohu, v ktorej sa nachádza v čase t . Tomu nech zodpovedá uhol $\theta(t)$. Nech $y(t)$ je vzdialenosť pozdĺž oblúka od najnižšieho bodu k polohe závažia v čase t . Pri pohybe vpravo nech dráha s je v kladnom smere. Gravitačná sila smeruje dole a má veľkosť mg (hmotnosť $\times$ zrýchlenie), kde g je gravitačné zrýchlenie ($9,807 \text{ m/s}^2$ pri hladine mora). Znamená to, že sila pôsobiaca v tangenciálnom smere je rovná $-mg \sin \theta$ (záporné znamienko je, že táto sila pôsobí v zápornom smere, keď uhol θ je kladný a naopak.) Pretože táto sila je hmotnosť $\times$ zrýchlenie, to znamená, že:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \sin \theta \quad (7.3)$$

Medzi dráhou s a uhlom θ je lineárny vzťah (dĺžka oblúka) $s = l\theta$, takže druhá derivácia dráhy s je l -krát násobkom druhej derivácie θ . Týmto dostávame model netlmeného systému druhého rádu:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (7.4)$$

Ďalej pridáme tlmenie modelu. Predpokladajme, že tlmiaca sila je úmerná rýchlosti. S ohľadom na to, že dĺžka oblúka a stredový uhol sú proporcionálne úmerné (s konštantou úmernosti l), nezáleží na tom, či budeme používať lineárnu alebo uhlovú rýchlosť. Tlmenie je úmerné uhlovej rýchlosti $-b \cdot d\theta/dt$, kde záporné znamienko znamená, že tlmiaca sila pôsobí proti smeru pohybu. Po uvažovaní vplyvu trenia rovnica bude mať tvar:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{b}{m} \frac{d\theta}{dt} - \frac{g}{l} \sin \theta \quad (7.5)$$

Po prevedení výrazov na ľavú stranu rovnice dostávame:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (7.6)$$

Táto rovnica je podobná rovnici pre kmitanie závažia na pružine s tlmičom:

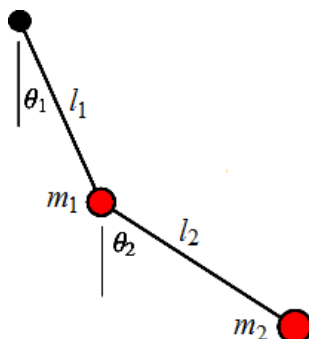
$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y = 0 \quad (7.7)$$

kde uhol θ nahradí dráhu y , gravitačné zrýchlenie g nahradí konštantu pružnosti k , a l je nahradené hmotnosťou m . Je tu však jeden podstatný rozdiel medzi týmito dvoma rovnicami: prítomnosť funkcie sínus v rovnici kyvadla. Táto nelinearita je príčinou, prečo pre výstupnú veličinu – uhol θ nemôžeme dostať jednoduchý výraz.

Ide o kmitavú sústavu II. rádu, ktorej časové priebehy uhlového vychýlenia kyvadla sú dané parametrami mechanickej sústavy.

7.2.2 Dvojité kyvadlo

Dvojité kyvadlo je príkladom jednoduchého dynamického systému, ktorý vykazuje komplexné správanie, vrátane chaosu. Dvojité kyvadlo (Obr. 7.2) pozostáva z dvoch jednoduchých kyvadiel, pričom prvé je ukotvené klbom v pevnej základni a druhé je k nemu pohyblivo pripojené v mieste ťažiska.



Obr. 7.2 Dvojité kyvadlo

Dvojité kyvadlo pozostáva z 2 hmotných bodov s hmotnosťami m_1 a m_2 , ktoré sú zavesené na dvoch voľne visiacych lanách s dĺžkami l_1 a l_2 , pričom hmotnosti lán sú zanedbateľné. V jednotlivých klboch nech pôsobí tlmenie b_1 a b_2 . Ďalej označme uhly vychýlenia každého kyvadla θ_1 a θ_2 .

Kyvadlo sa uvedie do pohybu vychýlením jednotlivých častí o uhol φ_1 a φ_2 , ktoré sa definujú v počiatočných podmienkach. Zároveň na hmotný bod m_2 môže pôsobiť externá sila F .

Z grafického znázornenia na Obr. 7.2 dostaneme súradnice koncových bodov kyvadla:

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1 \quad (7.8)$$

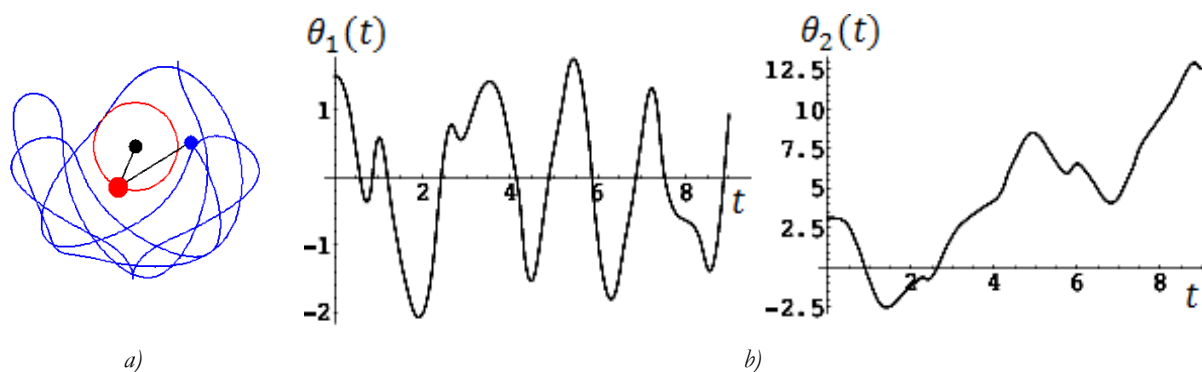
$$y_1 = -l_1 \cos \theta_1 \quad (7.9)$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad (7.10)$$

$$y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \quad (7.11)$$

Vzhľadom na zložitosť matematického popisu sa takéto systémy riešia pomocou Lagrangeových rovníc II. druhu. Podrobné riešenie je uvedené v podkapitole 9.3.

Tu pre ilustráciu uveďme iba časový priebeh kývania – uhlov θ_1 a θ_2 (Obr. 7.3).

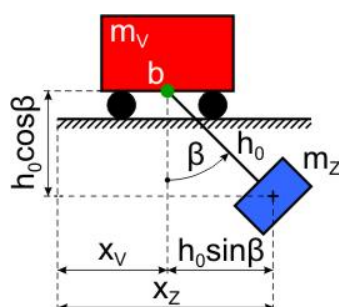


Obr. 7.3 Kývanie dvojitého kyvadla: a) polohy koncového bodu, eb) príklad časových priebehov jednotlivých uhlov kyvadiel

7.2.3 Kyvadlo na vozíku

Priame kyvadlo (so závažím pod bodom upevnenia) a inverzné kyvadlo (závažie je nad bodom upevnenia) predstavujú základné mechanické podsystemy systémov pre riadenie pohybu, umožňujúce overovať rôzne riadiace algoritmy. Ich vlastnosťou je, že kmitavosť systému (s tlmenými kmitmi) je dosiahnutá iba pôsobením gravitačných síl (bez pružných a tlmiacich členov).

Praktickú realizáciu predstavuje portálový žeriav, ktorý je v podstate nelineárnym systémom s premenlivými parametrami s viacerými vstupmi a výstupmi (MIMO systém). Pozostáva z viacerých subsystemov, ktoré navzájom na seba vplyvajú, sú to: vozík s bremenom (Obr. 7.4) a pri úplnom riešení modelu aj servopohon s prevodovkou [39].



Vysvetlivky:

- m_zhmotnosť bremena
- m_vhmotnosť vozíka
- h_0dĺžka lana
- ggravitačné zrýchlenie
- F_vakčný zásah (sila pôsobiaca na vozík)
- x_vpoloha vozíka
- βvýchylka lana

Obr. 7.4 Kinematická schéma priameho kyvadla

Vstupom do systému je sila F_v pôsobiaca na vozík v horizontálnom smere, ktorej pôsobením dochádza k osciláciám bremena, ktoré sú nežiadúce z bezpečnostných a energetických dôvodov.

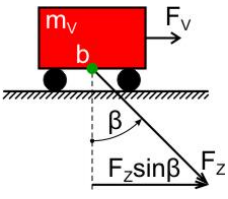
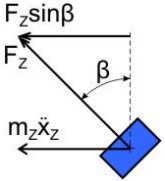
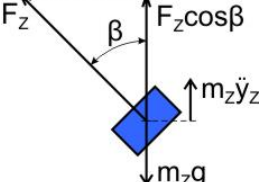
Odpovedajúce vzťahy popisujúce pohyb kyvadla, sú prehľadne uvedené v Tab 7.2.

Tab. 7.2 Základné rovnice pre polohu, rýchlosť a zrýchlenie priameho kyvadla

Parameter	Pohyb v smere x
Poloha:	$x_z = x_v + h_0 \sin \beta$ (7.12)
Rýchlosť závažia dostaneme prvou deriváciou polohy:	$\dot{x}_z = \dot{x}_v + h_0 \dot{\beta} \cos \beta$ (7.13)
Zrýchlenie dostaneme druhou deriváciou polohy závažia:	$\ddot{x}_z = \ddot{x}_v + h_0 \ddot{\beta} \cos \beta - h_0 \dot{\beta}^2 \sin \beta$ (7.14)
	Pohyb v smere y
Poloha:	$y_z = h_0 \cos \beta$ (7.15)
Rýchlosť:	$\dot{y}_z = -h_0 \dot{\beta} \sin \beta$ (7.16)
Zrýchlenie:	$\ddot{y}_z = -h_0 \ddot{\beta} \sin \beta - h_0 \dot{\beta}^2 \cos \beta$ (7.17)

Dynamické sily pôsobiace na vozík a kyvadlo odvodíme v zložkovom tvare (Tab. 7.3).

Tab. 7.3 Pohybové rovnice kyvadla - matematický popis podsystémov

	Pohybová rovnica vozíka v smere osi x: $m_v \ddot{x}_v = F_v + F_z \sin \beta \quad (7.18)$ kde $\ddot{x}_v$ - zrýchlenie vozíka
	Pohybová rovnica závažia v smere osi x: $m_z \ddot{x}_z = -F_z \sin \beta \quad (7.19)$ kde $F_z = m_z g$ - gravitačná sila $\ddot{x}_z$ - zrýchlenie závažia v smere x_z
	Pohybová rovnica závažia v smere osi y: $m_z \ddot{y}_z = m_z g - F_z \cos \beta \quad (7.20)$ kde β - uhol vychýlenia závažia $\ddot{y}_z$ - zrýchlenie závažia v smere y_z

Odvedenie úplného matematického modelu priameho kyvadla na vozíku

Na to, aby sme mohli zostaviť kompletný matematický model kyvadla, potrebujeme poznať okrem síl pôsobiacich na vozík a závažie, aj uhlové zrýchlenie $\ddot{\beta}$ v otočnom kĺbe kyvadla.

Pre odvedenie uhlového zrýchlenia $\ddot{\beta}$ najprv dosadíme (7.14) do (7.19) a po následnej úprave dostaneme vzťah:

$$m_z \ddot{x}_z = -F_z \sin \beta = m_z (\ddot{x}_v + h_0 \ddot{\beta} \cos \beta - h_0 \dot{\beta}^2 \sin \beta) \quad (7.21)$$

$$F_z = -\frac{m_z (\ddot{x}_v + h_0 \ddot{\beta} \cos \beta - h_0 \dot{\beta}^2 \sin \beta)}{\sin \beta} \quad (7.22)$$

Dosadením (7.21) do (7.18) dostaneme:

$$m_v \ddot{x}_v = F_v - m_z (\ddot{x}_v + h_0 \ddot{\beta} \cos \beta - h_0 \dot{\beta}^2 \sin \beta) \quad (7.23)$$

$$F_v = (m_v + m_z) \ddot{x}_v + m_z h_0 \ddot{\beta} \cos \beta - m_z h_0 \dot{\beta}^2 \sin \beta \quad (7.24)$$

Ďalej dosadíme (7.17) a (7.22) do (7.20):

$$\begin{aligned} & -m_z h_0 \ddot{\beta} \sin \beta - m_z h_0 \dot{\beta}^2 \cos \beta = \\ & = m_z g + (m_z \ddot{x}_v + m_z h_0 \ddot{\beta} \cos \beta - m_z h_0 \dot{\beta}^2 \sin \beta) \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \end{aligned} \quad (7.25)$$

Po úprave tejto rovnice dostávame tvar:

$$-m_z h_0 \ddot{\beta} = m_z \ddot{x}_v \cos \beta + m_z g \sin \beta \quad (7.26)$$

Hľadané uhlové zrýchlenie je:

$$\ddot{\beta} = \frac{-\ddot{x}_v \cos \beta - g \sin \beta}{h_0} \quad (7.27)$$

Uhlové zrýchlenie pri uvažovaní trenia v otočnom kĺbe kyvadla:

$$\ddot{\beta} = \frac{-\ddot{x}_v \cos \beta - g \sin \beta}{h_0} - b\dot{\beta} \quad (7.28)$$

kde b je konštanta tlmenia a $\dot{\beta}$ je uhlová rýchlosť v otočnom kĺbe.

Silu pôsobiacu na vozík dostaneme zo vzťahu (7.24):

$$F_v = (m_v + m_z) \ddot{x}_v + m_z h_0 \ddot{\beta} \cos \beta - m_z h_0 \dot{\beta}^2 \sin \beta \quad (7.29)$$

kde $(m_v + m_z) \ddot{x}_v$ je dynamická zložka sily pre urýchlenie systému,

$m_z h_0 \ddot{\beta} \cos \beta$ je zložka obvodového zrýchlenia,

$m_z h_0 \dot{\beta}^2 \sin \beta$ je zložka odstredivej sily.

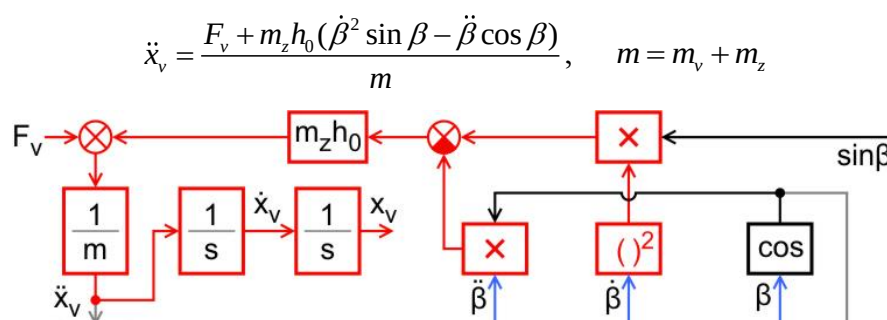
Pri uvažovaní trenia vozíka výsledný vzťah pre silu, pôsobiacu na vozík, má tvar:

$$F_v = (m_v + m_z) \ddot{x}_v + m_z h_0 \ddot{\beta} \cos \beta - m_z h_0 \dot{\beta}^2 \sin \beta + f_t \dot{x}_v \quad (7.30)$$

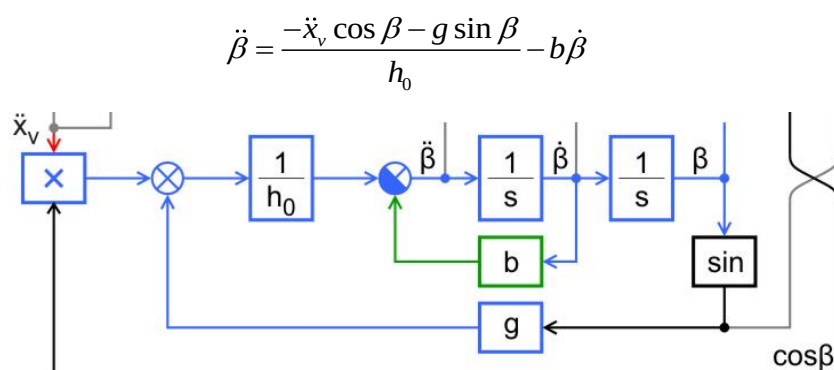
kde f_t je konštanta tlmenia a $\dot{x}_v$ je rýchlosť vozíka.

Z diferenciálnych rovníc popisujúcich podsystemy zostavíme blokové schémy (Obr. 7.5). Po ich zložení dostávame blokovú schému kyvadla na vozíku (Obr. 7.6).

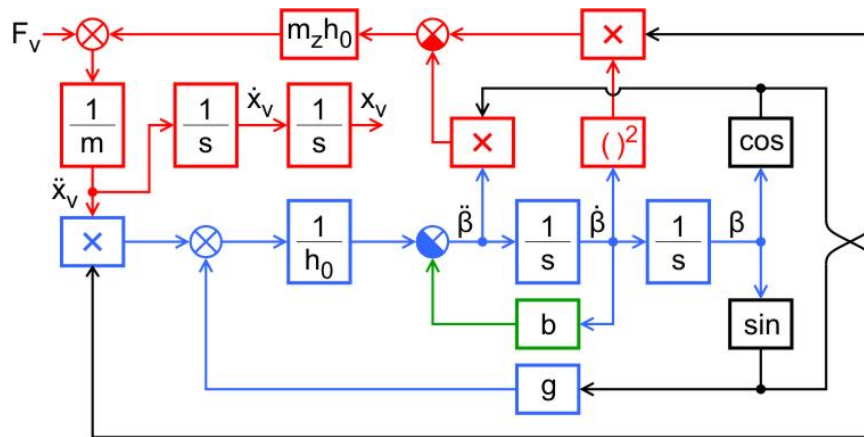
Podsystem 1



Podsystem 2



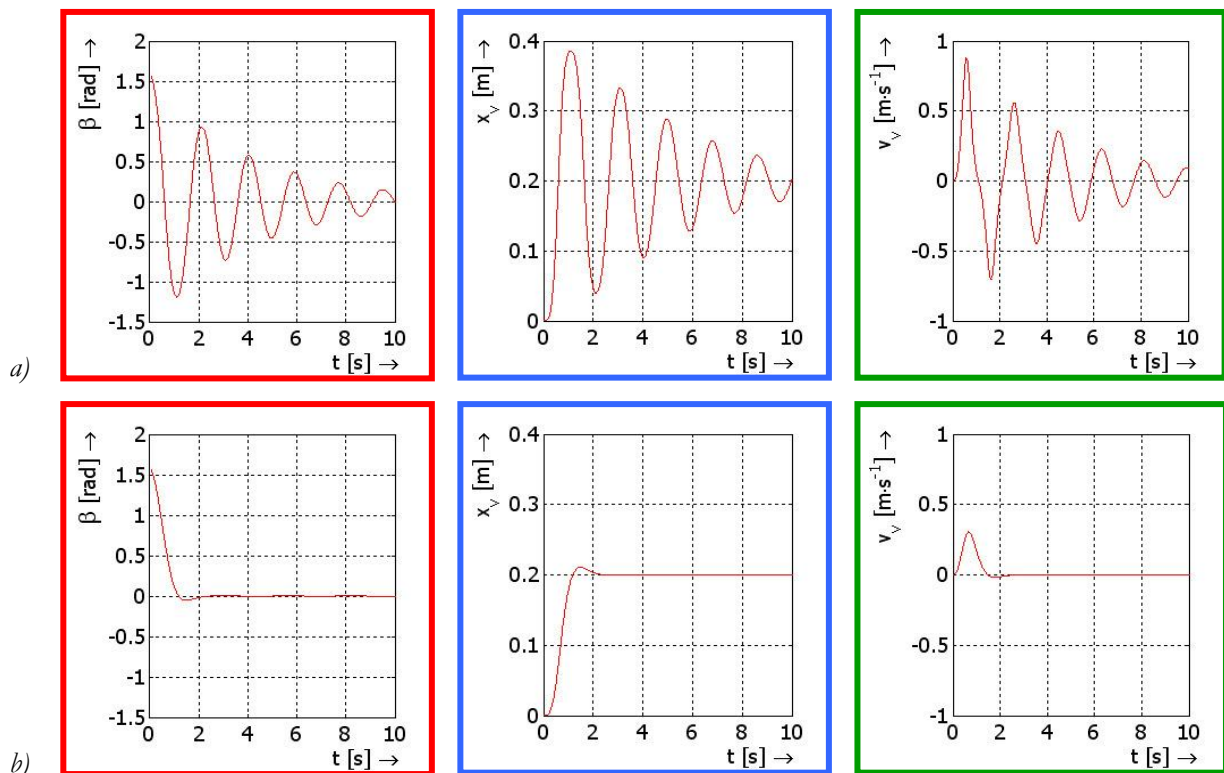
Obr. 7.5 Podsystemy blokovej schémy priameho kyvadla



Obr. 7.6 Výsledná bloková schéma priameho kyvadla

Časové odozvy

Pre verifikáciu dynamických vlastností priameho kyvadla vykonáme číslcovú simuláciu s nasledovnými parametrami: $F_v = 0$ N, $m_v = 20$ kg, $m_z = 5$ kg, $g = 9,81$ ms⁻², analýzu vykonáme pre rozsahy parametrov $h_0 = 1$ m, $b = 0,4$ a 4 Nms. Časové priebehy uhla vychýlenia kyvadla (priebehy označené červeným rámcikom), polohy vozíka (modrá farba) a rýchlosti vozíka (zelená farba) sú na Obr. 7.7, pričom vstupom do systému sme zvolili počiatočné vychýlenie kyvadla o uhol $\beta_0 = \pi/2$ (pri nulovej vstupnej sile F_v (aby nám nenarastala dráha)).



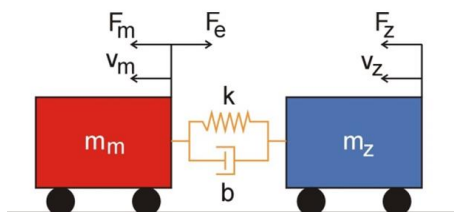
Obr. 7.7 Časové odozvy kyvadla (uhol vychýlenia kyvadla β , poloha vozíka x_v a rýchlosť pohybu vozíka v_v pri: a) minimálnom tlmení $b=0,4$ Nms; b) pri maximálnom tlmení $b=4$ Nms

7.3 Translačné mechanické obvody s pružnými členmi

7.3.1 Dvojhmotnostný translačný systém

Matematický model

Kinematická schéma dvojhmotnostného translačného systému s pružným spojením je na Obr. 7.9. Pozostáva z dvoch translačne sa pohybujúcich hmôt, prdstavovaných vozíkmi, ktoré sú spojené pružným členom s konštantou pružnosti k s konštantou tlmenia b .



Obr. 7.8 Klasický prípad dvojhmotnostného translačného systému

Pre tento systém môžeme napísať nasledovné dynamické rovnice

$$F_m - F_e = m_m \frac{dv_m}{dt} \quad (7.31)$$

$$F_e - F_z = m_z \frac{dv_z}{dt} \quad (7.32)$$

V dôsledku pružného spojenia vzniká v spojovacom pružnom člene kmitavá sila, pre ktorú platí:

$$F_e = k \int (v_m - v_z) dt + b (v_m - v_z) \quad (7.33)$$

kde

$$\int v_m dt = x_m, \quad \int v_z dt = x_z \quad (7.34)$$

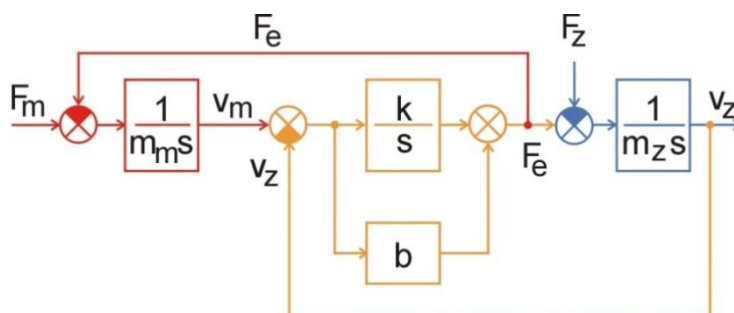
Bloková schéma

Z týchto rovníc vyjadríme stavové veličiny:

$$v_m = \frac{1}{m_m} \int (F_m - F_e) dt \quad (7.35)$$

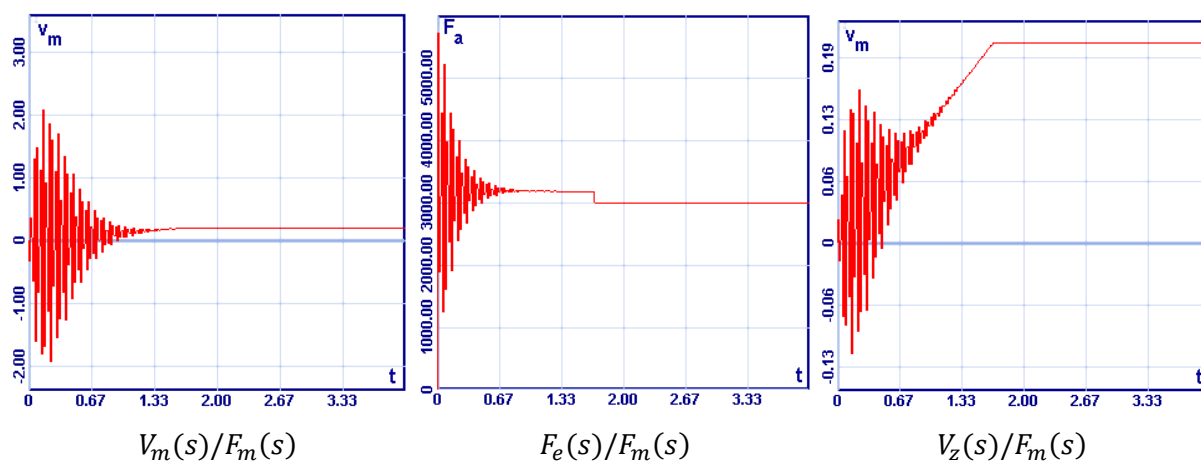
$$v_z = \frac{1}{m_z} \int (F_e - F_z) dt \quad (7.36)$$

Z posledných troch rovníc zostavíme blokovú schému (Obr. 7.10). Model obsahuje tri integrátory – ide o sústavu III. rádu.



Obr. 7.9 Bloková schéma

Časové odozvy jednotlivých veličín pri skoku vstupnej sily F_m a zaťažení sú na Obr. 7.11.



Obr. 7.10 Časové odozvy jednotlivých prenosových funkcií pri skoku hnacej sily

Frekvenčné charakteristiky

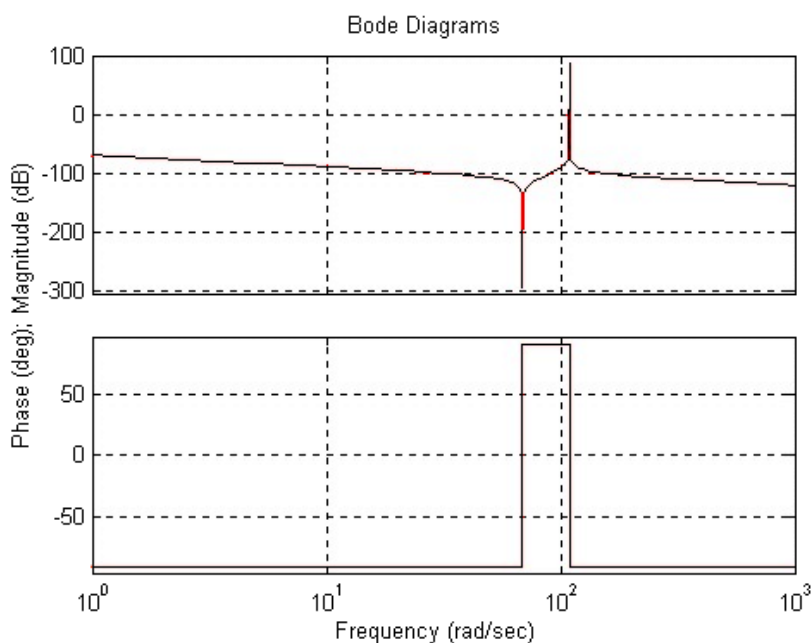
Pri nulovom tlmení ($b = 0$) možno ľahko odvodiť jednotlivé prenosy obovdu. Napr., ak vstupom je hnacia sila $F_m(t)$ a výstupom rýchlosť hmoty $v_m(t)$, potom prenos bude:

$$\frac{V_m(s)}{F_m(s)} = \frac{1}{m_m s} \frac{s^2 + \frac{k}{m_z}}{s^2 + k \left(\frac{1}{m_m} + \frac{1}{m_z} \right)} \quad (7.37)$$

Porovnaním so štandardným prenosom sústavy II. rádu dostaneme pre frekvenciu kmitov pri nulovom tlmení ($b = 0$):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k(m_m + m_z)}{m_m m_z}} \quad (7.38)$$

Frekvencia vibrácií teda závisí od veľkosti hmotností m_m a m_z a od koeficientu pružnosti k . Logaritmicke frekvenčné charakteristiky pri nulovom tlmení sú znázornené na Obr. 7.12.



Obr. 7.11 Logaritmicke frekvenčné charakteristiky

Pri nenulovom tlmení ($b > 0$) frekvencia kmitov bude samozrejme klesať:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{b^2}{4k^2} \omega_0^2} \quad (7.39)$$

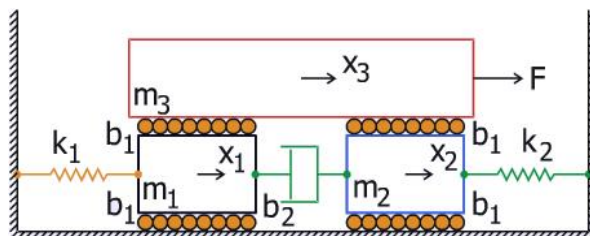
Amplitúda vznikajúcich oscilácií je funkciou hnacej sily a rozloženia hmotností m_m/m_z .

7.3.2 Viacnásobný posuvný systém

Vysvetlíme si princíp zostavenia matematického modelu systému s viacerými pohyblivými časťami, ktoré sú navzájom spojené mechanickými pružnými a tlmiacimi členmi. Pokiaľ by bolo potrebné riešiť prenosovú funkciu systému, možno využiť poznatky o mechanických impeanciách obvodu (podkap. 2.4, Obr. 2.9).

Kinematická schéma a základné rovnice

Analýzovaný mechanický systém je zobrazený na Obr. 7.13, [39]. Predpokladajme, že všetky prvky tohoto systému pracujú v lineárnej oblasti a vrchné teleso o hmotnosti m_3 je cez kolesá stále v dotyku s dvomi dolnými telesami o hmotnostiach m_1 a m_2 .



Obr. 7.12 Viacnásobný posuvný systém

Existujú dva základné prístupy, ktorými sa budeme zaoberať.

Jednou možnosťou, ako zostaviť matematický model, je zastaviť všetky telesá s výnimkou jedného a pozorovať, čo sa s ním bude diať, keď ho uvedieme do pohybu.

Začneme s telesom m_3 (Tab. 7.4). Ak v čase $t = 0$ pôsobíme na toto teleso silou F smerom doprava, dve trecie sily medzi telesom m_3 a zvyšnými dvoma telesami m_1 a m_2 pôsobia proti pohybu tohoto telesa. Z tejto úvahy odvodíme znamienka pre jednotlivé sily a tiež rovnicu pre tretie teleso. V dôsledku trecích síl sa telesá m_1 a m_2 uvedú do pohybu a takto môžeme odvodiť rovnice pre prvé i druhé teleso ($x_i, i = 1, 2, 3$ tu predstavuje dráhu príslušného telesa).

Tab. 7.4 Matematický popis jednotlivých mechanických podsystémov

Teleso 1	$m_1 \ddot{x}_1 = b_1(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) - b_1 \dot{x}_1 + b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1 x_1 \quad (7.40)$ $\dot{x}_1 = v_1 \quad \dot{x}_2 = v_2 \quad \dot{x}_3 = v_3$ $\ddot{x}_1 = \dot{v}_1 = a_1 \quad \ddot{x}_2 = \dot{v}_2 = a_2 \quad \ddot{x}_3 = \dot{v}_3 = a_3$
Teleso 2	$m_2 \ddot{x}_2 = b_1(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - b_1 \dot{x}_2 - b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2 x_2 \quad (7.41)$ $\dot{x}_1 = v_1 \quad \dot{x}_2 = v_2 \quad \dot{x}_3 = v_3$

	$\ddot{x}_1 = \dot{v}_1 = a_1 \quad \ddot{x}_2 = \dot{v}_2 = a_2 \quad \ddot{x}_3 = \dot{v}_3 = a_3$
Teleso 3	$m_3 \ddot{x}_3 = F(t) - b_1(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - b_1(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) \quad (7.42)$ $\dot{x}_1 = v_1 \quad \dot{x}_2 = v_2 \quad \dot{x}_3 = v_3$ $\ddot{x}_1 = \dot{v}_1 = a_1 \quad \ddot{x}_2 = \dot{v}_2 = a_2 \quad \ddot{x}_3 = \dot{v}_3 = a_3$

Z lineárnych diferenciálnych rovníc, popisujúcich každý podsystém vieme ľahko zostaviť výslednú blokovú schému.

Uvedený postup je vhodný pri riešení jednoduchých systémov, ale pri zložitejších systémoch, kde sa súčasne pohybuje viac podsystémov, ktoré zároveň môžu rotovať, môže byť neprehľadný. V týchto zložitejších prípadoch je lepšie zvoliť nasledujúci prístup.

Riešenie pomocou dekompozície systému

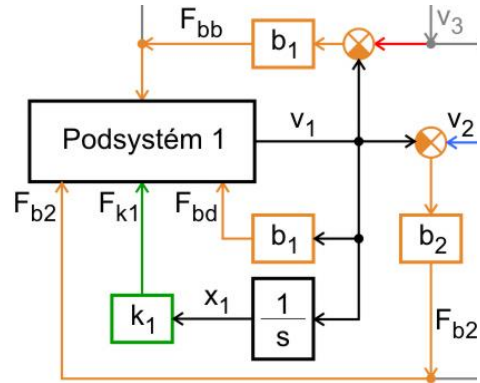
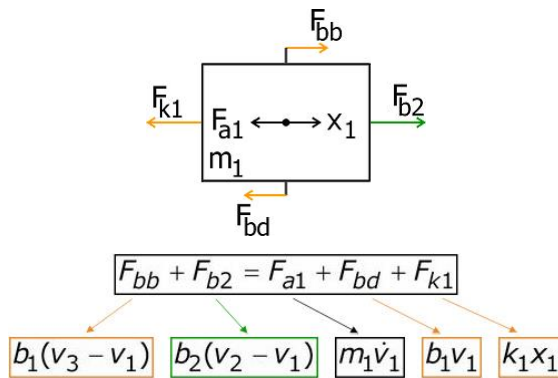
V druhom prístupe začneme opäť identifikáciou jednotlivých častí systému, ktoré sa môžu pohybovať bez toho, aby sa spolu s nimi pohyboval aj zvyšok systému. Systém rozdelíme v prepojeniach medzi pohybujúcim sa podsystémom a stojacimi podsystémami a nahradíme účinok stojacich podsystémov na pohybujúci sa podsystém ekvivalentnou silou, pôsobiaceou na neho, a reakciou (t.j. účinok pohybujúceho sa podsystému na zastavené podsystémy), ekvivalentnou silou pôsobiaceou na stojace podsystémy. Tieto dve vnútorné sily majú vždy rovnakú veľkosť, ale opačný smer a navzájom sa vyrušia, ak systém funguje ako celok; vysvetlenie je uvedené v Tab. 7.4.

Tab. 7.5 Zásady pri zostavovaní rovníc jednotlivých podsystémov

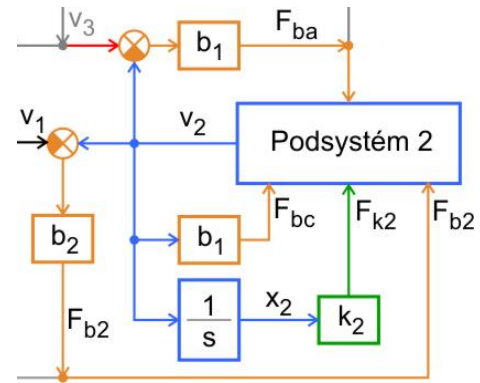
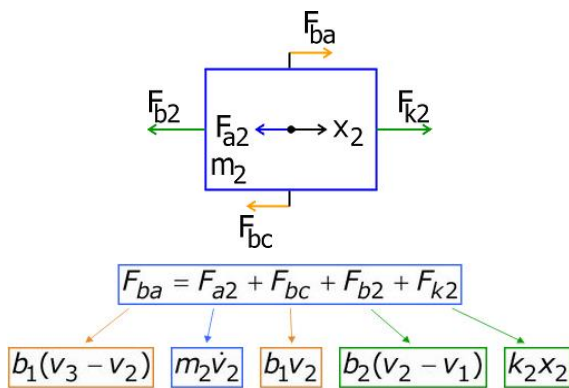
Ak trecie sily alebo sily pružnosti majú opačný smer, ako dráha (rýchlosť a zrýchlenie) stojaceho telesa, v rovnici síl je príspevok telesa samotného počítaný kladne, kým príspevok okolia je počítaný záporne.		$F_i = +m_i \ddot{x}_i$ $F_{ki} = k(x_i - x_{ext})$ $F_{bi} = b(\dot{x}_i - \dot{x}_{ext})$
Ak sú smery rovnaké, tak príspevok okolia je počítaný kladne, kým príspevok telesa samotného je počítaný záporne. Ak smer zotrvačnej sily je opačný k smeru dráhy, rovnica sa zapíše s kladným znamienkom, v opačnom prípade je znamienko záporné.		$F_i = -m_i \ddot{x}_i$ $F_{ki} = k(x_{ext} - x_i)$ $F_{bi} = b(\dot{x}_{ext} - \dot{x}_i)$

Teraz aplikujeme d'Alembertov princíp osobitne na každú z týchto troch častí a dostaneme výsledné rovnice spolu s dielčimi rovnicami, vyjadrujúcimi správanie sa jednotlivých síl (Obr. 7.14). Smery vektorov vnútorných síl sú zvolené podľa vyššie uvedených pravidiel (podobne ako smery prúdov a napätí v elektrických obvodoch).

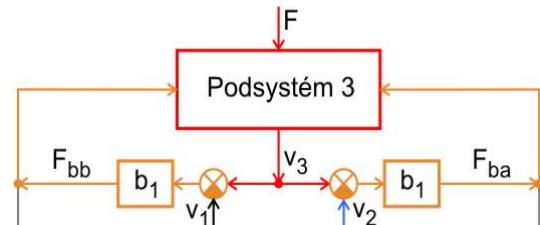
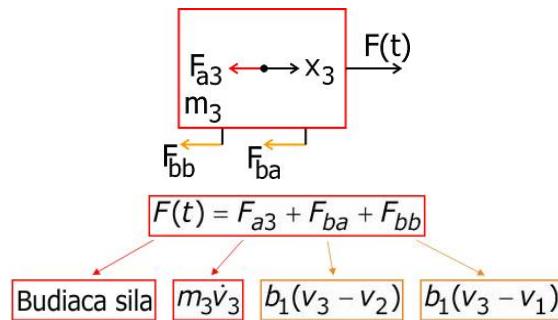
Podsystem 1



Podsystem 2



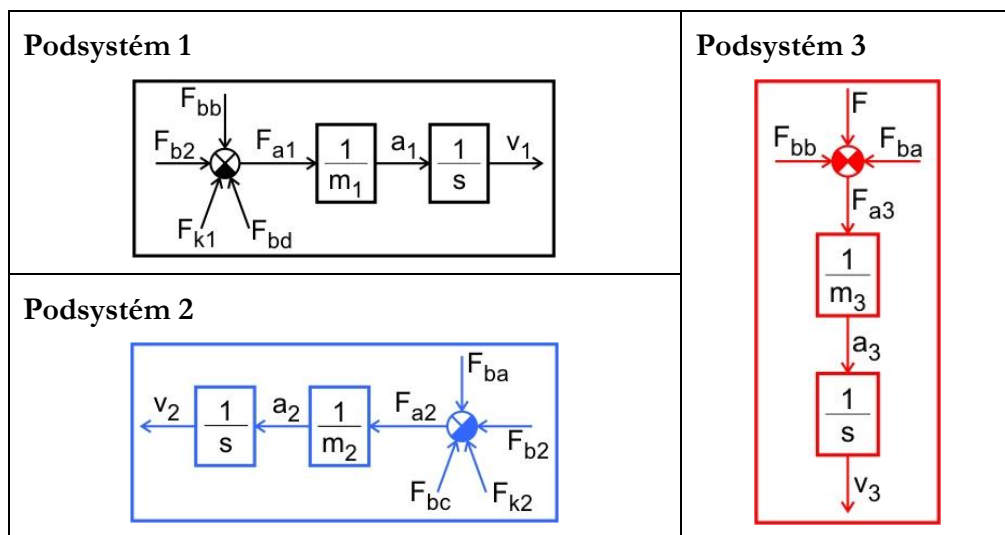
Podsystem 3



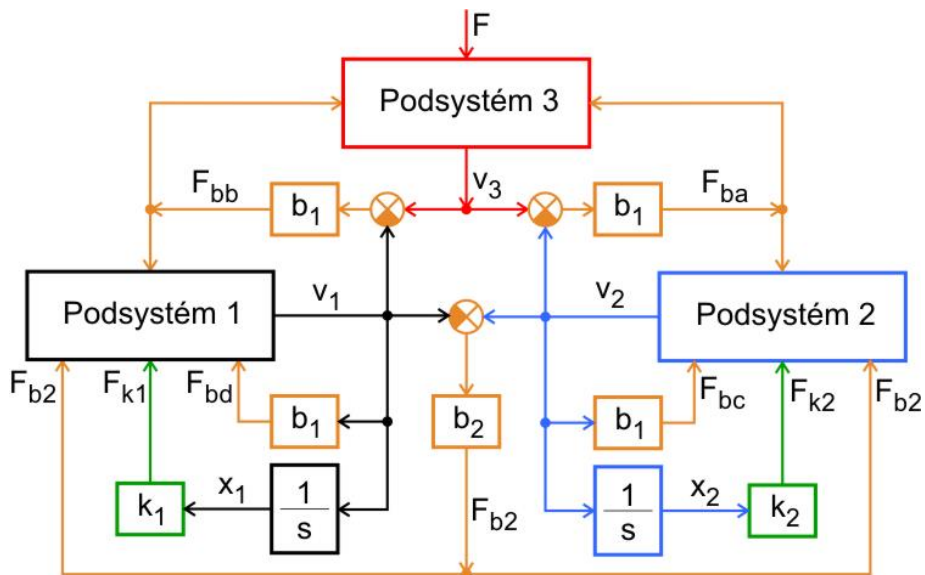
Obr. 7.13 Riešenie pomocou dekompozície systému

Z diferenciálnych rovníc pre ich nulové počiatkové podmienky dostaneme blokovú schému každého podsystemu (Obr. 7.14) a jednotlivé podsystemy vhodne prepojíme do celkovej schémy (Obr. 7.15).

V ďalšom vyšetrujeme vplyv jednotlivých parametrov (koeficientov pružnosti a tlmenia) na chovanie sa systému, pričom budiaca sila pôsobí na tretí podsystem. Výsledky simulácie sú prehľadne uvedené na Obr. 7.16. Priebiehy veličín vyznačené červenou farbou odpovedajú prvému podsystemu (dráha a rýchlosť) a modrou farbou sú vyznačené priebiehy veličín druhého podsystemu.

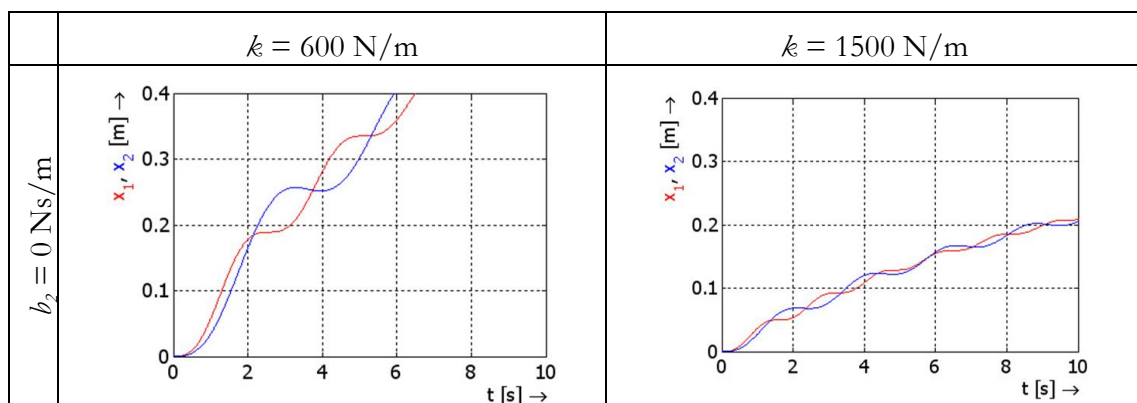


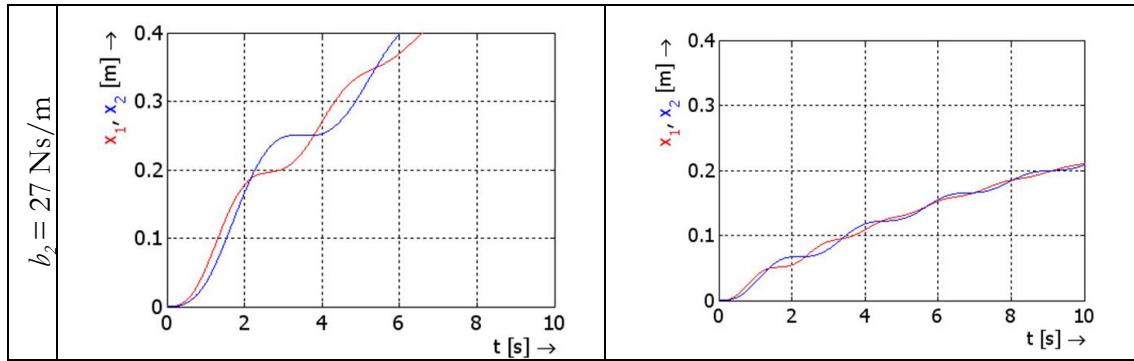
Obr. 7.14 Štruktúra podsystémov



Obr. 7.15 Bloková schéma prepojenia podsystémov viacnásobného posuvného systému

Simulácia bola vykonaná pre nasledovné hodnoty parametrov: $F = 1000 \text{ N}$, $m_1 = 100 \text{ kg}$, $m_2 = m_3 = 200 \text{ kg}$, $k_1 = k_2 = k \in \langle 600; 1500 \rangle \text{ N/m}$, $b_1 = 10 \text{ Ns/m}$, $b_2 \in \langle 0; 27 \rangle \text{ Ns/m}$. Priebehy boli zachytené pre hraničné hodnoty parametrov k a b_2 .





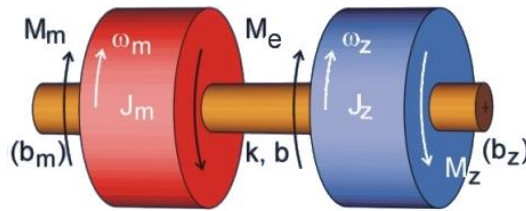
Obr. 7.16 Časové priebehy dráhy prvého a druhého telesa pre hraničné hodnoty koeficientov tlmenia a pružnosti

7.4 Rotačné mechanické obvody s pružnými členmi

7.4.1 Dvojhmotnostné rotačné pružné členy

Matematický model

Dve rotujúce zotrvačné hmoty sú spojené pružným hriadeľom. Ide o ekvivalentný systém (Obr. 7.17) ku translačnému systému zo state 7.3.1.



Obr. 7.17 Kinematická schéma dvojhmotnostného rotačného systému

Dynamické rovnice popisujúce systém sú:

$$M_m - M_e = J_m \frac{d\omega_m}{dt} + (b_m \omega_m) \quad (7.43)$$

$$M_e - M_z = J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (b_z \omega_z) \quad (7.44)$$

V dôsledku pružného spojenia vzniká v spojovacom pružnom hriadeľi torzný moment:

$$M_e = k \int (\omega_m - \omega_z) dt + b (\omega_m - \omega_z) \quad (7.45)$$

kde

$$\int \omega_m dt = \varphi_m, \quad \int \omega_z dt = \varphi_z \quad (7.46)$$

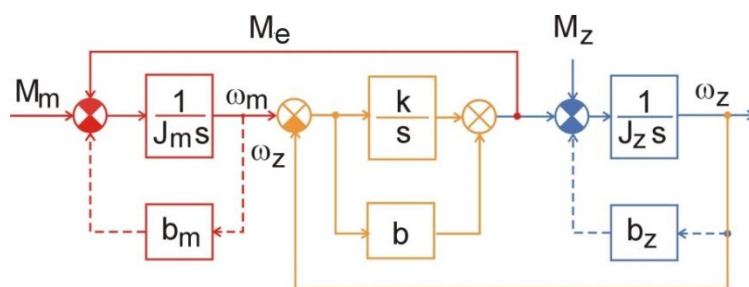
Z uvedených rovníc zostavíme blokovú schému (Obr. 7.18).

Analogicky, ako pri dvojhmotnostnom translačnom systéme určíme prenos pri nulovom tlmení:

$$\frac{\omega_m(s)}{M_m(s)} = \frac{1}{J_m s} \frac{s^2 +}{s^2 + k \left(\frac{1}{J_m} + \frac{1}{J_z} \right)} \quad (7.47)$$

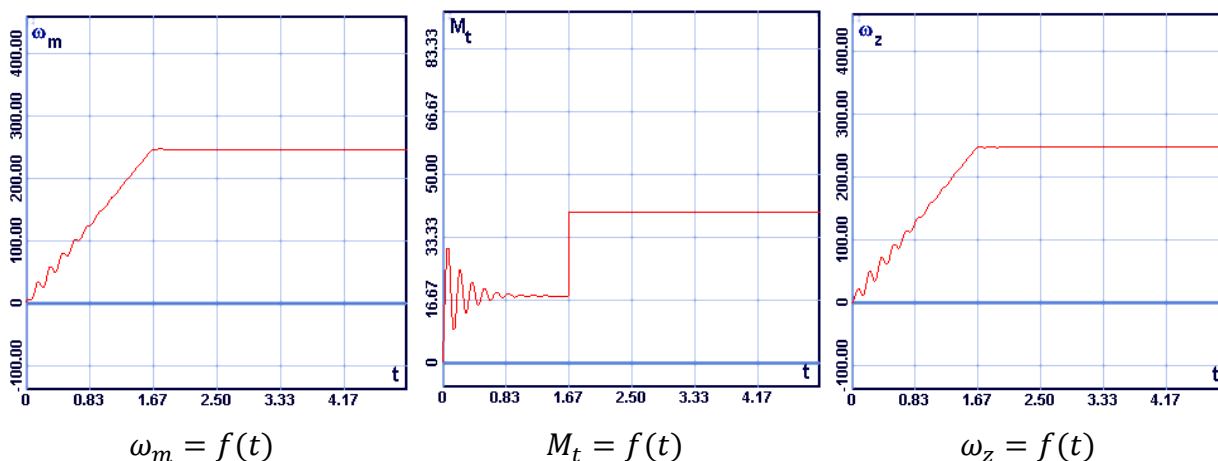
Opäť ide o sústavu III. rádu, ktorá má 3 korene. Pri nulovom tlmení sú to: $s_1 = 0$, $s_{2,3} = \pm j\omega_0$, kde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k(J_m + J_z)}{J_m J_z}} \quad (7.48)$$



Obr. 7.18 Bloková schéma

Časové odozvy pri rozbehu naprázdno a pripojení zát'aže sú na Obr. 7.20.

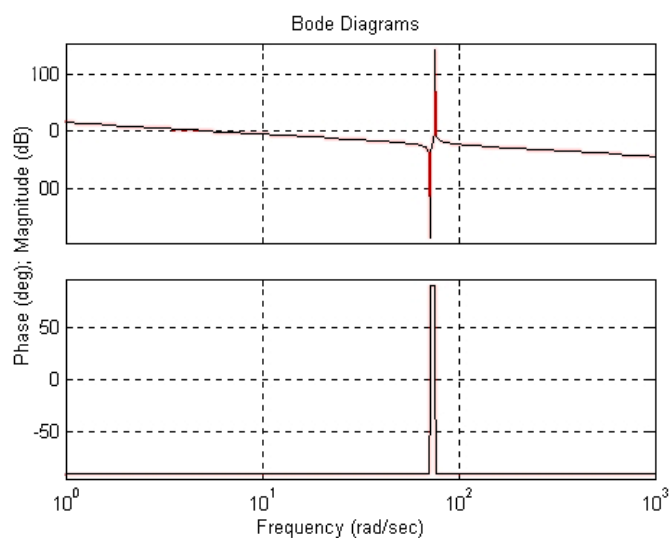


Obr. 7.19 Časové odozvy

Pri nenulovom tlmení ($b > 0$) frekvencia kmitov bude samozrejme klesať:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{b^2}{4k^2} \omega_0^2} \quad 7.49)$$

Frekvencia oscilácií (vibrácií) závisí od: veľkosti momentov zotrvačnosti J_m a J_z a od koeficienta pružnosti k spojovacieho hriadeľa. Amplitúda oscilácií je funkciou momentu motora rozloženia momentov zotrvačnosti medzi motor a zát'až. Logaritmicke frekvenčné charakteristiky sú zobrazené na Obr. 7.20.

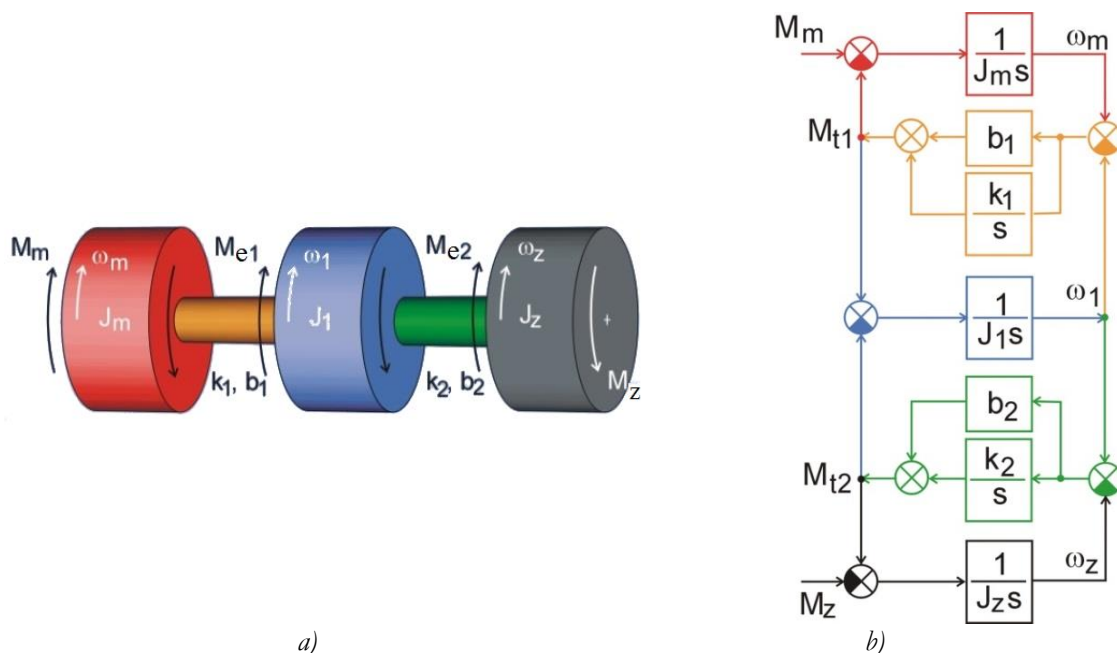


Obr. 7.20 Logaritmicke frekvenčné charakteristiky

7.4.2 Trojhmotnostné rotačné pružné spojenie

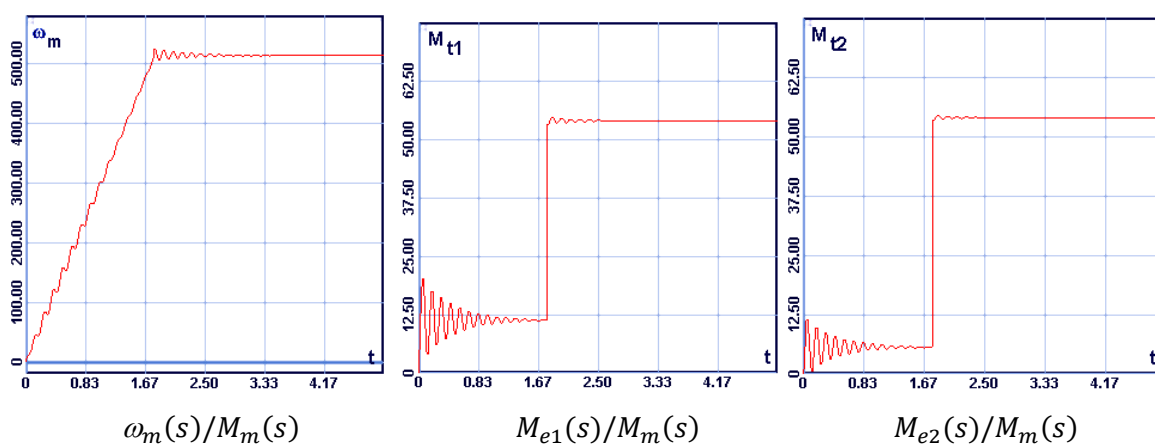
Matematický model

V trojhmotnostnom rotačnom systéme (Obr. 7.21a) vznikajú v pružných spojovacích elementoch torzné momenty M_{e1} a M_{e2} .



Obr. 7.21 Kinematická (a) a bloková (b) schéma trojhmotnostného rotačného systému

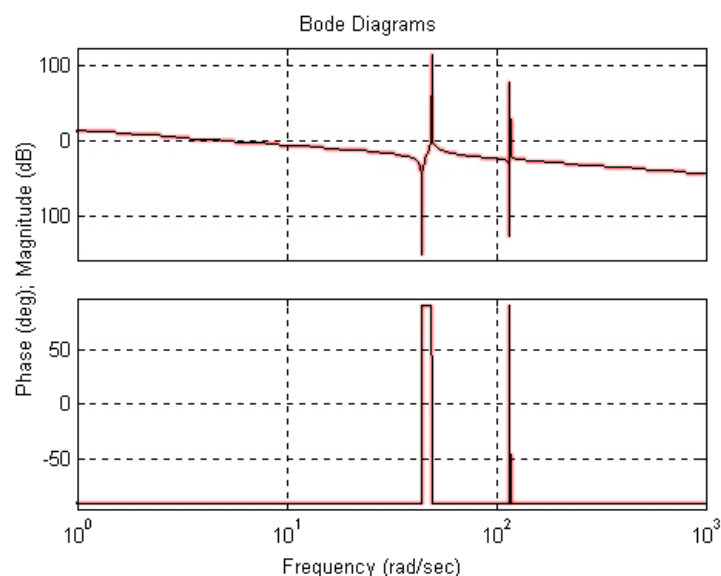
Ide celkove o sústavu, pozostávajúcu z 5 zásobníkov energie (3 rotujúce hmoty a 2 pružné členy), takže je to sústava III. rádu. Na základe predchádzajúcich poznatkov zostavenie jej matematického modelu je len aplikáciou tam uvedených poznatkov. Bloková schéma je zobrazená na Obr. 7.22b. Časové odozvy pri rozbehu naprázdno a pripojení záťaže sú na Obr. 7.23.



Obr. 7.22 Časové odozvy jednotlivých prenosových funkcií pri skoku hnacieho momentu

Frekvenčné charakteristiky

Sústava V. rádu obsahuje jeden reálny koreň dve dvojice komplexne združených koreňov. Znamená to, že bude mať dve rezonančné frekvencie; jedna je na strane pohonu a druhá na strane záťaže, ako je to ostatne znázornené aj v logartimických frekvenčných charakteristikách pri nulovom tlmení (Obr. 7.23).



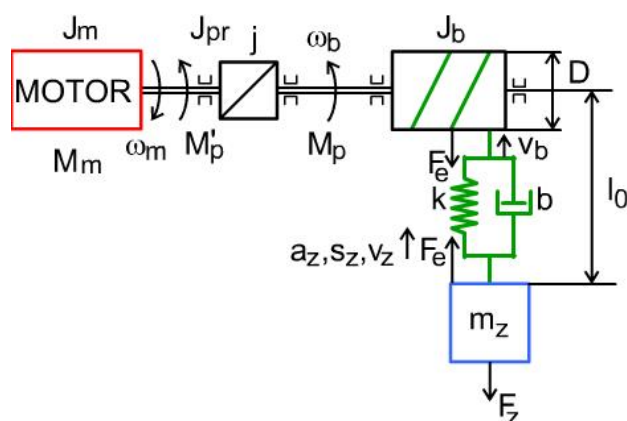
Obr. 7.23 Logaritmické frekvenčné charakteristiky trojmotnostného rotačného systému

7.5 Zdvíhacie zariadenie s pružným lanom

Zdvíhacie zariadenie s pružným lanom predstavuje kombináciu rotačného a posuvného mechanického systému. Uvedený typ zariadenia sa vyskytuje pri žeriavoch a výt'ahoch s dlhým zdvihom. V prípade dlhého lana sa v dynamických stavoch prejavujú jeho mechanické vlastnosti – vplyv jeho pružnosti a tlmenia na priebeh prechodových dejov – na priebeh rýchlosti a polohy.

Kinematická schéma a základné rovnice

Kinematická schéma zariadenia je uvedená na Obr. 7.24. Motor cez prevodovku poháňa navíjací bubon, na ktorý sa navíja lano. Na jeho konci je umiestnené závažie (bremeno, či klieťka výt'ahu).



Obr. 7.24 Kinematická schéma zdvíhacieho zariadenia

Základné vzťahy pre zdvíhacie zariadenie s pružným lanom

Pri riešení uvedeného systému vychádzame zo základných vzťahov pre statický systém, ktoré doplníme dynamickými rovnicami a popisom pružného lana (Tab. 7.6).

Tab. 7.6 Základné vzťahy pre zdvíhacie zariadenie

Zátťažný moment na hriadeľ bubna	$M_z = F_e \frac{D}{2}$	(7.50)
Prepočítaný moment záťaže na hriadeľ motora	$M_z' = \frac{M_z}{j\eta_p}$	(7.51)
Celkový moment zotrvačnosti na hriadeľ motora	$J_c = J_m + J_{pr} + \frac{J_b}{j^2}$	(7.52)
Obvodová rýchlosť bubna	$v_b = \omega_b r$	(7.53)
Poloha záťaže (dĺžka lana)	$l = l_0 - s_z = l_0 - \int v_z dt$	(7.54)
Vzťahy pre prevodovku	$j = \frac{\omega_m}{\omega_b} = \frac{\omega_m}{v_b/r}$	(7.55)

Zariadenie obsahuje tri zásobníky energie – kinetická energia uložená v otáčajúcich sa zotrvačných hmotách (moment zotrvačnosti rotora a navíjacieho bubna prepojené cez prevodovku), v posuvne pohybujúcej sa zotrvačnej hmote bremena a v potenciálnej energii uloženej v pružnosti lana.

Pre zostavenie matematického modelu systému tento rozdelíme podľa existujúcich zásobníkov energie na jednoduché podsystémy a pre každý zostavíme popisujúcu dynamickú rovnicu:

na strane motora:

$$M_m - M_z' = J_c \frac{d\omega_m}{dt} \quad (7.56)$$

Lano predstavuje pružný člen, pre ktorý platí:

$$F_e = k \int (v_b - v_z) dt + b(v_b - v_z) \quad (7.57)$$

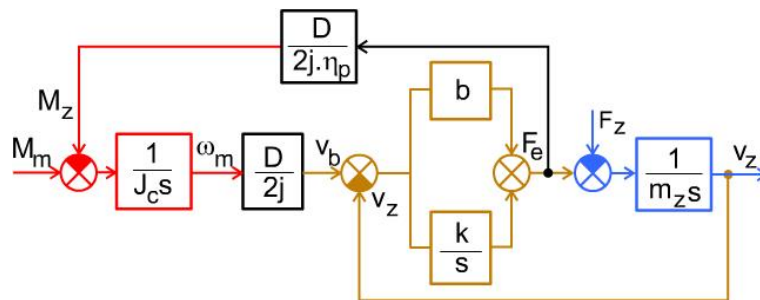
kde k je koeficient pružnosti a b koeficient tlmenia lana.

Dynamická rovnica pre bremeno o hmotnosti m_z , na ktoré pôsobí sila v lane a na druhej prípadne ďalšia (externá) sila F_z je:

$$F_e - F_z = m_z \frac{dy_z}{dt} \quad (7.58)$$

kde y_z je poloha závažia.

Z uvedených rovníc dostaneme výslednú blokovú schému zdvíhacieho zariadenia (Obr. 7.25).



Obr. 7.25 Bloková schéma zdvíhacieho zariadenia s pružným lanom

Pomocou simulácie overíme vlastnosti zdvíhacieho zariadenia - vyšetríme vplyv parametrov lana – koeficientov pružnosti a tlmenia na priebeh polohy a rýchlosti počas prechodových dejov pri

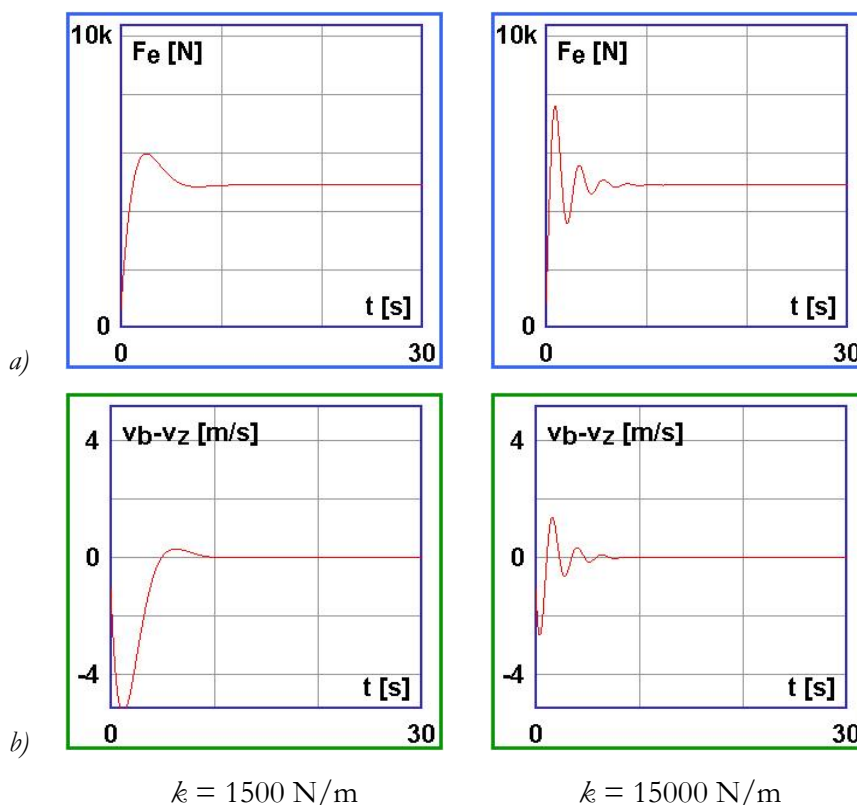
skoku momentu motora. Parametre simulácie: $M_m = 700 \text{ Nm}$, $J_c = 0,5 \text{ kgm}^2$, $D = 0,02 \text{ m}$, $m = 5000 \text{ kg}$, $F_{\Sigma} = 49050 \text{ N}$, $j = 1$, $\eta_p = 100\%$.

V podstate ide o nelineárny systém, ktorého vlastnosti závisia od dĺžky lana podľa vzťahu $k = \frac{SE}{l}$, kde S je prierez lana, E – modul pružnosti lana v ťahu a l je dĺžka lana.

Podľa praktických skúseností hodnota koeficientu tlmenia lana sa pohybuje v hodnotách rádovo niekoľko % koeficienta pružnosti.

Pri simulácii možno meniť koeficient pružnosti a tlmenia, čo v praxi odpovedá buď rôznym materiálom lana (koeficientom pevnosti v ťahu E), prierezu lana (S), resp. jeho dĺžke l (t.j. rôznym pracovným bodom zariadenia).

Pre názornosť za výstup zvolíme priebeh ťahovej sily v lane F_e a rozdiel rýchlostí koncov navíjaného lana ($v_b - v_z$), ktorý je v blokovej schéme vedený na vstup pružného člena. Časové odozvy veličín pri skoku momentu motora sú uvedené na Obr. 7.26.



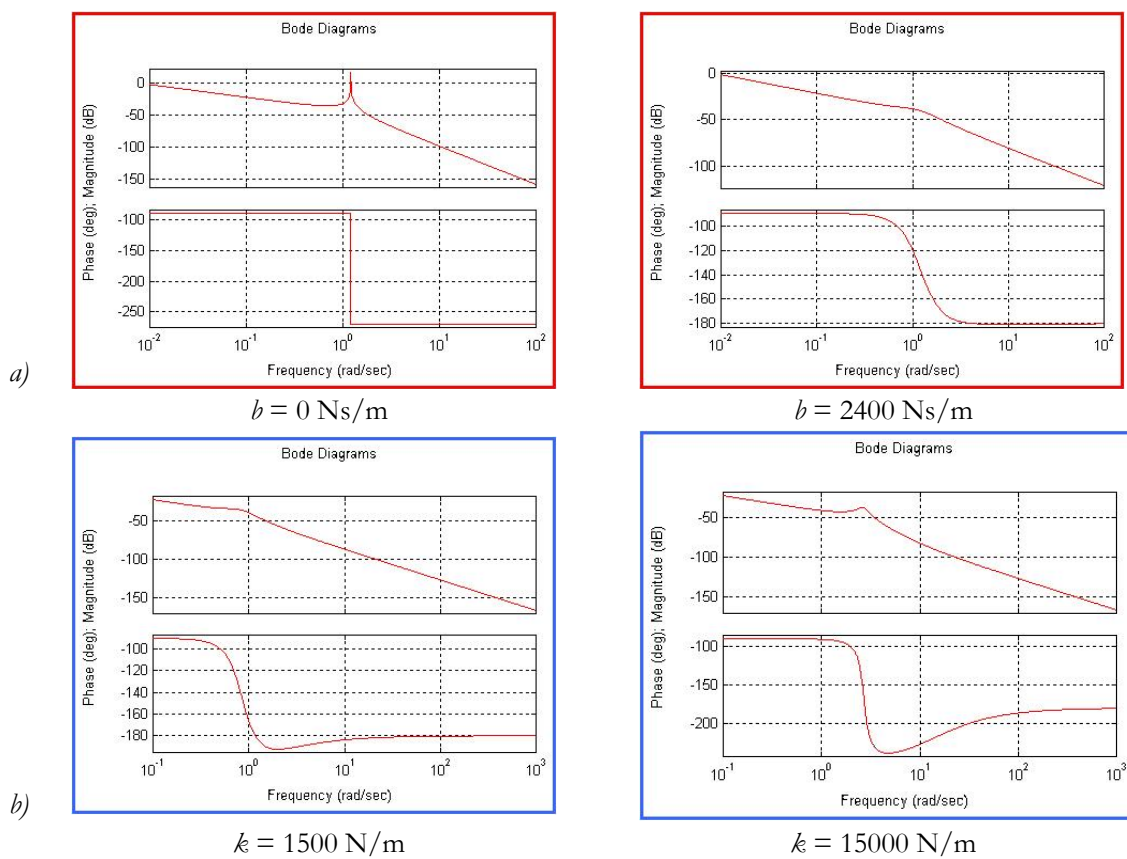
Obr. 7.26 Časové priebehy: a) sily v lane F_e a b) rozdiel rýchlostí pre rôzne hodnoty pružnosti lana (pri hodnote koeficienta tlmenia $b = 2400 \text{ Ns/m}$).

Frekvenčné charakteristiky

Vplyv mechanických parametrov lana – koeficienta pružnosti a tlmenia (resp. polohy bremena) na dynamické vlastnosti systému vieme ohodnotiť tiež pomocou frekvenčných charakteristík. Pre názornosť zvlášť vyšetrujeme:

- vplyv koeficienta tlmenia (Obr. 7.27a)
- vplyv koeficienta pružnosti (Obr. 7.27b)

Poznamenajme, že rezonančné prevýšenie v logaritmických amplitúdových charakteristikách je výraznejšie pri malých hodnotách koeficientu tlmenia.



Obr. 7.27 Logaritmicke frekvencne charakteristiky: a) vplyv tlmenia lana pri konstatnej pružnosti ($k = 3000 \text{ N/m}$);
b) vplyv pružnosti lana pri konstantnom tlmaní ($b = 1200 \text{ Ns/m}$)

8 MODELÝ ČASTÍ KONTINUÁLNYCH LINIEK S POHYBUJÚCIM SA PÁSOM

Výrobné zariadenie s kontinuálnym tokom materiálu sa vyznačujú väzbou motorov pohonného systému cez spracovávaný materiál v tvare pásu, vlákna a pod., ktorý na začiatku linky vychádza zo zásobníka (odvíja sa zo zvitku), alebo sa vyrobí rôznymi technológiami, vedie sa cez pracovné stroje, kde sa spracováva a na konci sa ukladá do zásoby (zvitku) pre spracovanie v ďalších technologických procesoch. V takejto kontinuálnej linke sa spravidla požaduje udržiavanie konštantného ťahu v páse v jednotlivých úsekoch (sekciiach) linky, nezávisle na rýchlosti, resp. jej zmenách.

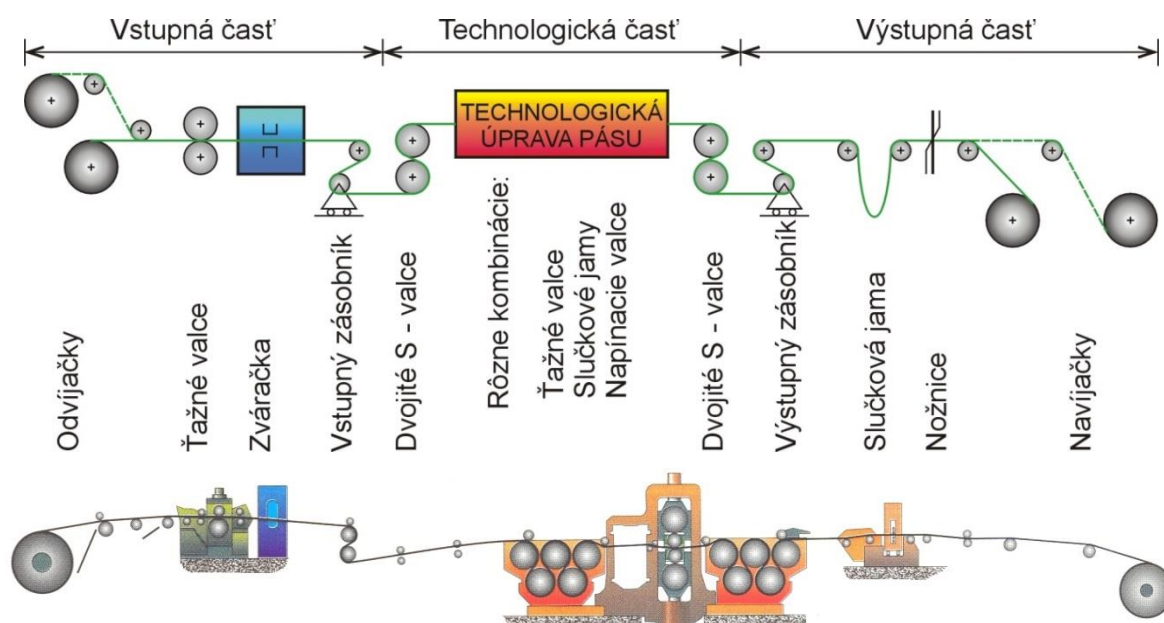
Spracovávaný materiál je kontinuálne vedený cez jednotlivé časti linky, pričom energia na jeho transport a ťah sa odovzdáva prostredníctvom trenia medzi pásom a podávacími (ťažnými) valcami. Na druhej strane väzbou cez pás dochádza ku ovplyvňovaniu pohonných motorov prostredníctvom poddajnej mechanickej väzby cez materiál.

Pri návrhu regulátorov pohonného systému linky vychádzame z matematického modelu zostaveného na základe znalostí technológie výroby, technologického zariadenia, mechanických vlastností materiálu a vlastností elektrických pohonov. Tento model pri riešení liniek skladáme z dielčích častí – podsystémov, prispôbených pre dané podmienky.

8.1 Popis častí kontinuálnej linky

Prevažná väčšina kontinuálnych liniek pozostáva z nasledovných častí (Obr. 8.1, [44]):

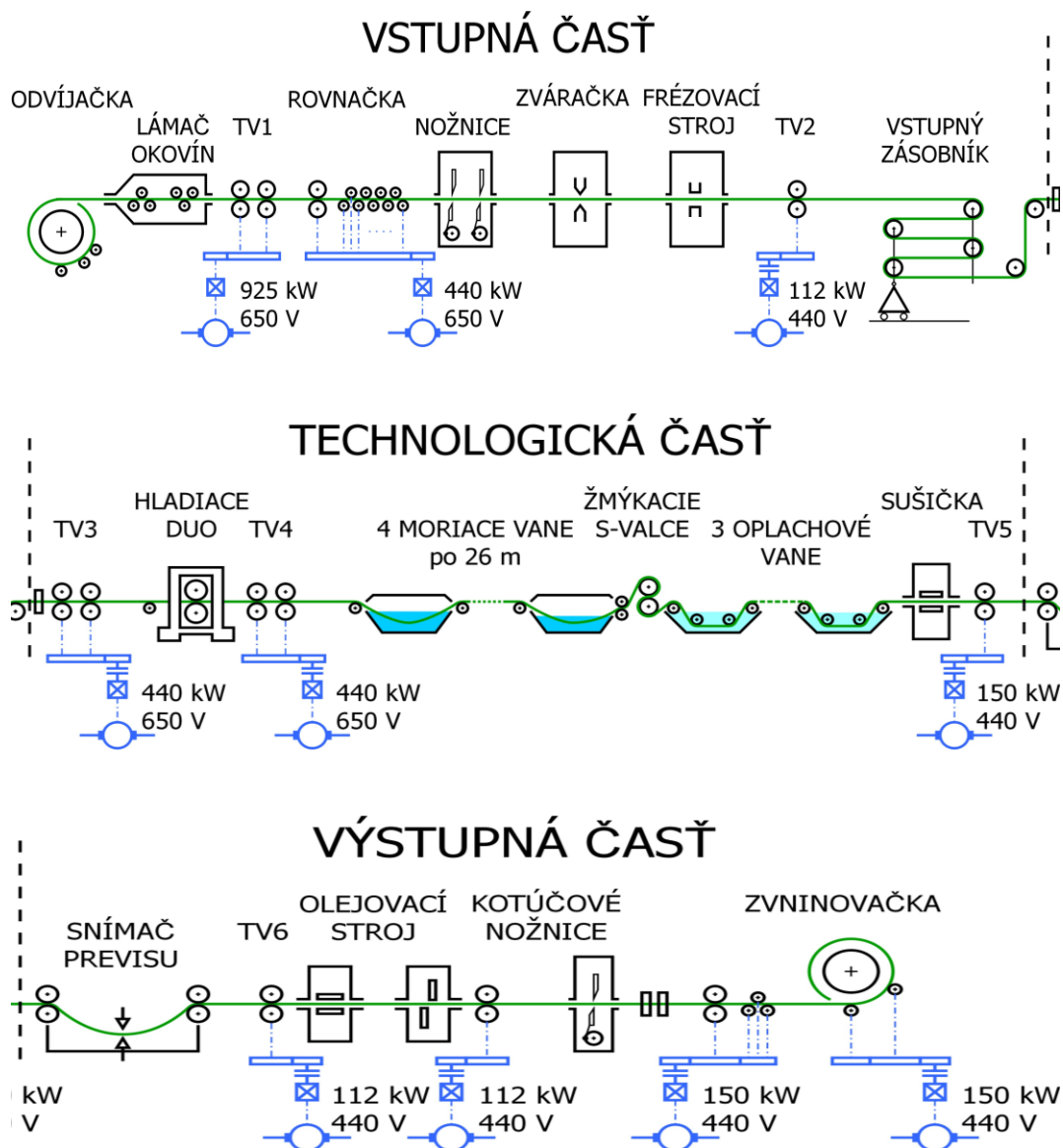
1. Vstupná časť, pozostávajúca z odvíjacieho zariadenia, rovnačky, zariadenia na spájanie pásov a zo vstupného zásobníka umožňujúceho plynulý chod konštantnou rýchlosťou strednej časti pri výmene zvitkov.
2. Stredná, alebo technologická časť, v ktorej sa priebežne vykonávajú vlastné technologické operácie na materiáli.
3. Výstupná časť, pozostávajúca z výstupného zásobníka, deliacej časti (orezávanie okrajov, príp. pozdĺžne delenie pásov) a z navíjacieho zariadenia.



Obr. 8.1 Základné časti kontinuálnej uprávarenskej linky pre úpravu pásových materiálov

Okrem špeciálnej, často unikátnej technologickej časti, ktorej matematický popis býva zložitý, linka obsahuje úseky, ktoré z hľadiska modelovania často možno zovšeobecniť (úsek previsu pásu, úsek napínacieho valca, úsek priamej väzby pohonných motorov cez spracovávaný materiál a pod.).

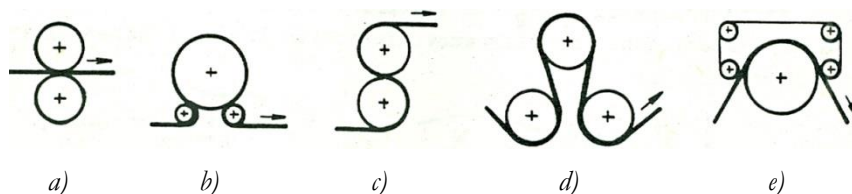
Konkrétna linka býva podstatne zložitejšia, než je uvedené na Obr. 8.1. Príklad konkrétnej kontinuálnej linky, slúžiacej na morenie kovových pásov (kvôli odstráneniu okovín z povrchu pásu po jeho valcovaní za tepla), je uvedený na Obr. 8.2.



Obr. 8.2 Jednotlivé úseky moriacej linky ako príklad reálnej kontinuálnej upravárenskej linky (spracovávaný pás pokračuje s jednej časti linky do ďalšej)

Pracovné stroje rozdeľujú celú dĺžku pásu v kontinuálnej linke na jednotlivé úseky. Potrebná mechanická energia sa na transportné valce privádza z pohonných motorov, ktoré sú vybavené podľa technologických požiadaviek reguláciou momentu, rýchlosti alebo polohy a ktoré sú spracovávaným pásom navzájom mechanicky viazané. Veľkosť sily, ktorú z valcov možno preniesť na pás, je úmerné okrem trenia prítlačnej sile a veľkosti dotykovej plochy. Materiál v tvare pásu môže prenášať len tie sily, ktoré v páse vytvárajú ťahové napätia; napätia v tlaku pás neprenáša.

Pre zostavenie presného modelu väzby transportného systému je potrebné uvažovať s dvoma oblasťami platnosti modelu: - pri nulovom ťahu, kedy medzi strojmi sa môže vytvárať slučka materiálu, - pri kladnom ťahovom napätí, kedy transportné valce sú viazané mechanickou väzbou. V prípade, ak prierez spracovávaného materiálu je dosť veľký (rúry, profily a pod.), materiál môže prenášať aj tlakové sily, avšak len také, aby nedošlo k jeho vybočeniu mimo pracovný priestor. Podľa druhu prítlačku pásu na valce rozoznávame tri základné typy transportných valcov (Obr. 8.3):

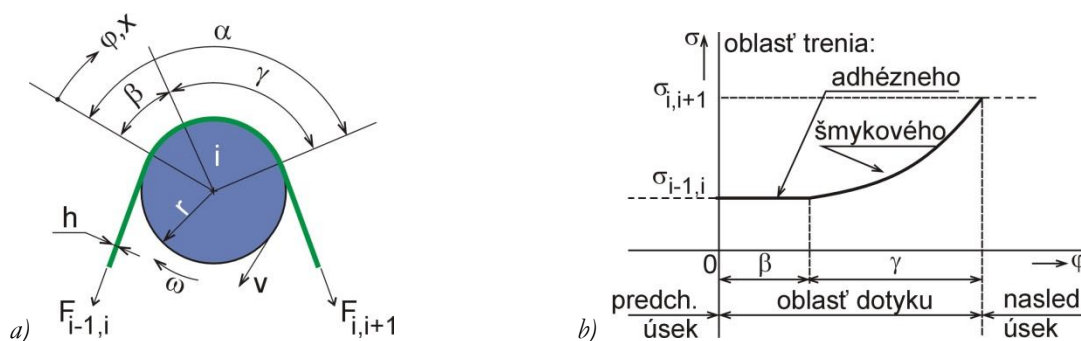


Obr. 8.3 Transportné valce

- 3) **Jednoduché podávacie (ťažné) valce** (Obr. 8.3a), kde pre zväčšenie energie prenesenej z motora na pás sú valce pritlačované určitou silou.
- 4) **Valce s opásaním** (Obr. 8.3b), kde opásanie zväčšuje treciu plochu, čo umožňuje preniesť väčšie sily z valca na pás. Tým odchádza ku zväčšeniu dotykovej plochy
- 5) **S-valce** (Obr. 8.3c) – kombinácia oboch predchádzajúcich spôsobov
- 6) **Dvojité S-valce** (Obr. 8.3d), kde každý z valcov je poháňaný motorom, umožňujú preniesť ešte väčšie sily na pás (t.j. je možný ešte väčší rozdiel medzi vstupným a výstupným ťahom).
- 7) **Valce s opásaním s pomocným (prítlačným) pásom** (Obr. 8.3e) pre zväčšenie jednak oblasti dotyku a jednak väčšieho prítlačku pásu na valce (väčšej normálovej sile), ktorú samotný pás nemôže vytvoriť kvôli jeho malej pevnosti (napr. v mokrej časti papierenského stroja).

8.2 Pohyb pružného pásu v linke

Pri zostavovaní matematického modelu transportného systému pásu v kontinuálnej linke vychádzame z podrobného vyšetrovania oblasti dotyku pásu s transportným valcom (Obr. 8.4a). Opri dostatočne veľkom polomere r/h ($\ll 1$) môžeme zanedbať ohybové napätie v pásu.



Obr. 8.4 Rozdelenie ťahov v oblasti dotyku i -tého transportného valca s pásom v ustálenom stave, ak $F_{i,i+1} > F_{i-1,i}$: a) kinematická schéma, b) priebeh ťahového napätia pozdĺž oblasti dotyku pásu s valcom

Na každý element pásu v mieste dotyku pôsobí rovnako veľká radiálna sila dF_N . Rozdiel ťahov $F_{i,i+1} - F_{i-1,i}$ na dotykovej ploche medzi pásom a valcom vyvoláva trecie sily dF_T pôsobiace v tangenciálnom smere, ktorých súčet je rovný uvedeného rozdielu ťahov. V dôsledku rozdielu

t'ahových napätí $\sigma_{i,i+1} - \sigma_{i-1,i}$ dochádza podľa Hookovho zákona k predĺženiu materiálu. V oblasti dotyku sa navzájom posunú (rozťahnu) jednotlivé elementy pásu voči zodpovedajúcim elementom valca, ale len vtedy, ak je prekročená maximálna hodnota trecej sily podľa vzťahu:

$$dF_T \geq f F_N \quad (8.1)$$

kde F_T je trecia sila a F_N je normálová sila.

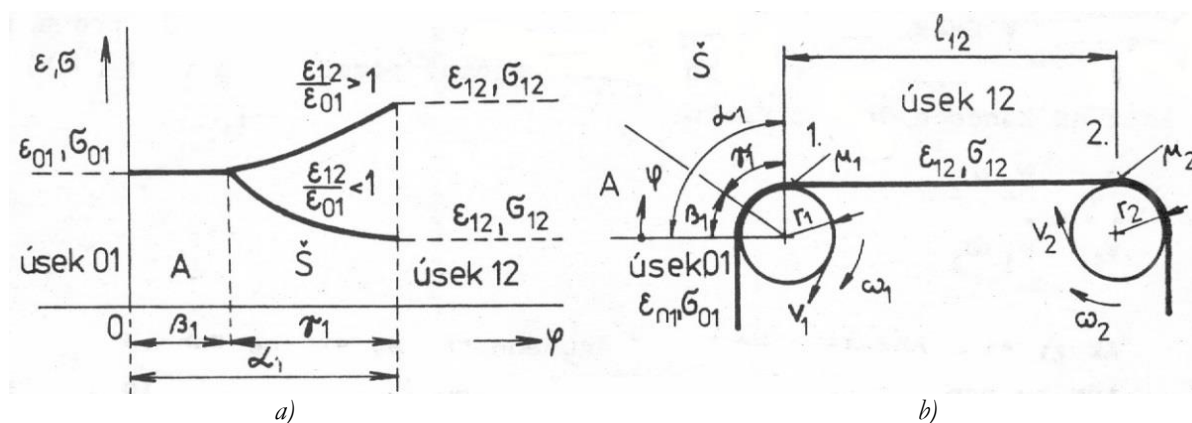
V tomto transportnom systéme v ustálenom stave (ak nedochádza ku zmene t'ahov ani uhlovej rýchlosti valca), sa celá oblasť dotyku rozdelí na dve časti (Obr. 8.4b):

- 1) Oblasť adhézneho trenia ($0 \leq \varphi \leq \beta$), kde v dôsledku trenia nedochádza k posunu elementov pásu voči povrchu valca. Táto oblasť sa nachádza na vstupe transportného valca (v smere pohybu pásu).
- 2) Oblasť šmykového trenia ($\beta \leq \varphi \leq \alpha$), v ktorej sa pás šmýka po povrchu valca. V tejto oblasti dochádza k pružnej deformácii pásu, ktorý sa tým predlžuje a preto translačná rýchlosť pásu nemôže súhlasiť s obvodovou rýchlosťou valcov. Medzi obvodovou a translačnou rýchlosťou preto existuje sklz. Oblasť šmykového trenia sa nachádza na výstupe valca.

Priebeh t'ahového napätia v páse pozdĺž oblasti dotyku, za predpokladu, že v nasledujúcom úseku (v smere pohybu pásu). Keďže t'ahové napätie je úmerné pomernému predĺženiu pásu: ($\sigma \sim \varepsilon$), z uvedeného diagramu možno odčítať priebeh pomerného predĺženia pásu v oblasti dotyku, pre ktoré možno odvodiť rovnicu:

$$\varepsilon = \varepsilon(0) e^{\frac{f}{r}x} = \varepsilon(0) e^{f(\varphi-\beta)} \quad (8.2)$$

kde $\varepsilon(0)$ je počiatočné pomerné predĺženie pásu (v našom prípade vo vstupnom úseku, teda konkrétne $\varepsilon_{i-1,i}$) a k je súradnica – vzdialenosť od počiatku dotyku pásu s valcom (meraná po obvode valca: $x = r\varphi$). Priebeh veličiny $\varepsilon = \varepsilon(x)$ je znázornený na Obr. 8.5a. Označenie veličín zodpovedá transportnému systému s dvoma valcami (Obr. 8.5b).



Obr. 8.5 Priebeh charakteristických veličín pásu v oblasti dotyku pásu s valcom a v úseku medzi dvoma valcami (A- oblasť adhézneho trenia, Š – oblasť šmykového trenia)

Pomer t'ahových napätí nasledovného a predchádzajúceho úseku závisí od veľkosti oblasti šmykového trenia:

$$\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{01}} = e^{f_1 \gamma_1} \quad (8.3)$$

kde index 1 znamená, že ide po prvý valec; indexy 01 a 12 znamenajú, že sú to veličiny príslušných úsekov.

Pri známom rozdelení ťahových napätí v jednotlivých úsekoch možno na základe tejto rovnice vypočítať veľkosť uhla oblasti šmykového trenia:

$$\gamma_1 = \frac{1}{f_1} \ln \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{01}} \quad \text{pri } \sigma_{12} > \sigma_{01} \quad (8.4)$$

a na základe známeho uhla opásania vypočítame aj uhol oblasti adhézneho trenia:

$$\beta_1 = \alpha_1 - \gamma_1 \quad (8.5)$$

Podľa toho vztahu vieme určiť, či v susedných úsekoch nie je príliš veľký rozdiel ťahov v páse, ktorý by zapríčinil šmykanie pásu po povrchu valca v celej oblasti dotyku, čo je hraničný prípad:

$$\sigma_{12} = \sigma_{01} e^{f_1 \gamma_1} \quad (8.6)$$

Najväčší rozdiel ťahových napätí teda by bol v prípade, ak oblasť šmykového trenia by sa rozšírila na celú oblasť dotyku pásu s valcom:

$$\sigma_{12max} = \sigma_{01} e^{f_1 \alpha_1} \quad (8.7)$$

Valec sa v tom prípade zvýšene opotrebovávajú a súčasne sa poškodzuje povrch pásu.

Rýchlosť pásu sa v oblasti adhézneho trenia rovná obvodovej rýchlosti valca. V oblasti so šmykovým trením sa odpovedajúce s pomerným predĺžením mení aj rýchlosť pásu., až na výstupe valca je rýchlosť pásu rovná rýchlosti v danom úseku. Pre nastavenie veľkosti predĺženia (t.j. pre nastavenie ťahového napätia) je rozhodujúci vzájomný pomer obvodových rýchlostí valcov na koncoch daného úseku:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{r_2 \omega_2}{r_1 \omega_1} \quad (8.8)$$

Ak zvýšime obvodovú rýchlosť druhého valca v_2 , stúpne ťahové napätie σ_{12} , tým aj pomerné predĺženie a zväčší sa oblasť šmykového trenia na prvom valci na úkor zmenšenia oblasti adhézneho trenia.

Pre zmenu ťahového napätia σ_{01} v úseku pred prvým valcom sa táto zmena môže prejaviť až po dobe, za ktorú pás prejde oblasť adhézneho trenia:

$$T_{d1} = \beta_1 / \omega_1 \quad (8.9)$$

Táto časová konštanta dopravného oneskorenia závisí od veľkosti oblastí adhézneho trenia a kolíše v rozmedzí $0 \leq T_{d1} \leq \alpha_1 / \omega_1$.

Pri zmene uhlovej rýchlosti transportného valca dochádza ku zmene rozloženia sily a rýchlosti pásu pozdĺž oblasti dotyku. Ku zmene oblasti dotyku dochádza tiež pri zmene vstupného alebo výstupného ťahového napätia.

Presné riešenie je matematicky náročné (riešenie nelineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc) a preto často používame iba linearizovaný systém. V bežnej praxi nemá význam zostavovať model linky zohľadňujúci aj tento fakt, snád' okrem rotačných polygrafických strojov, kde sú kladené mimoriadne veľké nároky na presnosť polohovej regulácie polohy tlače jednotlivých farieb, z ktorých pozostávajú plnofarebné obrázky.

Pri transportnom člene s prítlačným pásom (Obr. 8.3e) sú silové pomery jednoduchšie, pretože tu môžeme uvažovať s dokonalým trením medzi pásom a vlačom a teda aj s dobrým prenosom energie z pracovného stroja na pohyb pásu.

Pri navíjačke a odvíjačke je pás stále v oblasti adhézneho trenia, jedine v oblasti, kde pás opúšťa zvitok je oblasť šmykového trenia.

8.3 Dynamický model pohybujúceho sa pružného pásu

Z podrobnejšieho vyšetrenia oblasti dotyku pásu s valcom, vyžadujúceho zložitejšie matematické riešenie podľa [46] – [50], vyplývajú nasledovné závery:

- 1) Dynamické vlastnosti pásu sú nepriamo úmerné jeho transportnej rýchlosti.
- 2) Dopravné oneskorenie T_d sa rovná dobe, za ktorú prejde pohybujúci sa bod cez oblasť adhézneho trenia podľa rov. (8.9).
- 3) Dynamické vlastnosti pohybujúceho sa pásu možno nahradiť zotrvačným členom s časovou konštantou T , ktorá pozostáva z dvoch zložiek:

$$T = T_s + T_p \quad (8.10)$$

kde:

- a) T_s je časová konštanta v oblasti šmykového trenia, ktorá závisí od koeficienta šmykového trenia f a od veľkosti oblasti šmykového trenia – uhla γ :

$$T_s = \frac{1}{f\omega} |1 - e^{\pm f\gamma}| \quad (8.11)$$

pričom znamienko v exponente závisí od veľkosti stacionárnych ťahov v príľahlých úsekoch: znamienko +, ak $\sigma_{12} < \sigma_{01}$ a znamienko -, ak $\sigma_{12} > \sigma_{01}$,

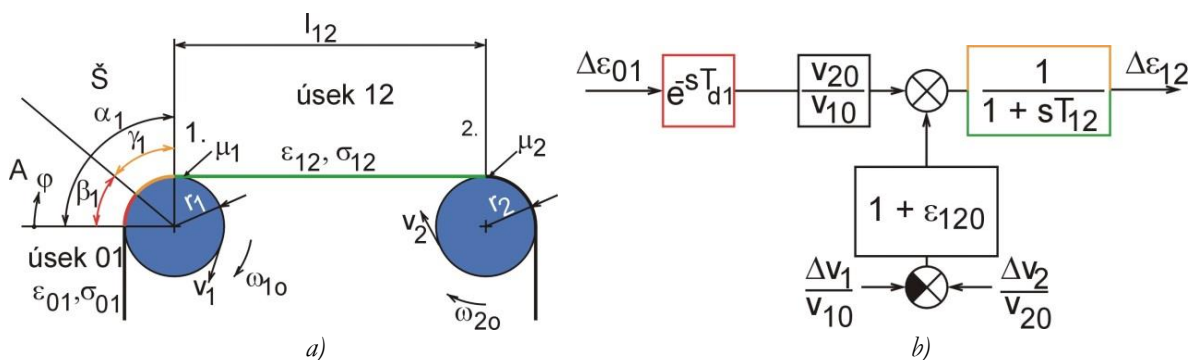
- b) z časovej konštanty pásu v úseku medzi dvoma valcami, ktorá je rovná dobe. Za ktorú týmto úsekom prejde sledovaný bod. Podľa Obr. 8.6 je to čas:

$$T_p = \frac{l_{12}}{v_2} = \frac{l_{12}}{r_2 \omega_2} \quad (8.12)$$

Na základe uvedených vzťahov zostavíme model transportného systému pásu s dvoma valcami (Obr. 8.6a). Keďže ide o nelineárny systém (časová konštanta T_p závisí nepriamo úmerne od rýchlosti pásu, linearizujeme ho v ustálenom pracovnom bode (označenom dolným indexom „o“) danom ustáleným pomerným predĺžením ε_{12o} a ustálenými uhlovými rýchlosťami valcov ω_{1o} a ω_{2o} . Potom obvodové rýchlosti valcov sú:

$$v_{1o} = r_1 \omega_{1o} \quad v_{2o} = r_2 \omega_{2o} \quad (8.13)$$

Odpovedajúca bloková schéma prírastkového modelu pásu je na Obr. 8.6b.



Obr. 8.6 Transportný systém pásu s dvoma valcami: a) kinematická schéma, b) bloková schéma

Časová konštanta T_{12} pozostáva z dvoch zložiek:

$$T_{12} = T_{s1} + T_{p12} = |1 - e^{\pm f_1 \gamma_1}| \frac{1}{f_1 \gamma_1} + \frac{l_{12}}{r_2 \omega_{2o}} \quad (8.14)$$

Prenosový člen $(1 + \varepsilon_{12o})$ vyplýva z rovnice kontinuity pre bezrozmerné teleso v diferenciálnom tvare, za aké môžeme pás v prvom priblížení považovať (z teoretickej mechaniky, z teórie pružnosti):

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - (1 + \varepsilon) \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (8.15)$$

Laicky si to možno predstaviť tak, že daným úsekom za jednotku času prejde množstvo (dĺžka) materiálu, ktoré je voči bezťahovému stavu zväčšené o veľkosť ustáleného pomerného predĺženia ε_{12o} .

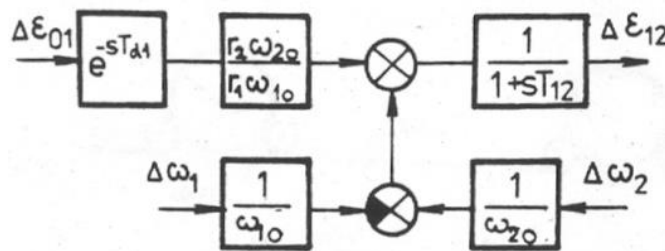
Pre výstupnú veličinu $\Delta \varepsilon_{12}$ z blokovej schémy dostaneme prenos:

$$\Delta \varepsilon_{12}(s) = \frac{(1 + \varepsilon_{12o}) \left[\frac{\Delta V_2(s)}{v_{2o}} - \frac{\Delta V_1(s)}{v_{1o}} \right] + \frac{v_{2o}}{v_{1o}} e^{-sT_{d1}} \Delta \varepsilon_{01}(s)}{1 + sT_{12}} \quad (8.16)$$

Z blokovej schémy vyplývajú dynamické vlastnosti pásu pri zmene pomerného predĺženia vstupujúceho pásu, alebo pri poruche spôsobenej zmenou uhlovej rýchlosti valca 1, resp. 2. Zmeny uhlovej rýchlosti valca sa na zmene pomerného predĺženia pásu v príslušnom úseku prejavujú so zotrvačným charakterom s časovou konštantou T_{12} . Pri presnom riešení pri zmene vstupného predĺženia navyše treba uvažovať aj dopravné oneskorenie spôsobené prechodom pásu oblasťou šmykového trenia s časovou konštantou T_{d1} , kedy sa zmena ťahu prejaví až keď pás prejde touto oblasťou. Poznamenajme, že to isté platí aj pre zmenu ťahového napätia i ťahu v páse vo vstupnom úseku.

Skoková zmena uhlovej rýchlosti prvého valca $\Delta \omega_1$ vyvolá exponenciálnu zmenu $\Delta \varepsilon_{12}$ s časovou konštantou T_{12} , ktorej veľkosť závisí od veľkosti oblasti šmykového trenia a vzdialenosti medzi valcami. V dôsledku zotrvačných hmôt otáčajúcich sa valcov však v skutočnosti nemôže dôjsť ku skokovým zmenám uhlových rýchlostí a skokom sa nemôže meniť ani vstupné pomerné predĺženie. Neuvažovanie zotrvačných hmôt valcov, trenie v ložiskách a pod., však umožňuje vyšetriť chovanie sa samotného pásu a jeho fyzikálnych veličín pri transporte pásu v kontinuálnej linke.

Ustálené pomerné predĺženie materiálu podľa jeho druhu a technológie výroby sa pohybuje rádovo 10^{-4} až 10^{-2} , takže $\varepsilon_{12o} \ll 1$ a pri zostavovaní modelov liniek ho možno v prvom priblížení zanedbať. Schému z Obr. 8.6b takto možno upraviť na tvar podľa Obr. 8.7.



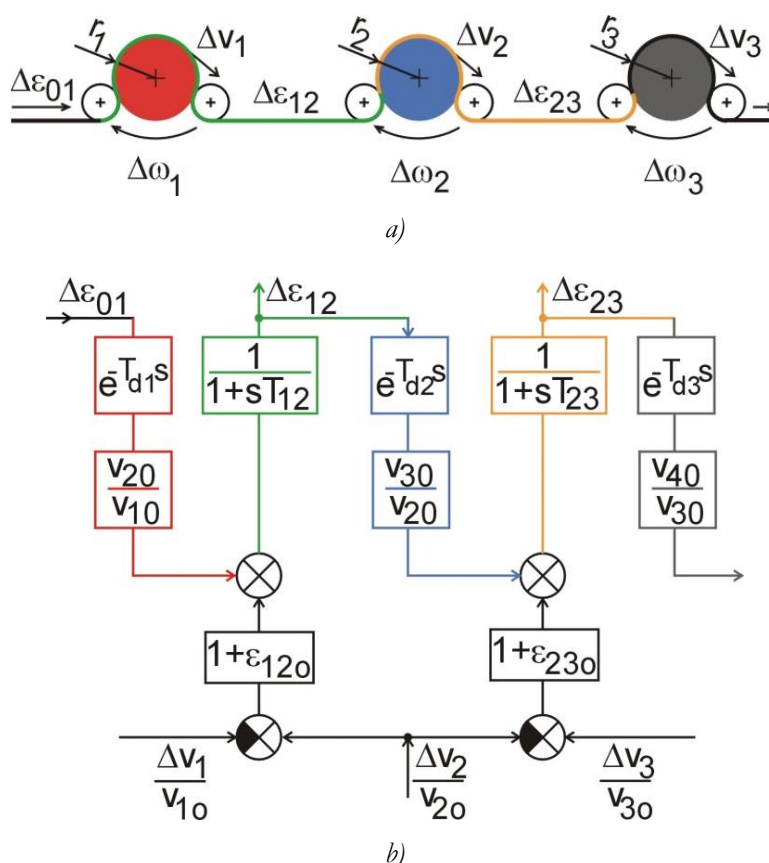
Obr. 8.7 Úprava blokovej schémy modelu pohybujúceho sa pružného pásu pre:

a) $\varepsilon_{12o} \ll 1$; b) s rozkreslením oblasti šmykového trenia

8.4 Modely liniek s viacerými strojmi

8.4.1 Model linky s tromi valcami s opásaním

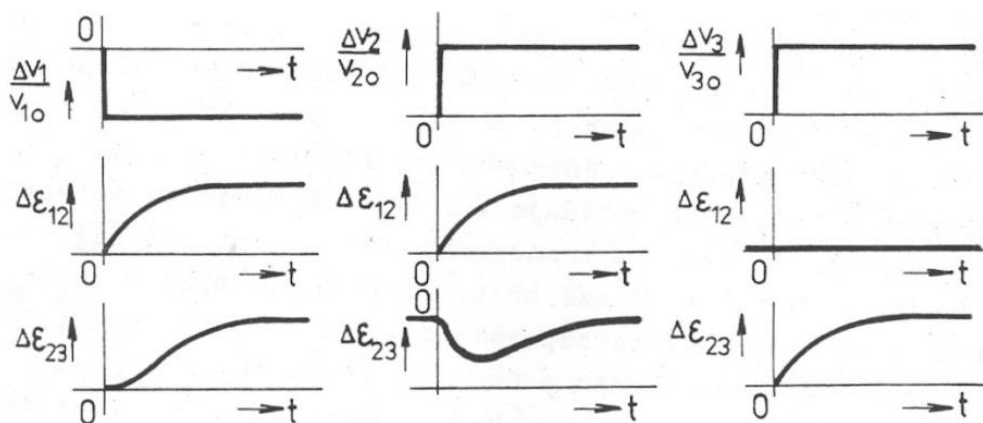
Skladaním dielčích modelov časti linky s dvoma pracovnými strojmi podľa podkapitoly 8.3 dostaneme model vyjadrujúci vlastnosti pásu v kontinuálnej linke s pružnou väzbou. Napríklad pre transportný systém s tromi valcami podľa Obr. 8.8a môžeme zostaviť blokovú schému, ktorá je uvedená pod schémou linky (Obr. 8.8b).



Obr. 8.8 Transportný systém s tromi valcami s opásaním: a) schéma linky; b) bloková schéma

Na Obr. 8.9. sú uvedené časové priebehy pomerných predĺžení v jednotlivých úsekoch linky pri zmenách rýchlosti, valcov. Pre zväčšenie oblasti dotyku sú zvolené valce s opásaním, v dôsledku čoho sa zväčšuje aj veľkosť oblasti adhézneho trenia a tým aj časová konštanta dopravného oneskorenia. Pri ťažných valcoch bez opásania sa oblasť dotyku znižuje na minimálnu mieru a dopravné oneskorenie je zanedbateľné.

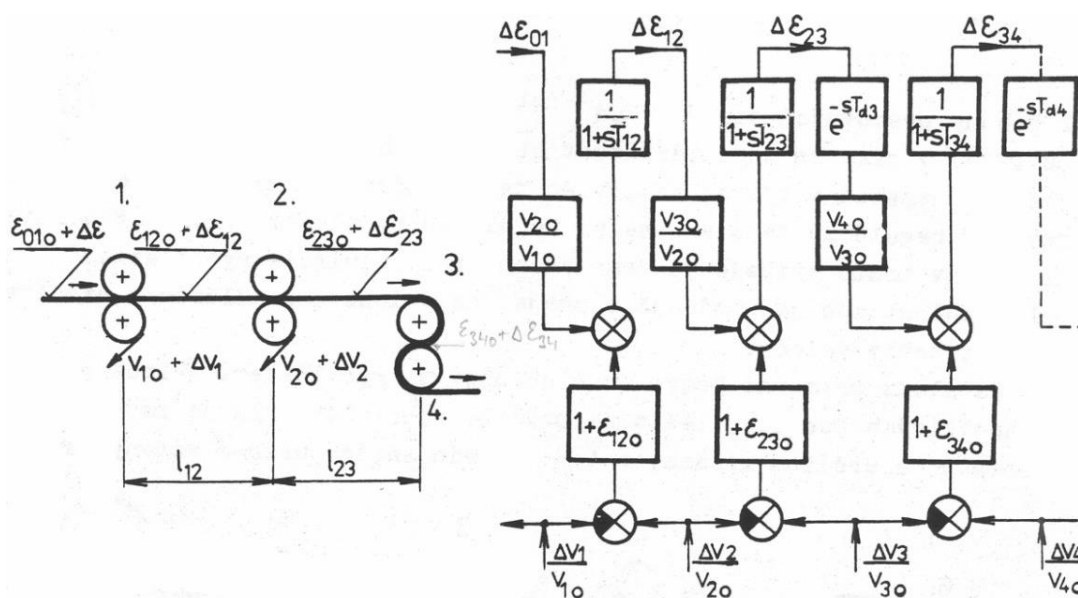
Aby aj pri malom uhle opásania bolo možné energiu potrebnú na vyvodenie ťahu a pohybu preniesť z valca na pás, musí sa podľa rovnice (8.1) zvýšiť normálová zložka sily na pás, t. j. musí sa zvýšiť vzájomný prítlak valcov pracovného stroja (avšak len do tej miery, aby sa pás tlakom nedeformoval). Pri veľkých rozdieloch vstupného a výstupného ťahu treba použiť dvojité ťažné valce, pričom každý z valcov je vybavený individuálnym pohonným motorom.



Obr. 8.9 Časové priebehy pomerných predĺžení linearizovaného modelu linky z Obr. 8.10 pri skokovej zmene obvodovej rýchlosti jednotlivých valcov 1 – 3.

8.4.2 Model linky s jednoduchými ťažnými valcami a s S-valcami

Na Obr. 8.10a je nakreslený stredný úsek inej linky a jemu zodpovedajúca linearizovaná bloková schéma (Obr. 10b).



Obr. 8.10 Model kontinuálnej linky s rôznou kombináciou ťažných valcov: a) schéma linky; b) bloková schéma

Dva z valcov sú jednoduché transportné valce a za nimi nasledujú S- valce. Pri tvorbe blokovej schémy linky v časových konštantách T_{12} a T_{23} možno zanedbať príspevky od odpovedajúcich časových konštánt šmykového trenia. Pri výpočte T_{34} zase je zanedbateľný príspevok od časovej konštanty pásu $T_{p34} = l_{34}/v_{40}$, pretože vzdialenosť l_{34} medzi 3. a 4. strojom je veľmi malá.

Pružný pás v jednotlivých úsekoch linky medzi pracovnými strojmi je namáhaný na ťah a tým sa v rámci pružnej deformácie dočasne predlžuje. Na základe kontinuity toku materiálu musí každým prierezom linky prejsť za časovú jednotku rovnaké množstvo materiálu. Keďže zmena prierezu je zanedbateľná, úsekom medzi $(i - 1)$ -ým a i -tým strojom prejde za čas t dĺžka pásu $l + \Delta l_{i-1,i}$, kde $\Delta l_{i-1,i}$ je absolútne predĺženie materiálu v danom úseku $i - 1, i$.

Z porovnania obvodových rýchlostí i -tého a j -tého valca (pričom medzi nimi sa nesmie nachádzať úsek so slučkou - zásobníkom materiálu) dostaneme vzťah:

$$\frac{v_i}{v_j} = \frac{(l + \Delta l_{i-1,i})/t}{(l + \Delta l_{j-1,j})/t} = \frac{l + \Delta l_{i-1,i}/l}{l + \Delta l_{j-1,j}/l} = \frac{l + \varepsilon_{i-1,i}}{l + \varepsilon_{j-1,j}} \quad (8.17)$$

pričom uhlové rýchlosti a pomerné predĺženia vo všeobecnosti sú funkciami času $v = v(t)$, $\varepsilon = \varepsilon(t)$. Z rovnice vyplýva rozdelenie ustálených rýchlostí (index „o“) pri zadanom ťahovom napätí $\sigma = F/S$ a odpovedajúcim pomernom predĺžením $\varepsilon = \sigma/E$:

$$\frac{v_{io}}{l + \varepsilon_{i-1,io}} = \frac{v_{jo}}{l + \varepsilon_{j-1,jo}} \quad (8.18)$$

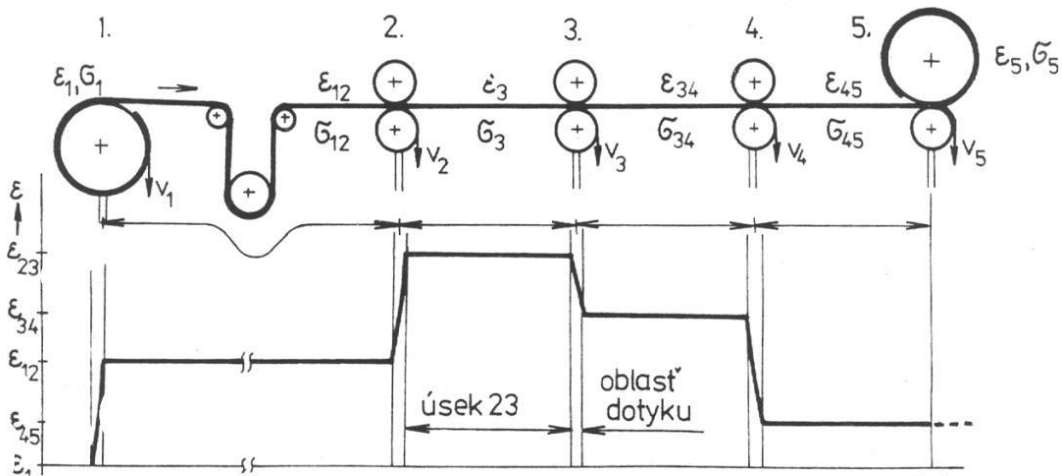
8.4.3 Model linky v ustálenom stave

Na Obr. 8.11 je nakreslená všeobecná schéma linky s odvíjačkou, s napínacím valcom a navíjačkou. Pod schémou linky je nakreslený diagram priebehu ťahov v linke v jednotlivých úsekoch a tiež v oblasti dotyku pásu s valcom.

Ustálené pracovné body, dané obvodovými rýchlosťami valcov a ťahmi v jednotlivých úsekoch, ležia na priamke (Obr. 8.13). Ak je zadaný prietok materiálu na určitom mieste, potom sú jednoznačne určené vzťahy medzi obvodovými rýchlosťami transportných valcov a predĺžením v úsekoch, teda aj pred daným miestom:

$$\frac{v_1}{l + \varepsilon_1} = \frac{v_2}{l + \varepsilon_{12}} = \frac{v_3}{l + \varepsilon_{23}} = \frac{v_4}{l + \varepsilon_{34}} = \frac{v_5}{l + \varepsilon_{45}} = \frac{v_0}{1 + 0} \quad (8.19)$$

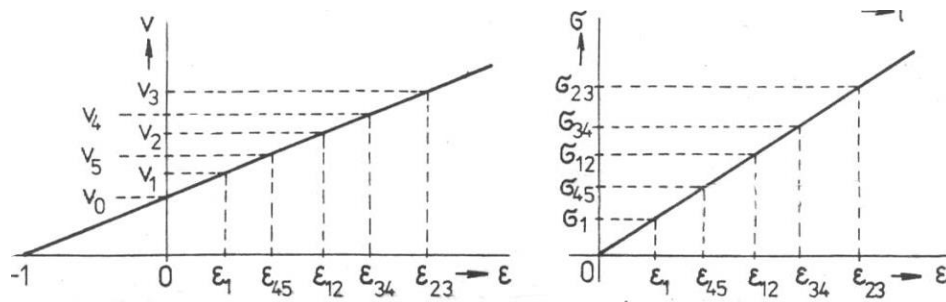
kde v_0 je rýchlosť pásu v bezťahovom stave.



Obr. 8.11 Kinematická schéma všeobecnej linky

Pomerné predĺženie ε_{45} sa ukladá v navíjanom zvitku ako predĺženie ε_5 (čomu zodpovedá ťah v páse, s ktorým je navinutý zvitok). Priamka, vyjadrená rovnicou (8.19), prechádza bodom, $\varepsilon = -1$ a jej sklon je určený pracovným bodom rýchlostného člena linky - napríklad (v_2, ε_{12}) .

Zo známeho rozloženia predĺžení v jednotlivých úsekoch vyplýva na základe Hookovho zákona rozdelenie ťahových napätí $\sigma = \varepsilon E$ a ťahov $F = \sigma S$ v týchto úsekoch. Odpovedajúce body ležia na priamke vychádzajúcej z počiatku (Obr. 8.12).

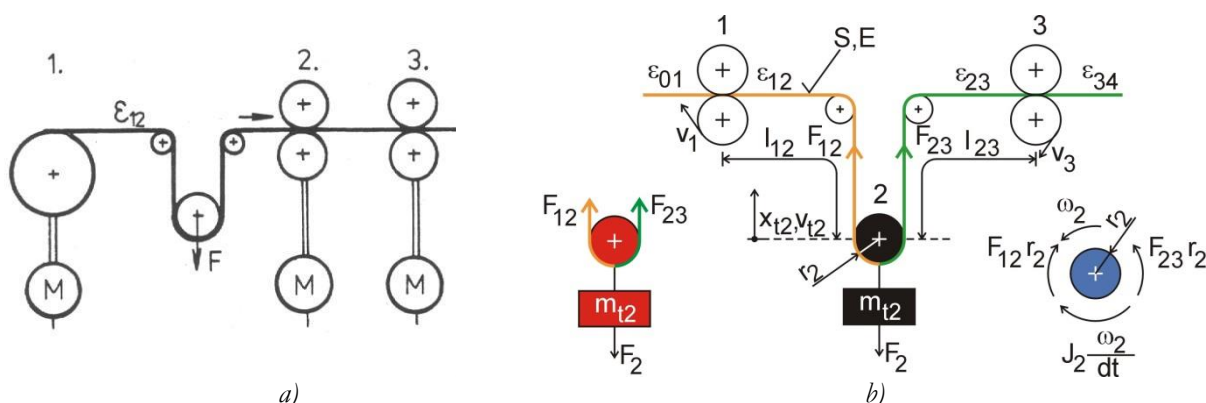


Obr. 8.12 Ťahové a rýchlostné pomery kontinuálnej linky v ustálenom stave

8.5 Model úseku časti linky s napínacím valcom

V kontinuálnych upravárenských linkách sa často vyskytujú úseky, v ktorých pás vytvára slučku. Ak sa požaduje, aby aj v tomto úseku bol v páse ťah, potom tento ťah možno vyvodit' pomocou napínacieho valca (Obr. 8.13a).

Úsekom so slučkou pásu možno vzájomne oddeliť dve časti linky tak, že poruchy v ťahu alebo v rýchlosti v jednej časti linky sa neprenášajú do druhej časti. Polohu napínacieho valca možno ovplyvňovať zmenou rýchlosti predchádzajúcej, alebo nasledujúcej časti linky. Silu, ktorou napínací valec pôsobí na pás, možno vyvodit' viacerými spôsobmi, v najjednoduchšom prípade pomocou závažia pripevneného na valec.



Obr. 8.13 Časť linky s napínacím valcom: a) usporiadanie a b) jej kinematická schéma

Z usporiadania na Obr. 8.14b vyplýva, že ide o trojhmotnostný pružný systém, v ktorom okrem rotujúcich hmôt navyše vystupuje translačne pohybujúca sa hmotnosť prídavného závažia včítane napínacieho valca. Tento mechanický systém možno popísať pohybovými rovnicami:

- pre translačný pohyb:

$$F_{12} + F_{23} - F_2 = m_{t2} \frac{d}{dt} v_{t2} \quad (8.20)$$

- pre rotačný pohyb:

$$F_{23} r_2 + F_{12} r_2 = J_2 \frac{d}{dt} \omega_2 \quad (8.21)$$

kde $\omega_2 = v_2 / r_2$

Z rovnice (8.14) pri zanedbaní dopravného oneskorenia v oblasti dotyku ťažných valcov s pásom a pri malých ustálených hodnotách pomerného predĺženia dostaneme vzťah pre operátorový obraz prírastku pomerného predĺženia:

$$\Delta\varepsilon_{12}(s) = \frac{1}{1 + sT_{12}} \left[\frac{v_{2o}}{v_{1o}} \Delta\varepsilon_{01}(s) + \frac{\Delta V_2(s)}{v_{2o}} - \frac{\Delta V_1(s)}{v_{1o}} \right] \quad (8.22)$$

V ustálenom stave sú obvodové rýchlosti približne rovnaké (ak zanedbáme zmenu rýchlosti v dôsledku predĺženia pásu), teda:

$$v_{2o} \doteq v_{1o} \doteq v_o \quad (8.23)$$

K zmene pomerného predĺženia $\Delta\varepsilon_{12}$ môže tiež dôjsť v dôsledku translačného pohybu napínacieho valca reprezentovaného prírastkom Δv_{t2} , ktorého zmena na $\Delta\varepsilon_{12}$ má rovnaký vplyv ako zmena Δv_1 (zvýšenie Δv_2 spôsobí pokles $\Delta\varepsilon_{12}$, t.j.:

$$\Delta\varepsilon_{12}(s) = \frac{1}{1 + sT_{12}} \left[\Delta\varepsilon_{01}(s) + \frac{\Delta V_2(s)}{v_o} + \frac{\Delta V_1(s)}{v_o} - \frac{\Delta v_{t2}(s)}{v_o} \right] \quad (8.24)$$

Analogickú rovnicu môžeme zapísať pre pomerné predĺženie v úseku 23:

$$\Delta\varepsilon_{23}(s) = \frac{1}{1 + sT_{23}} \left[\Delta\varepsilon_{12}(s) + \frac{\Delta V_3(s)}{v_o} + \frac{\Delta V_2(s)}{v_o} - \frac{\Delta v_{t2}(s)}{v_o} \right] \quad (8.25)$$

K uvedeným rovniciam pristupujú pohybové rovnice (8.19), (8.20), ktoré vyjadríme v prírastkovom tvare a upravíme pri uvažovaní:

$$\Delta F = SE \Delta\varepsilon \quad (8.26)$$

Po úprave a prepise do Laplaceovej transformácie dostaneme:

$$\Delta\varepsilon_{12}(s) + \Delta\varepsilon_{23}(s) - \frac{\Delta F_2(s)}{SE} = sT_{m2} \Delta V_{t2}(s) \quad (8.27)$$

$$\Delta\varepsilon_{23}(s) - \Delta\varepsilon_{12}(s) = sT_{J2} \Delta V_{t2}(s) \quad (8.28)$$

kde sme zaviedli časové konštanty:

$$T_{m2} = \frac{m_{t2} v_o}{SE} \quad T_{J2} = \frac{J_2 v_o}{SE r_2^2} = \frac{m_{r2} I_2^2 v_o}{SE r_2^2} \quad (8.29)$$

pričom I_2 je polomer zotrvačnosti definovaný vzt'ahom:

$$I_2 = \sqrt{\frac{J_2}{m_{r2}}} \quad (8.30)$$

a m_{r2} je hmotnosť rotujúcej časti navíjacieho valca. Polomer zotrvačnosti plného a dutého valca vypočítame podľa vzt'ahov:

$$I = r/\sqrt{2} \quad I = \sqrt{(r_1^2 - r_2^2)/2} \quad (8.31)$$

Medzi translačnou dráhou a translačnou rýchlosťou napínacieho valca platí vzt'ah:

$$\Delta X_{t2}(s) = \frac{1}{s} \Delta V_{t2}(s) \quad (8.32)$$

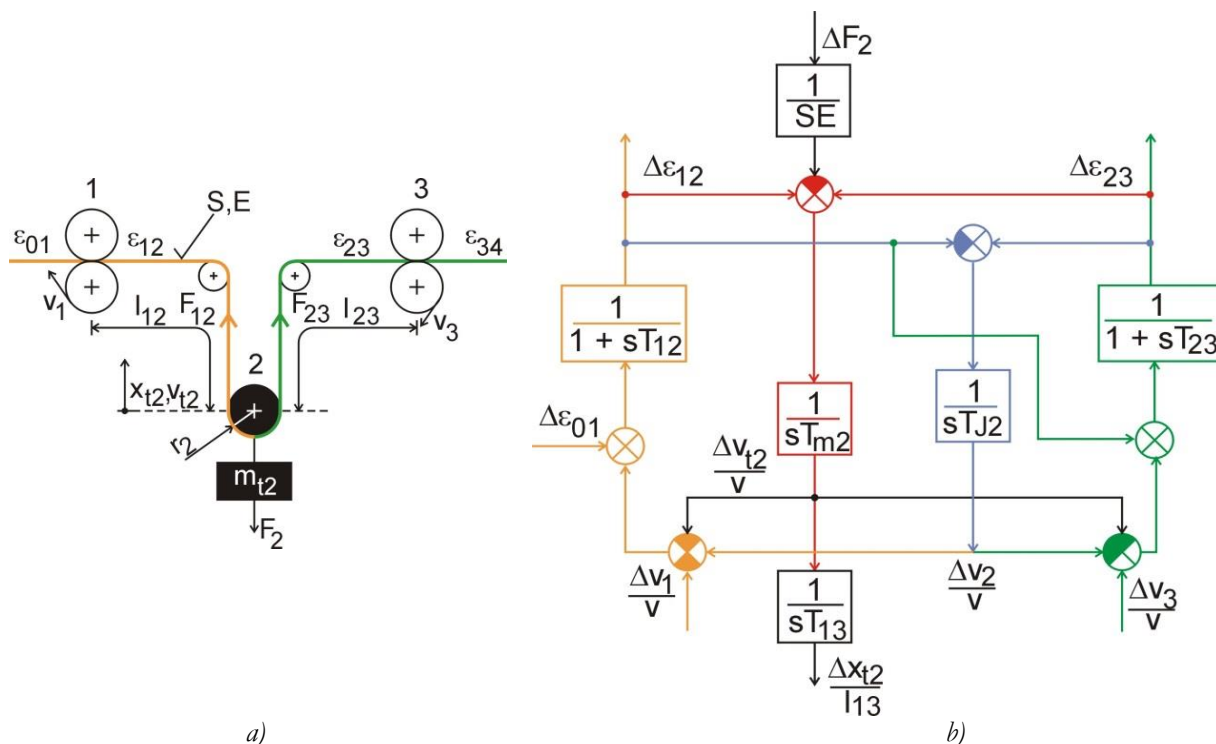
Keďže $\Delta\varepsilon$ je v podstate pomerná veličina, zavedieme tiež $\Delta X_{t2}(s)/l_{13}$ a $\Delta V_{t2}(s)/v_o$:

$$\left(\frac{\Delta X_{t2}(s)}{l_{13}} \right) = \frac{1}{sT_{13}} \left(\frac{\Delta V_{t2}(s)}{v_o} \right) \quad (8.33)$$

kde časová konštanta je:

$$T_{13} = \frac{l_{13}}{v_o} = \frac{l_{12} + l_{23}}{v_o} \quad (8.34)$$

Na základe uvedených vzťahov môžeme nakresliť blokovú schému vyšetrovanej časti linky (Obr. 8.14b), z ktorej možno odvodiť prenosy medzi vstupnými a výstupnými veličinami.



Obr. 8.14 Úsek linky s napínacím valcom: a) usporiadanie; b) odpovedajúca bloková schéma

Z nich majú zaujímavú vlastnosť dva prenosy

$$\frac{\Delta \varepsilon_{23}(s)}{\left(\frac{\Delta V_3(s)}{v_o}\right)} = \frac{s}{a(s)} (T_{m2} - T_{j2}) \quad (8.35)$$

$$\frac{\Delta \varepsilon_{23}(s)}{\Delta \varepsilon_{02}(s)} = -\frac{\Delta \varepsilon_{23}(s)}{\left(\frac{\Delta V_1(s)}{v_o}\right)} = \frac{s}{a(s)} (T_{m2} - T_{j2} + sT_{m2}T_{j2}) \quad (8.36)$$

kde $a(s)$ je charakteristický polynóm systému, ktorý je štvrtého stupňa. Tieto prenosy sa zjednodušia, ak $T_{m2} = T_{j2}$, čo bude splnené, ak pomer hmotnosti translačne pohybujúcej sa časti s hmotnosťou m_{t2} ku hmotnosti rotujúcej časti m_{r2} je vo vzťahu:

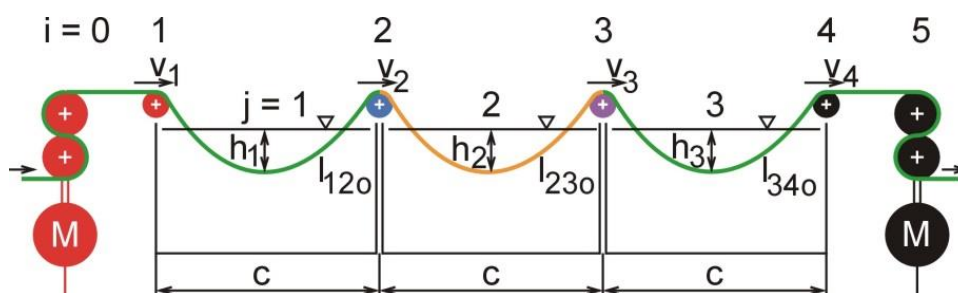
$$\frac{m_{t2}}{m_{r2}} = \left(\frac{l_2}{r_2}\right)^2 \quad (8.37)$$

t. j. hovoríme, že napínací valec je plne kompenzovaný a poruchy prejavujúce sa zmenšením rýchlosti vstupných alebo výstupných ťažných valcov majú veľmi malý vplyv na kolísanie pomerných predĺžení ε_{12} a ε_{23} a odpovedajúcich ťahov. Pomocou simulácie možno zistiť, že pre zmenšenie vplyvu rýchlosti na amplitúdu ε_{23max} je vhodnejšie voliť $l_{12} < l_{23}$.

Z uvedeného rozboru vyplýva, že správnym návrhom mechanickej časti kontinuálnej linky možno znížiť nepriaznivý vplyv niektorých väzieb a to ešte prel samotným návrhom regulátorov pohonného systému.

8.6 Model úseku linky s voľným previsom pásu

Technológia spracovania pásov materiálov často vyžaduje, aby materiál medzi pracovnými strojmi, prípadne medzi dvoma časťami linky, vytváral jednu alebo viac voľných slučiek bez vnúteného ťahu. Týmto spôsobom možno pás viesť cez vhodný roztok, ktorý pôsobí na jeho povrch a tým ho upravujú. Typickým prípadom je morenie oceľových pásov na moriacej linke pred valcovaním za studena, ktorého cieľom je odstrániť okoviny (kyslíčníky železa) z povrchu pásu. Pás pritom tvorí viacnásobnú slučku (Obr. 8.15), pričom ťažné valce sa nachádzajú pred vstupom a po výstupe pásu z moriacich vaní.



Obr. 8.15 Previs pásu v moriacich vaniach

Počas prevádzky sa žiada, aby pás v ustálenom stave v každej vani vytváral určitú konštantnú hodnotu previsu, čím sa zabezpečí optimálne doba morenia. Aj pri malom rozdieli vstupnej a výstupnej rýchlosti pásu v dôsledku integračného charakteru dochádza ku značnej zmene previsu, čo má za následok buď preťaženie pohonného motora alebo vlečenie pásu po dne vane a tým aj poškodenie povrchu pásu.

Úplný model previsu pásu

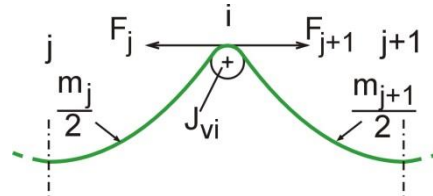
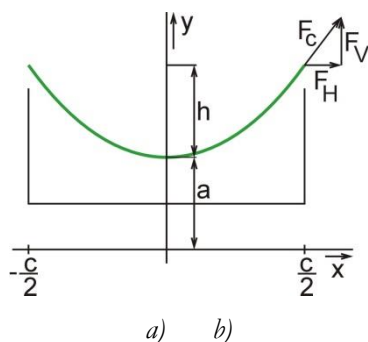
Pri zostavení matematického modelu neuvažujeme s tuhosťou pásu. Pás považujeme za dokonalé ohybné lano, ktoré je zaťažené vlastnou hmotnosťou. V tomto prípade previs pásu možno popísať funkciou reťazovky (Obr. 8.16a):

$$y = a \cosh(x/a) \quad (8.38)$$

kde c je vzdialenosť podpier a a je parameter.

Maximálny previs pásu je:

$$h = y\left(\frac{c}{2}\right) - a = a \left[\cosh\left(\frac{c}{2a}\right) - 1 \right] \quad (8.39)$$



Obr. 8.16 a) Náhrada previsu reťazovkou,
b) silové a momentové pomery na jednom podpornom valčeku

Celková ťahová sila v páse F_c pozostáva z horizontálnej zložky F_h a z vertikálnej F_v , teda:

$$F_h = q a g = \text{konšt.} \quad F_v = F_h \sinh(x/a) \quad (8.40)$$

kde

$$F_c = \sqrt{F_h^2 + F_v^2} = q a g \cosh(x/a) \quad (8.41)$$

pričom q je hmotnosť pásu pripadajúca na jednotku dĺžky.

Maximálny ťah v páse sa vyskytne v mieste podpery, $x = \pm c/2$, t. j.:

$$F_{c \max} = q a g \cosh\left(\frac{c}{2a}\right) \quad (8.42)$$

čo nám vstupuje do matematického modelu.

Uvedené vzťahy doplníme dynamickou rovnicou pre translačný pohyb: pre i -tý podperný valček (Obr. 8.16b), s ktorým susedí j a $j + 1$ moriaca vaňa, je:

$$F_{j+1} - F_j - 0,5F_{t,i-1} - 0,5F_{t,i} = m_i \frac{dv_i}{dt} \quad (8.43)$$

kde F_t je tlmiaca hydraulická sila, ktorá závisí od rýchlosti zmeny dĺžky, viskozity kvapaliny a od geometrických rozmerov vane a pásu a od povrchu pásu (drsnoty).

Keďže viskozita kvapaliny a geometrické rozmery sú konštantné, môžeme písať:

$$F_t = f\left(\frac{dl}{dt}\right) \quad (8.44)$$

Určiť F_t analyticky je obtiažné. Pri praktickom riešení preto zvolíme hodnotu tlmenia približne, avšak menej než očakávame v reálnej sústave pričom vychádzame z predpokladu: ak návrh regulácie bude pre tento prípad vyhovujúci, pri väčšom tlmení bude priebeh prechodových dejov priaznivejší. Pri uvažovaní vplyvu kvapaliny a danej rýchlosti pásu dochádza tiež k porušeniu symetrie polohy pásu. Zložka sily trenie v zostupujúcej časti pásu pôsobí proti sile, vo vystupujúcej časti zase súhlasne s tangenciálnou zložkou sily od hmotnosti pásu od hmotnosti pásu. Dôsledkom je vysunutie najnižšieho bodu zo stredu vane, čo závisí aj od rýchlosti pásu (tento jav v našich úvahách zanedbáme).

Premenná m_i v rovnici (8.43) predstavuje ekvivalentnú hmotnosť i -tého podperného valčeka, ktorá okrem prepočítanej hmotnosti (z momentu zotrvačnosti) vlastného valčeka zahrnuje aj ekvivalentnú hmotnosť pásu, pripadajúceho na daný valček, a prípadného pohonného motora, poháňajúceho valček cez prevodovku s prevodom j :

$$m_i = \frac{1}{2} q l_{i-1,i} + \frac{1}{2} q l_{i,i+1} + J_v \frac{1}{r_v^2} + J_m \frac{j^2}{r_v^2} \quad (8.45)$$

Dĺžku pásu nachádzajúceho sa v slučke určíme pomocou vzťahu:

$$l = \int_{-c/2}^{c/2} \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2 a \sinh\left(\frac{c}{2a}\right) \quad (8.46)$$

Pri zmenách vstupnej v_j a výstupnej rýchlosti v_{j+1} pásu v j -tej vani sa mení dĺžka pásu v slučke podľa vzťahu:

$$l_j = \int_0^t (v_j - v_{j+1}) dt + l_{j0} \quad (8.47)$$

kde l_{j0} je počiatočná dĺžka pásu v slučke.

Z uvedených rovníc možno zostaviť matematický model previsu pásu, ktorý je nelineárny a tým pre praktické použitie je nevhodný.

Linearizovaný model previsu pásu

Pre zostavenie linearizovaného modelu zjednodušíme hyperbolické funkcie popisujúce reťazovku a uvažujeme len prvé dva členy:

$$\sinh(x) = x + x^3 \frac{1}{3!} + x^5 \frac{1}{5!} + \dots \quad (8.48)$$

$$\cosh(x) = 1 + x^2 \frac{1}{2!} + x^4 \frac{1}{4!} + \dots \quad (8.49)$$

Na základe toho upravíme previs pásu z rovnice (8.39):

$$h \doteq a \left(\frac{c^2}{8a^2} - 1 \right) \quad (8.50)$$

Odkiaľ určíme hodnotu parametra a :

$$h \doteq a \left(\frac{c^2}{8a^2} - 1 \right) \quad (8.51)$$

ktorý dosadíme do rovnice (8.46), odkiaľ po linearizácii získame výsledný vzťah medzi previsom pásu a jeho dĺžkou v slučke:

$$l \doteq c + \frac{c^3}{24a^2} = c \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{h}{c} \right)^2 \right] \quad (8.52)$$

odkiaľ získame výsledný vzťah medzi previsom a dĺžkou pásu

$$h = \sqrt{\frac{3}{8} c (l - c)} \quad (8.53)$$

Zaujíma nás celková sila v páse v podpernom bode (napr. kvôli určeniu veľkosti záťažného momentu pohonného motora). Dostaneme ju úpravou rovnice (8.42):

$$F_{c \max} = q a g \left(1 + \frac{c^2}{8a^2} \right) = q g \left(\frac{c^2}{8h} + h \right) \quad (8.54)$$

Jej minimálnu hodnotu určíme derivovaním tejto rovnice:

$$\frac{d F_c}{d h} = 0 \quad (8.55)$$

Čím dostaneme $h = c/\sqrt{8} = 0,354 c$.

Pri malých previsoch h sa v rovnici (8.54) uplatní hlavne prvý člen (premenná h je v menovateli). Od veľkosti previsu závisí tiež horizontálna zložka sily:

$$F_h = q a g \doteq q g \frac{c^2}{8h} \quad (8.56)$$

čo platí aj naopak - od tejto sily závisí veľkosť h previsu.

Ak pás vytvára viac voľných slučiek s rovnakou vzdialenosťou podperných valčekov, v ustálenom stave budú rovnaké aj previsy jednotlivých slučiek. V prevádzke takéhoto úseku linky sa z technologického hľadiska spravidla požaduje konštantná veľkosť previsu pásu. Túto je možné dosiahnuť zaradením snímača veľkosti previsu (polohy slučky) a na základe jeho veľkosti regulovať prítok alebo odtok materiálu.

V prípade, ak snímač polohy nie je možné umiestniť (napr. kvôli agresívnemu prostrediu), potom využijeme znalosti medzi ťahom v páse a veľkosťou previsu (rovnica 8.54) a reguláciu previsu tak prevedieme na reguláciu ťahu v páse.

Pre návrh takéhoto regulátora treba model linearizovať. Linearizovaný model dostaneme diferencovaním rovníc (8.43), (8.47), (8.53) a (8.56) ktorý zapíšeme s odpovedajúcimi indexmi (i -tý valček susediaci j a $j + 1$ vaňou):

$$\Delta F_{j+1} - \Delta F_j - \Delta F_t = m_i \frac{d\Delta v_i}{dt} \quad (8.57)$$

$$\Delta F_j = -q g \frac{c^2}{8 h_{j0}^2} \Delta h_j = -K_F \Delta h_j \quad (8.58)$$

$$\Delta h_j = \frac{\frac{3}{8} c \Delta l_j}{\sqrt{\frac{3}{8} c (l_{j0} - c)}} = K_h \Delta l_j \quad (8.59)$$

$$\Delta l_j = \int (\Delta v_i - \Delta v_{i+1}) dt \quad (8.60)$$

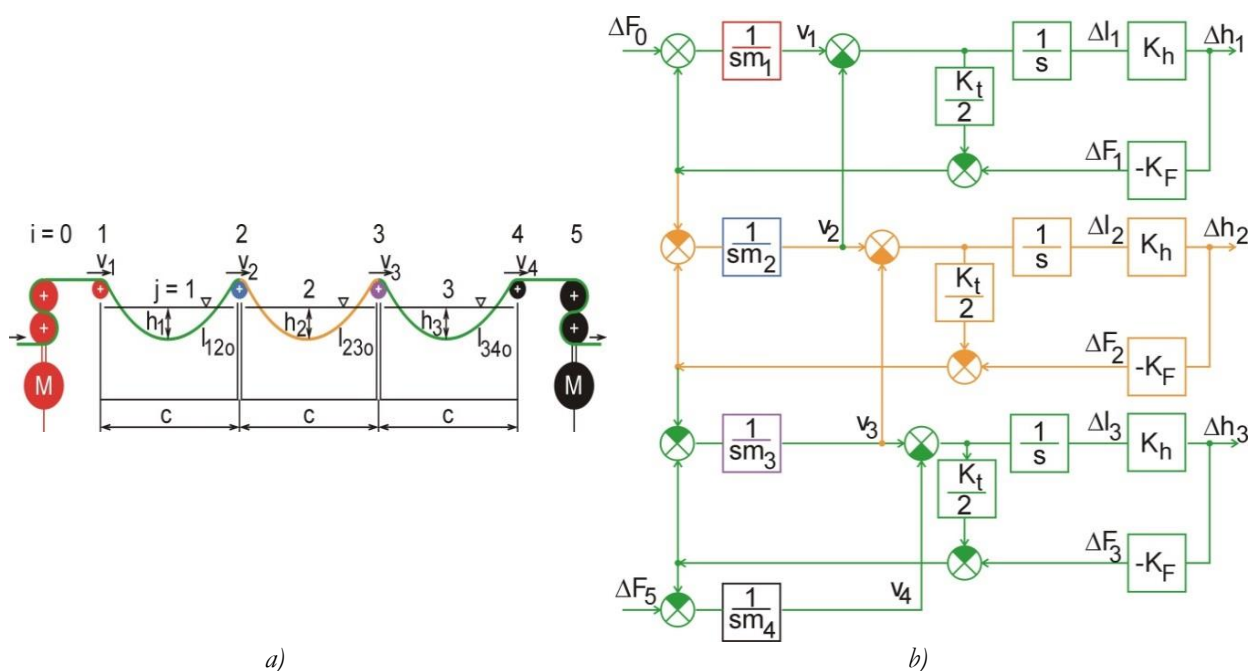
kde K_F , K_h sú odpovedajúce konštanty linearizovaného modelu. Pritom predpokladáme, že ustálené hodnoty dĺžok l_{j0} pásu v každej vani a previsov h_{i0} sú rovnaké.

V linearizovanom modeli predpokladáme, že tlmiaca sila je lineárne závislá (s konštantou K_t) od derivácie prírastku dĺžky:

$$\Delta F_t = K_t \frac{d\Delta l}{dt} \quad (8.61)$$

Bloková schéma je uvedená na Obr. 8.17b. Pre úplnosť a prehľadnosť je na Obr. 8.18a znovu nakreslené usporiadanie linky, pôvodne uvedené na Obr. 8.16. Ku ekvivalentným hmotnostiam m_1 a m_5 treba okrem hmotnosti prvého valčeka pripočítať tiež hmotnosti vstupných a výstupných ťažných/podávacích valcov. Sily ΔF_0 a ΔF_5 sú odvodené od momentov pohonov.

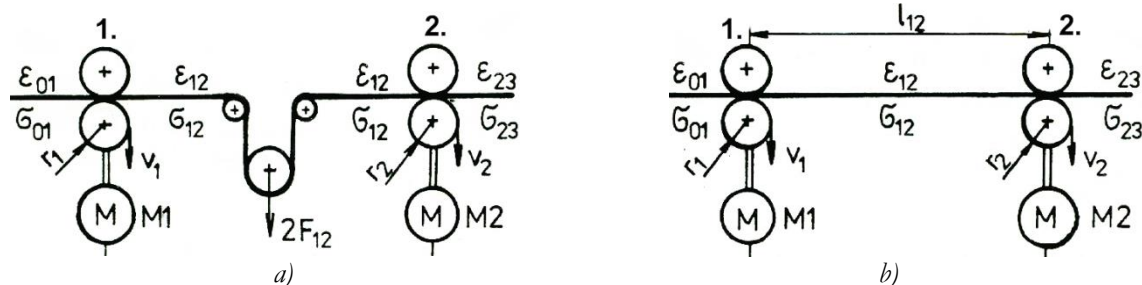
Model umožňuje simulovanie rôznych prevádzkových stavov uvedenej technologickej časti zariadenia a sledovanie vplyvu rôznych porúch. Model zariadenie s viacnásobným previsom pásu má kmitavý charakter a tvorí pružný člen medzi vstupnými a výstupnými ťažnými valcami, ktoré sú poháňané elektrickými pohonmi.



Obr. 8.17 Model viacnásobného previsu pásu v moriacich vaniach:
a) schéma úseku linky, b) linearizovaná bloková schéma

8.7 Model časti linky s dvoma strojmi

V doterajších rozboroch sme neuvažovali zotrvačné hmoty valcov, ktoré vystupujú v pohybových rovniciach. Každý transportný člen so svojimi valcami a motorom predstavuje konštantný zásobník mechanickej energie. Ak spojíme jeden transportný člen s druhým (Obr. 8.18), potom pás medzi týmito členmi predstavuje ďalší zásobník energie, ktorý vzhľadom na svoju dĺžku l_{jk} a pomerné predĺženie $\varepsilon_{jk} > 0$ je premenlivý. Prenosom sily cez ťažné valce sú spojené všetky tri zásobníky, takže celkove dostávame kmitavý mechanický systém 3. rádu.



Obr. 8.18 Dve možné väzby pracovných strojov spracovávaným materiálom

Z Obr. 8.18 vyplývajú dve možné väzby pracovných strojov:

1. Podsystem s vnúteným (konštantným) ťahom (Obr. 8.18a), ktorý je vytváraný prostredníctvom napínacieho valca, nachádzajúceho sa v slučke. Pás v tomto podsysteme môže meniť svoju dĺžku (pri konštantnom pomernom predĺžení), čím sa mení aj veľkosť objemového zásobníka energie pružného pásu. Hmotnosť valca, ktorá by v podstate predstavovala ďalší zásobník energie, pri predpoklade malého vertikálneho pohybu valca zanedbáme.

2. Podsystem vnútenou (konštantnou) dĺžkou pásu medzi transportnými valcami (Obr. 8.18b), v ktorom v závislosti od pomeru obvodových rýchlostí sa mení pomerné predĺženie materiálu, čím sa takisto mení veľkosť zásoby energie pružného pásu. Dvomi rozdielnymi podsystemami budú odpovedať aj dve rôzne blokové schémy. Pri odvodení vychádzame z pohybových rovníc pre prvý a druhý stroj; pričom kvôli kontinuite s predchádzajúcim výkladom je vhodnejšie aplikovať pohybové rovnice pre translačný pohyb. Moment zotrvačnosti motora a ťažných valcov prepočítame na ekvivalentnú zotrvačnú hmotu (na základe rovnosti energie rotačného a translačného pohybu):

$$m = J \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 = J \frac{1}{j^2} \quad (8.62)$$

Pohybové rovnice obidvoch strojov sú:

$$F_{12} - F_{01} + \frac{M_1}{r_1} = m_1 \frac{dv_1}{dt} \quad (8.63)$$

$$F_{23} - F_{12} + \frac{M_2}{r_2} = m_2 \frac{dv_2}{dt} \quad (8.64)$$

Pre tok materiálu úsekom medzi pracovnými strojmi vychádzame z bilančnej rovnice

$$v_2 - v_1 = \frac{d l_{12}}{dt} \quad (8.65)$$

kde v_1 (v_2) obvodová rýchlosť prvého (druhého) valca (resp. rýchlosť prichádzajúceho (odchádzajúceho) pásu a dl/dt je zmena zásoby.

Keďže pri pôsobení ťahu v danom úseku dochádza ku predĺženiu pásu, v rovnici (8.64) je potrebné uvažovať aj rovnicu kontinuity (24), čím dostaneme:

$$\frac{v_2}{1 + \varepsilon_{12}} - \frac{v_1}{1 + \varepsilon_{01}} = \frac{d}{dt} \frac{l_{12}}{1 + \varepsilon_{12}} \quad (8.66)$$

V ustálenom stave (index „o“) platí rovnica (8.19):

$$\frac{v_{1o}}{l + \varepsilon_{01o}} = \frac{v_{2o}}{l + \varepsilon_{12o}} = \frac{v_o}{1 + 0} \quad (8.67)$$

Aby sme z rovnice (8.20) mohli zostaviť blokovú schému, musíme ju linearizovať (premenné v_1 , v_2 , ε_{01} , ε_{12} , l_{12} sú funkciami času). Zlomkové funkcie v tejto rovnici linearizujeme v ustálenom pracovnom bode danom v_{1o} , v_{2o} , ε_{01o} , ε_{12o} , l_{12o} tak, že zostavíme úplný diferenciál z funkcie v tvare:

$$f = \frac{x}{1 + \varepsilon_{ij}}; \quad i = 0, 1; \quad j = i + 1 \quad (8.68)$$

kde miesto x dosadíme príslušnú premennú, teda:

$$\Delta f = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\varepsilon_{ijo}} \Delta x + \left[\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \right]_{x_o} \Delta \varepsilon_{ij} = \frac{\Delta x}{1 + \varepsilon_{ijo}} - \frac{x_o + \Delta \varepsilon_{ij}}{(1 + \varepsilon_{ijo})^2} \quad (8.69)$$

Výraz (8.69) sa zjednoduší, ak $\varepsilon_{ijo} \ll 1$, teda:

$$\Delta f = \Delta x - x_o \Delta \varepsilon_{ij} \quad (8.70)$$

Po linearizácii obidvoch strán rovnice (8.66) uvedeným spôsobom a úprave dostaneme

$$\Delta v_1 - v_{1o} \Delta \varepsilon_{01} + \Delta v_2 + v_{2o} \Delta \varepsilon_{12} = l_{12o} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta l_{12}}{l_{12o}} - \Delta \varepsilon_{12} \right) \quad (8.71)$$

Celú rovnicu delíme v_o a výraz na pravej strane má rozmer časovej konštanty

$$T_{12} = \frac{l_{12o}}{v_o} \quad (8.72)$$

Upravená rovnica (8.71) bude v tvare

$$\frac{\Delta v_1}{v_o} - \Delta \varepsilon_{01} + \frac{\Delta v_2}{v_o} + \Delta \varepsilon_{12} = T_{12} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta l_{12}}{l_{12o}} - \Delta \varepsilon_{12} \right) \quad (8.73)$$

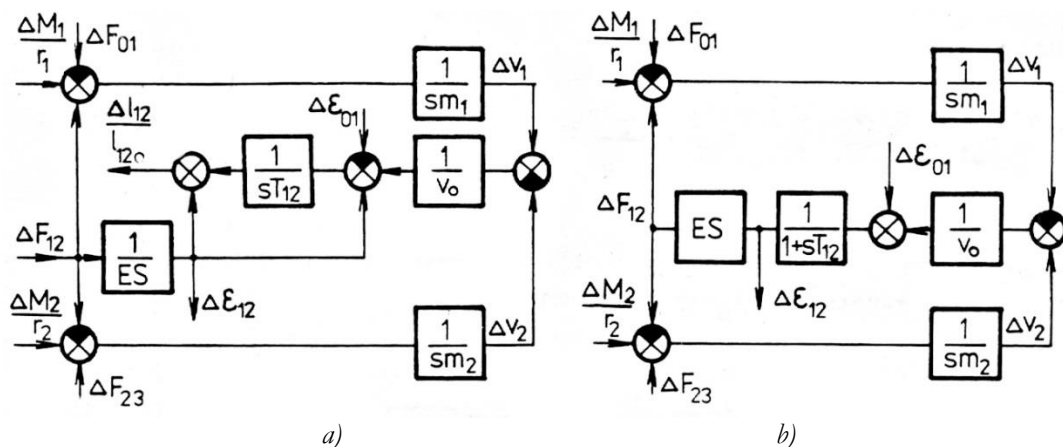
čo predstavuje linearizovaný model pásu. Túto rovnicu doplníme pohybovými rovnicami (39) v prírastkovom tvare

$$F_{12} - \Delta F_{01} + \frac{\Delta M_1}{r_1} = m_1 \frac{d\Delta v_1}{dt} \quad (8.74)$$

$$F_{23} - \Delta F_{12} + \frac{\Delta M_2}{r_2} = m_2 \frac{d\Delta v_2}{dt} \quad (8.75)$$

čím sme dostali linearizovaný model mechanickej časti kontinuálnej linky.

Rovnica (8.73) obsahuje dve rôzne prevádzkové usporiadania, dané blokovými schémami na Obr. 8.19.



Obr. 8.19 Blokové schémy linearizovaných matematických modelov mechanických častí linky z Obr. 8.19

- 1) Ak je uvažovanej časti linky vnútený ťah (schéma na Obr. 8.19a), potom zo zásobníkov energie sa môže meniť iba dĺžka pásu l_{12} a to s integrálnym charakterom pri výskyte poruchy spôsobenej buď zmenou rýchlostí Δv_1 , Δv_2 , zmenou predchádzajúceho ťahu $\Delta \epsilon_1$, prípadne zmenou sily ΔF_{12} , pôsobiacej na napínací valec. Pretože po tejto zmene nenastáva vyrovnanie, poloha napínacieho valca bude labilná, t.j. každá porucha spôsobí zmenu dĺžky. Z uvedeného rozboru vyplýva, že pohon vstupných ťažných valcov musí byť vybavený takou reguláciou, ktorá stabilizuje systém (napríklad, korekčným signálom od polohy napínacieho valca do rýchlostnej regulácie).
- 2) Systém môžeme stabilizovať aj ináč - tak, že valec budeme napínať ťažnou pružinou, ktorá by vytvárala silu F priamo úmernú dĺžke. Tým však zavádzame premenlivé pomerné predĺženie čomu odpovedá premenlivý ťah v materiáli. To sa môže nepriaznivo prejaviť v ďalšej časti linky.
- 3) Ak uvažovanej časti linky je vnútená dĺžka pásu l_{12} (bloková schéma na Obr. 8.19b), potom zo zásobníkov mechanickej energie sa môže meniť iba predĺženie. Zmenou pomerného predĺženia $\Delta \epsilon_{12}$ sa ovplyvňuje rýchlosť odchádzajúceho pásu. Porucha v linke spôsobená zmenou rýchlosti alebo zmenou predchádzajúceho predĺženia sa v linke šíri s exponenciálnym charakterom postupne v smere toku materiálu.

Dynamické vlastnosti jednotlivých podsystémov závisia od konštánt SE , l , m a predovšetkým od prevádzkovej rýchlosti v_o . Ich podrobný popis možno nájsť v [46] – [48]. Pre vyšetrenie vplyvu rýchlosti v_o na dynamiku upravíme dynamické rovnice (8.74), (8.75) tak, že zavedieme $\Delta F - \Delta \epsilon SE$. Upravené rovnice pre nakreslenie blokovej schémy sú:

$$\Delta \epsilon_{12} - \Delta \epsilon_{01} + \frac{\Delta M_1}{r_1 SE} = T_{m1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta v_1}{v_o} \right) \quad (8.76)$$

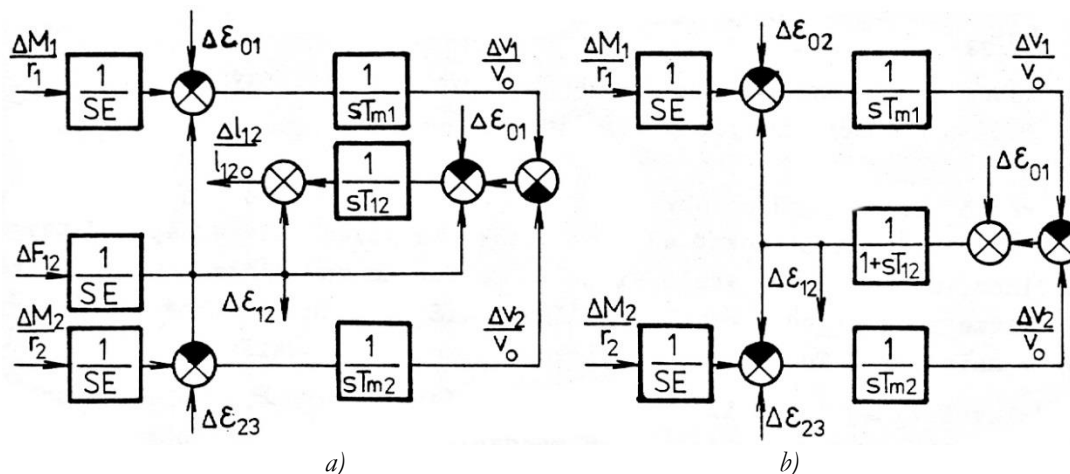
$$\Delta \epsilon_{23} - \Delta \epsilon_{12} + \frac{\Delta M_2}{r_2 SE} = T_{m2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta v_2}{v_o} \right) \quad (8.77)$$

$$\Delta \epsilon_{12} - \Delta \epsilon_{01} + \left(\frac{\Delta v_1}{v_o} - \frac{\Delta v_2}{v_o} \right) = T_{12} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta l_{12}}{l_{12o}} - \Delta \epsilon_{12} \right) \quad (8.78)$$

kde časové konštanty majú význam:

$$T_{m1} = \frac{m_1 v_o}{SE} \quad T_{m2} = \frac{m_m v_o}{SE} \quad T_{12} = \frac{l_{12o}}{v_o} \quad (8.79)$$

Odpovedajúce blokové schémy pre obidva vyššie uvedené prípady sú na Obr. 8.20. Časová konštanta T_m predstavuje čas, za ktorý sa zotrvačná hmota zrýchli z nulovej rýchlosti $v = 0$ na strednú rýchlosť pásu $v = v_0$, ak v pásе pôsobí sila $F = SE$. T_{12} predstavuje dobu prechodu pásu medzi dvoma strojmi. Časová konštanta T_m závisí priamo úmerne od strednej rýchlosti pásu v_0 a časová konštanta T_{12} nepriamo úmerne od tejto rýchlosti; čím rýchlejšie sa pohybuje pás, tým rýchlejší je priebeh prechodových dejov.



Obr. 8.20 Upravené blokové schémy podsystemov linky z Obr. 8.20

Bloková schéma podsystemu s vnútenou dĺžkou (Obr. 8.20b) sa skladá z dvoch uzavretých slučiek so spoločným prenosovým členom $1/(1 + sT_{12})$. Pre každú slučku môžeme samostatne odvodiť [3] konstantu tlmenia prechodového deja:

$$d_1 \approx \sqrt{\frac{T_{m1}}{T_{12}}} = v_0 \sqrt{\frac{m_1 l_{12}}{SE}} \quad d_2 \approx \sqrt{\frac{T_{m2}}{T_{12}}} = v_0 \sqrt{\frac{m_2 l_{12}}{SE}} \quad (8.80)$$

t.j. tlmenie systému je tým väčšie, čím rýchlejšia je doba prechodu medzi strojmi, teda čím rýchlejšie sa prenesie energia z valcov na pás v oblasti dotyku. Z uvedeného vyplýva dôležitý uzáver – vplyv transportnej rýchlosti na tlmenie systému znamená, že pri rozbehu linky z kľudu a pri spomaľovaní prechádzame cez oblasť so zníženým tlmením. Charakter prechodových dejov teda závisí od pracovného bodu – od rýchlosti linky; pri veľmi malej rýchlosti dostávame kmitavé priebehy, blížiac sa netlmenému priebehu, pri vyššej rýchlosti aperiodické.

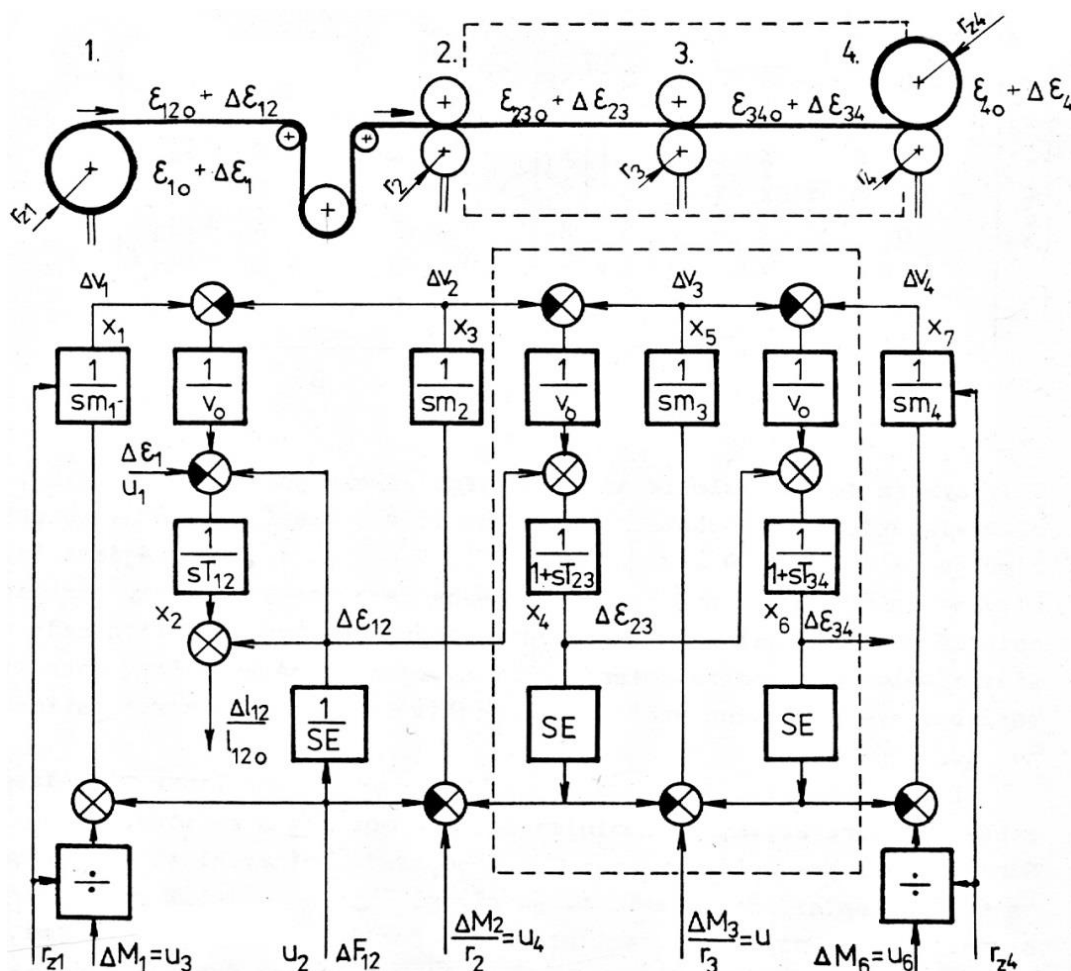
8.8 Model kontinuálnej linky s viacerými strojmi

Zložením modelov jednotlivých podsystemov podľa usporiadania danej kontinuálnej linky dostaneme jej výsledný model. Na Obr. 8.21 je nakreslené blokovo schéma linearizovaného modelu kontinuálnej linky s odvíjačkou, úsekom s napínacím valcom, dvoma ťažnými valcami a obvodovou navíjačkou [44]. Z tejto schémy vyplýva vzájomná súvislosť jednotlivých veličín. Pás sa odvíja so zvitku, na ktorý bol navinutý v predchádzajúcom technologickom procese a určitým ťahom, ktorému odpovedá pomerné predĺženie ε_1 . (nemusí byť konštantné).

Na výstupe linky sa navíja s pomerným predĺžením $\varepsilon_4 = \varepsilon_{34}$. Z blokovej schémy vyplýva, že poruchy v systéme, ktoré vznikajú kolísaním uhlových rýchlostí pracovných strojov vyvolávajúce zmeny pomerných predĺžení, sa v systéme môžu šíriť obidvoma smermi, t. j. všetky stavové veličiny systému sú navzájom viazané. Aj kolísanie vstupných predĺžení ε_1 sa šíri po celom systéme.

Ak v systéme je zaradený úsek s napínacím valcom, tento zabraňuje šíreniu porúch - ruší väzbu podsystemov a tým rozdelíme linku na dve autonómne časti, ktoré možno riešiť nezávisle na sebe (veľičina x_t odpovedajúca polohe napínacieho valca nemá väzbu s uvedeným systémom). Vnútenie obvodovej rýchlosti jednému stroju rýchlostnou reguláciou pohonného motora tiež spôsobí odväzbenie systému, avšak iba proti smeru pohybu pásu; poruchy v predĺžení sa môžu šíriť v smere pohybu.

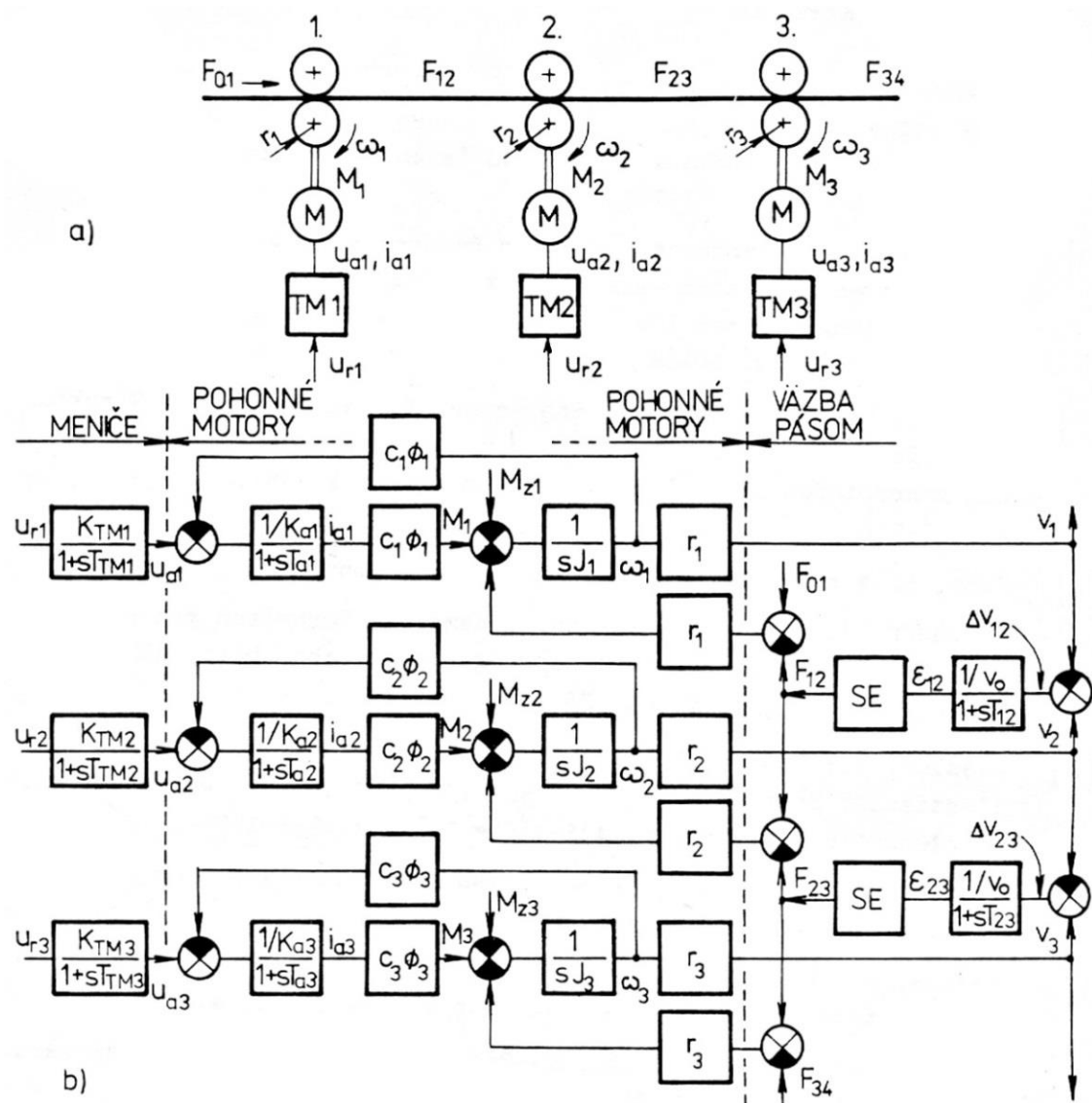
Celý systém možno rozložiť na podsystemy, ktorým odpovedajú dielčie blokové schémy, ako je to ukázané čiarkovane na Obr. 8.22.



Obr. 8.21 Linearizovaný model kontinuálnej linky

Pri zostavení celkovej schémy pohonného systému linky vychádzame zo schémy na Obr. 8.23, ktorú doplníme modelmi motorov a meničov (Obr. 8.23). Schéma platí pre určitý pracovný bod odpovedajúci rýchlosti v_0 ; ináč treba schému doplniť deličkami, t.j. signál vydeliť premenlivým signálom v_0 .

Z hľadiska teórie regulácie uvažovaná časť linky predstavuje neautonómny nelineárny dynamický systém: pri zmene rýchlosti strojov sa mení ťah v páse a naopak – pri zmene ťahu sa mení rýchlosť pásu. Pri viacerých strojoch v linke jeden z nich obvykle určuje rýchlosť pásu (rýchlostný člen linky), zatiaľ čo pohony ostatných strojov zabezpečujú požadované ťahy v jednotlivých úsekoch. syntézy je preto návrh takého regulačného systému, v ktorom sa ťahy a rýchlosti nebudú navzájom ovplyvňovať.



Obr. 8.22 Bloková schéma kontinuálnej linky s 3 strojmi

9 ZOSTAVENIE MODELOV DYNAMICKÝCH SYSTÉMOV POMOCO LAGRANGEOVÝCH ROVNÍC

Lagrangeovská formulácia mechaniky je považovaná za súčasť teoretickej mechaniky a jej základy predložil v roku 1788 Joseph Louis Lagrange. V tejto formulácii mechaniky sa k popisu systému používajú zovšeobecnené súradnice, čo zjednodušuje analýzu systému.

Lagrangeove rovnice sú zovšeobecnením Newtonových pohybových rovníc, keďže umožňujú formulovať pohybové rovnice i v oblastiach, kde Newtonove rovnice nemajú zmysel. Ich veľkou výhodou je predovšetkým prepis rovníc do sférických súradníc. Pri ich odvodení pre Lagrangeove rovnice sa zapisujú do dvoch tvarov, a to ako Lagrangeove rovnice prvého druhu a Lagrangeove rovnice druhého druhu.

V nasledujúcom texte potom popíšeme tieto modely dynamických mechanických systémov:

- 1) Jednoduché matematické kyvadlo
- 2) Dvojité matematické kyvadlo
- 3) Kyvadlo na vozíku
- 4) Kyvadlo na vozíku s pružinou
- 5) Trojité kyvadlo

9.1 Zostavenie Lagrangeových rovníc

9.1.1 Zovšeobecnené súradnice

Pre popis riešenia, platný univerzálne, pre rôzne mechanické systémy zavedieme tzv. zovšeobecnené súradnice q_i sústavy. [51].

Zovšeobecnené súradnice sú ľubovoľné parametre, ktoré jednoznačne popisujú všetky možné konfigurácie daného systému. Pod tým máme na mysli tvary trajektórií, polohy hmotných bodov, uhly natočenia a pod. Tu treba rozlišovať medzi pojmom konfigurácia a stav; zovšeobecnené súradnice nepopisujú stav (na rozdiel napr. od stavových veličín). Zovšeobecnené súradnice popisujú tzv. konfiguračný priestor. (ktorý nie je priestorom fyzikálnych stavov systému).

Zovšeobecným súradnicami môžu byť kartézské (pravouhlé) súradnice, polárne súradnice, uhly, atď. ... Volíme ich tak, aby jednoznačne popisovali konfiguráciu daného systému a pritom tento popis bol čo možno najvýhodnejší pre ďalšie výpočty. Počet n súradníc sa volí menší alebo rovný počtu stupňov voľnosti. Súradnice všetkých hmotných bodov sú potom vyjadrené ako funkcie n nezávislých premenných q_i , t.j.

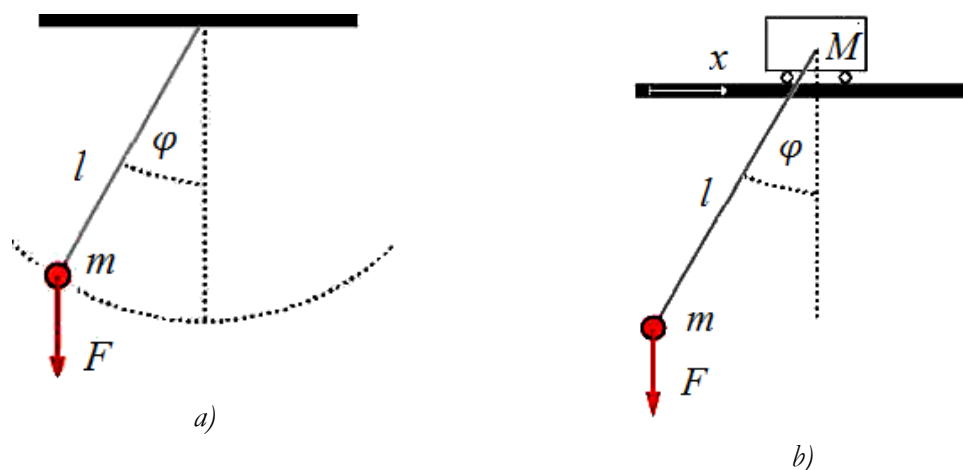
$$r = f(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (9.1)$$

Zovšeobecnené súradnice q_i nie sú nijako obmedzené a vo všeobecnosti nemusia mať rozmer dĺžky, ale môžu to byť ľubovoľné mechanické veličiny. Podmienkou však je to, aby boli splnené uvedené väzbové podmienky pre ľubovoľné hodnoty q_i .

Príklady zovšeobecnených súradníc:

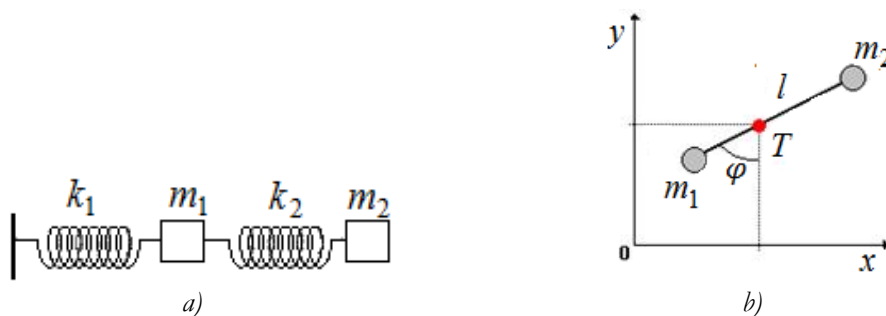
- 1) **Jednoduché kyvadlo** (Obr. 9.1a). Zovšeobecnou súradnicou je uhol φ , ktorý popisuje výchylku hmotného bodu z rovnovážnej polohy, t.j. $q_1 = \varphi$.
- 2) **Kyvadlo na vozíku bez trenia** (Obr. 9.1b), tzv. eliptické kyvadlo, je realizované telesom o hmotnosti m , ktoré sa môže bez trenia pohybovať po úsečke po vodorovnej podložke. Ku

vozíku je zavesené na vlákne so zanedbateľnou hmotnosťou teleso o hmotnosti m , ktoré sa pohybuje vždy proti pohybu telesa o hmotnosti M (tážiisko sústavy zostáva na mieste). Preto sa teleso o hmotnosti m pohybuje po elipse. V tomto prípade vhodnými zovšeobecnenými súradnicami sú poloha telesa a výchylka telesa o hmotnosti m z rovnovážnej polohy, teda $q_1 = x$ a $q_2 = \varphi$. Konfiguračným priestorom je valcová plocha. Konfiguračným priestorom je valcová plocha.



Obr. 9.1 Príklady zovšeobecnených súradníc

- 3) **Dve spojené pružiny** (Obr. 9.2a) môžu kmitať iba v jednom smere. Pre popis systému existuje niekoľko možností zovšeobecnených súradníc: vzdialenosti telies upevnených na pružinách od miesta upevnenia prvej pružiny k pevnej stene, dĺžky pružín, ... Najvhodnejšie sa však popisujú výchylky pružín od rovnovážnej polohy. Preto zavedieme zovšeobecnené súradnice: $q_1 = x_1$ a $q_2 = x_2$.
- 4) **Tyč s dvoma hmotnosťami na koncoch**, pohybujúca sa v rovine (tzv. „činka“, Obr. 9.2b). Systém možno optimálne popísať urobiť pomocou súradnice polohy ťažiska (popisuje translačný pohyb ťažiska) a uhla natočenia činky (popisuje rotačný pohyb). Preto: $q_1 = x$ a $q_2 = \varphi$ a $q_1 = x_1$ a $q_3 = \varphi$.



Obr. 9.2 Ďalšie príklady zovšeobecnených súradníc

9.1.2 Postup pri zostavovaní Lagrangeových rovníc

<http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1241-postup-pro-sestaveni-lagrangeovych-rovnic>

Lagrangeove rovnice druhého druhu sú rovnice, ktoré umožňujú vytvorenie pohybových rovníc sústavy hmotných bodov zavedením tzv. zovšeobecnených súradníc. Pre správne zostavenie Lagrangeových rovníc druhého druhu existuje doporučený postup (Tab. 9.1).

Tab. 9.1 Postup pri zostavovaní Lagrangeových rovníc dynamického systému

#	Činnosť	Matematická operácia
1)	Zavedú sa zovšeobecnené súradnice	q_j pre $j = 1, 2, \dots, n$
2)	Nájdu sa matematické vzťahy medzi týmito zovšeobecnými súradnicami a kartézskymi súradnicami	$x_i = x_i(q_j)$ pre $i = 1, 2, \dots, 3N$ $j = 1, 2, \dots, n$
3)	Určia sa derivácie vzťahov z bodu 2)	$\frac{dx_i}{dt}$ pre $i = 1, 2, \dots, 3N$
4)	Určí sa kinetická energiu T v tvare	$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2$
5)	Určí sa potenciálna energiu V tak, že do funkcie $V = V(x_i)$ dosadíme $x_i(q_j)$ a získame funkciu v tvare	$V = V(q_j, \dot{q}_j, t)$ pre $i = 1, 2, \dots, 3N$ $j = 1, 2, \dots, n$
6)	Vypočíta sa lagrangián daného systému a jeho derivácie podľa zovšeobecných súradníc a podľa zovšeobecných rýchlostí	$L = T - V$
7)	Napišu sa Lagrangeove rovnice druhého druhu	$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$

9.1.3 Lagrangeove rovnice druhého druhu

Zavedieme Lagrangian: <http://fyzika.jreichl.com/main/article/view/1238-konzervativni-sily>

$$L = T - V \quad (9.2)$$

ktorý predstavuje rozdiel medzi kinetickou T a potenciálnou V energiou sústavy.

Lagrangeove rovnice druhého druhu majú nasledovný tvar:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \text{ pre } i = 1, 2, \dots, \nu \quad (9.3)$$

V konzervatívnom poli je možné k sile F_i nájsť potencióálnu energiu V takú, že platí:

$$F_i = - \frac{\partial V(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} \quad (9.4)$$

Zovšeobecnenú silu potom môžeme vyjadriť v tvare:

$$Q_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (9.5)$$

Ak použijeme Lagrangeovu funkciu L v tvare (9.2), potom je možné Lagrangeove rovnice druhého druhu napísať ako:

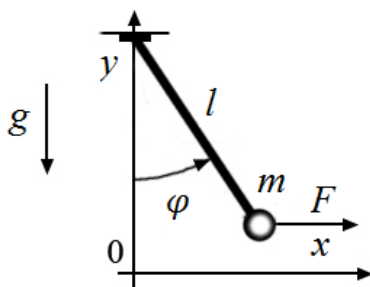
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (9.6)$$

9.2 Zostavenie modelu jednoduchého kyvadla pomocou Lagrangeových rovníc

Jednoduché matematické kyvadlo je modelom dynamického systému, ktorý pozostáva z hmotného bodu s hmotnosťou m a lana (alebo iného spájacieho média, napríklad železnej tyče) s dĺžkou l , na ktorom je tento hmotný bod zavesený. Hmotnosť lana v tomto prípade zanedbáme. Kyvadlo je ukotvené nad ťažiskom hmotného bodu a môže sa v ňom voľne pohybovať vo vodorovnom smere. V bode závesu pôsobí tlmenie b .

9.2.1 Kinematická schéma a základné rovnice

Kinematická schéma jednoduchého kyvadla je uvedená na Obr. 9.3, [52].



Obr. 9.3 Kinematická schéma jednoduchého matematického kyvadla

Aby sme kyvadlo uviedli do pohybu, musíme ho vychýliť z vodorovnej osi o uhol φ_0 . Následný pohyb kyvadla je spôsobený silou $F = m g$, ktorá pôsobí zvisle nadol a je dôsledkom pôsobenia gravitačných síl na hmotný bod. Sila F je silou pôsobiacou na hmotný bod vo vodorovnej polohe a slúži iba na demonštráciu vychýlenia hmotného bodu v prípade, že naň pôsobia aj iné sily ako gravitačné (napríklad vplyv vetra na voľne visiace hmotný bod).

Základné rovnice pre polohu v smere osi x a y sú nasledovné:

$$x = l \sin \varphi \quad (9.7)$$

$$y = l (1 - \cos \varphi) \quad (9.8)$$

Zo vzťahu (9.7) môžeme deriváciou vyjadriť rýchlosť pohybu hmotného bodu v smere osi x :

$$\dot{x} = l \dot{\varphi} \cos \varphi \quad (9.9)$$

Následne vyjadríme zrýchlenie hmotného bodu v smere osi x ako druhú deriváciu polohy:

$$\ddot{x} = l \ddot{\varphi} \cos \varphi - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \quad (9.10)$$

9.2.2 Odvodenie úplného matematického modelu

Najprv vyjadríme kinetickú a potenciálnu energiu systému.

Kinetická energia:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m (l \dot{\varphi})^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 \quad (9.11)$$

Potenciálna energia:

$$V = mgy = mg(1 - \cos \varphi) \quad (9.12)$$

Zápis Lagrangeovej rovnice II. druhu vyzerá nasledovne:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} + Q_j \quad (9.13)$$

Jednotlivé derivácie vo vzťahu (9.13) majú nasledovný tvar:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 \right)}{\partial \dot{\varphi}_j} = m l^2 \dot{\varphi}^2 \quad (9.14)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d(m l^2 \dot{\varphi}^2)}{dt} = m l^2 \ddot{\varphi}^2 \quad (9.15)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\partial [mgl(1 - \cos \varphi)]}{\partial \varphi} = mgl \sin \varphi \doteq mgl\varphi \quad (9.16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 \right)}{\partial \varphi} \quad (9.17)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \varphi} = 0 \quad (9.18)$$

$$Q = 0 \quad (9.19)$$

Výsledná pohybová rovnica má tvar:

$$m l^2 \ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0 \quad (9.20)$$

Vyjadrením uhlového zrýchlenia zo vzťahu (9.20) dostávame výsledný vzťah:

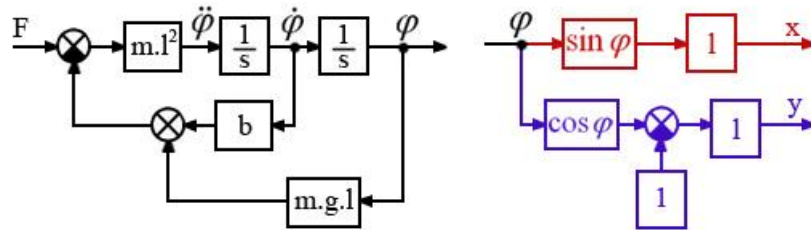
$$\ddot{\varphi} = - \frac{mgl\varphi}{m l^2} = - \frac{mgl}{m l^2} \varphi \quad (9.21)$$

Ak uvažujeme aj o vplyve tlmenia b a sile F , tak výsledná pohybová rovnica (9.21) bude mať nasledujúci tvar:

$$\ddot{\varphi} = \frac{F - b\dot{\varphi} - mgl}{m l^2} \varphi \quad (9.22)$$

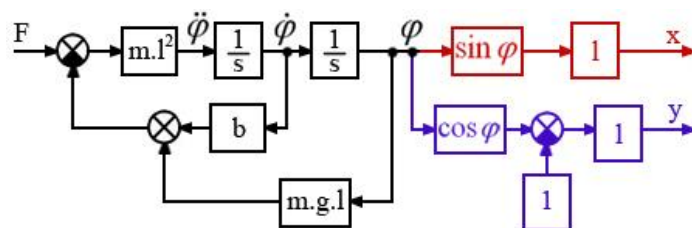
9.2.3 Bloková schéma a časové ododzvy

Z diferenciálnej rovnice (49) popisujúcej systém zostavíme blokovú schému, ktorá popisuje výpočet uhla φ (Obr. 9.4a). Zo vzťahov (34) a (35) popisujúcich polohu hmotného bodu v smere osí x a y zostavíme podobným spôsobom blokovú schému (Obr. 9.4b).

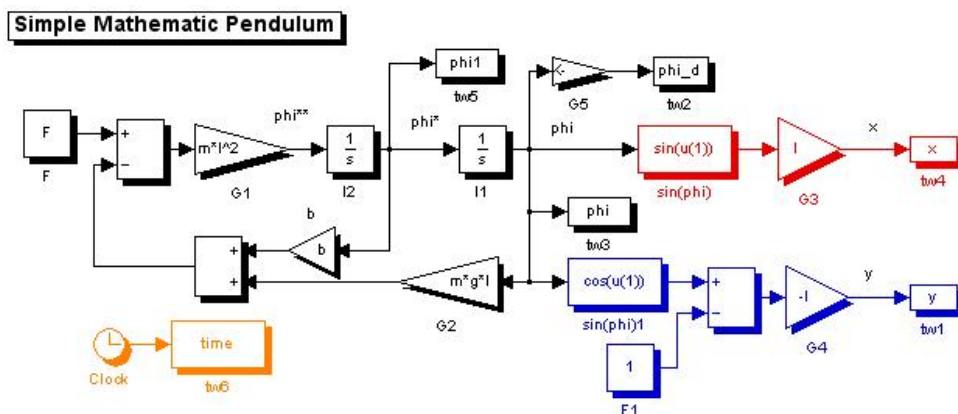


Obr. 9.4 Blokové schémy: a) pre výpočet uhla φ a b) polohy hmotného bodu

Spojením týchto dvoch schém získavame blokovú schému jednoduchého matematického kyvadla (Obr. 9.5) a programovú schému pre číslicovú simuláciu v Simulinku (Obr. 9.6).



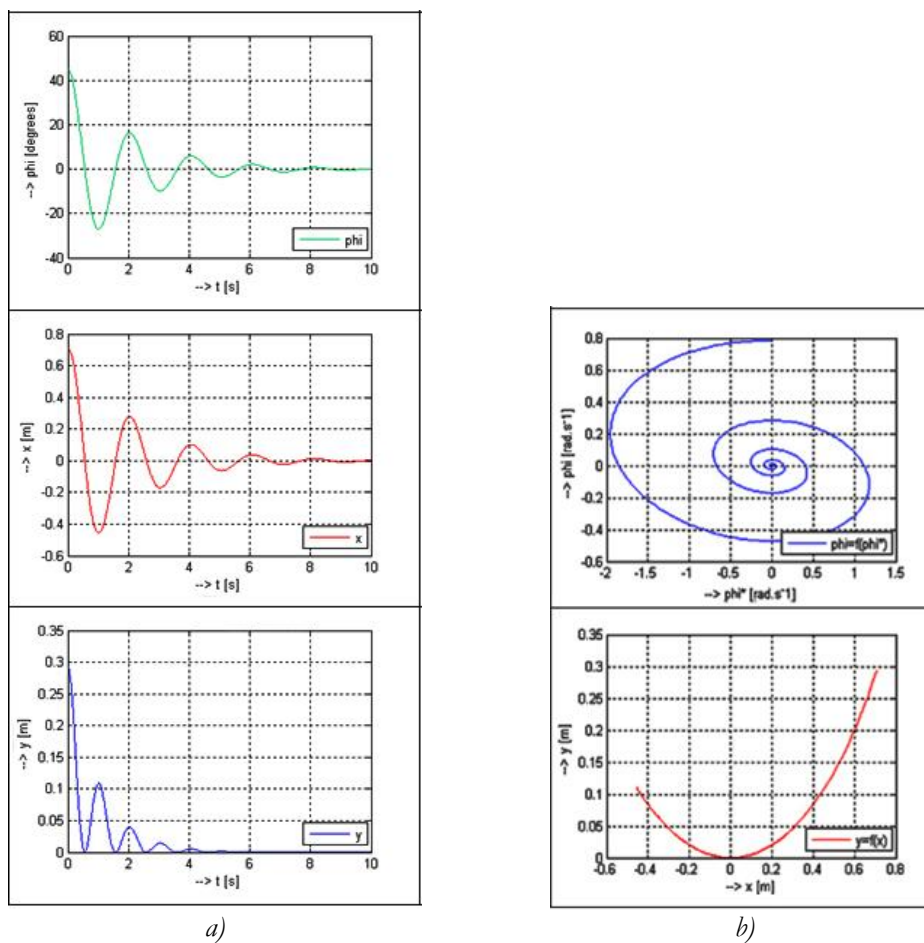
Obr. 9.5 Výsledná bloková schéma jednoduchého matematického kyvadla



Obr. 9.6 Programová schéma jednoduchého matematického kyvadla

Priebehy veličín jednoduchého kyvadla sú uvedené na Obr 9.7.

Hodnoty parametrov: $m = 1 \text{ kg}$, $l = 1 \text{ m}$, $F = 0 \text{ N}$, $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$.



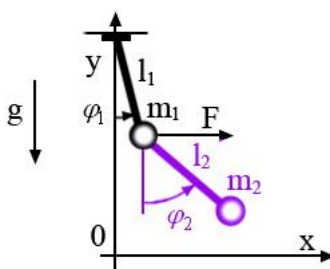
Obr. 9.7 Priebehy veličín jednoduchého kyvadla pre $b = 1$ a pre hodnotu počiatočného vychýlenia $\varphi_0 = 45^\circ$

9.3 Dvojité matematické kyvadlo

Dvojité matematické kyvadlo pozostáva z dvoch samostatných jednoduchých matematických kyvadiel, pričom kyvadlo 2 je pohyblivo ukotvené na kyvadle 1. Dvojité matematické kyvadlo teda pozostáva z 2 hmotných bodov s hmotnosťami m_1 a m_2 , ktoré sú zavesené na dvoch voľne vysiaticich lanách (alebo iných spájacích médiách, napríklad železných tyčiach) s dĺžkami l_1 a l_2 , pričom hmotnosti lán zanedbáme. Kyvadlo 1 je ukotvené nad ťažiskom oboch hmotných bodov a môže sa v ňom voľne pohybovať vo vodorovnom smere a v bode závesu naň pôsobí tlmenie b_1 . Kyvadlo 2 je ukotvené v mieste hmotného bodu kyvadla 1 a môže sa v ňom rovnako voľne pohybovať vo vodorovnom smere. V mieste ukotvenia naň pôsobí tlmenie b_2 .

9.3.1 Kinematická schéma a základné rovnice

Kinematická schéma dvojitého matematického kyvadla je uvedená na Obr. 9.8, pričom kyvadlo číslo jedna je znázornené čiernou farbou a kyvadlo číslo 2 farbou fialovou.



Obr. 9.8 Kinematická schéma dvojitého matematického kyvadla

Kyvadlo sa uvedie do pohybu vychýlením z vodorovnej osi o uhol φ_0 . Následný pohyb kyvadla je spôsobený silami $F_{g1} = m_1 g$ a $F_{g2} = m_2 g$, ktoré pôsobia zvisle nadol a sú dôsledkom pôsobenia gravitačných síl na hmotné body. Sila F je sila pôsobiaca na hmotný bod kyvadla 1 vo vodorovnej polohe a slúži iba na demonštráciu vychýlenia hmotného bodu v prípade, že naň pôsobia aj iné sily ako gravitačné (napríklad vplyv vetra na voľne visiacy hmotný bod).

V modeli tohto dynamického systému by sme mohli uvažovať aj ďalšie vstupné veličiny ako vychýlenie kyvadla 2 z vodorovnej osi φ_{20} alebo silu F_2 , ktorá by taktiež spôsobila stále vychýlenie hmotného bodu kyvadla 2, avšak hlavným cieľom práce je jej výukový charakter, z tohto dôvodu tieto veličiny kvôli prehľadnosti a jednoduchšiemu pochopeniu fungovania dvojitého matematického kyvadla vynecháme.

Základné rovnice pre polohu jednotlivých hmotných bodov v smere osi x a y sú:

$$x_1 = l_1 \sin \varphi_1 \quad (9.23)$$

$$y_1 = l_1 (1 - \cos \varphi_1) \quad (9.24)$$

$$x_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 \quad (9.25)$$

$$y_2 = l_1 (1 - \cos \varphi_1) + l_2 (1 - \cos \varphi_2) \quad (9.26)$$

9.3.2 Odvodenie úplného matematického modelu

Najprv vyjadríme kinetickú a potenciálnu energiu celého systému.

Kinetická energia:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\varphi}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1 \dot{\varphi}_1 + l_2 \dot{\varphi}_2)^2 \quad (9.27)$$

Dosadením vzťahov pre os x (9.23) a (9.25) do vzťahu (9.27) dostávame:

$$T = \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\varphi}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1 \dot{\varphi}_1)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} m_2 (l_2 \dot{\varphi}_2)^2 \quad (9.28)$$

a po úprave:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (l_1 \dot{\varphi}_1)^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} m_2 (l_2 \dot{\varphi}_2)^2 \quad (9.29)$$

Potenciálna energia:

$$V = m_1 \cdot g \cdot y_1 + m_2 \cdot g \cdot y_2 \quad (9.30)$$

Podobne dosadením vzťahov pre os y - (9.24) a (9.26) do vzťahu (9.30) dostávame:

$$V = m_1 \cdot g \cdot l_1 (1 - \cos \varphi_1) + m_2 \cdot g [l_1 (1 - \cos \varphi_1) + l_2 (1 - \cos \varphi_2)] \quad (9.31)$$

Zápis Lagrangeovej rovnice II. druhu vyzerá nasledovne:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} + Q_j \quad (9.32)$$

Deriváciou rovnice (9.32) podľa naznačených parametrov $q_1, q_2, \dot{q}_1$ a $\dot{q}_2$, dostávame vzťahy:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{\partial \left[\frac{1}{2} (m_1 + m_2) (l_1 \dot{\varphi}_1)^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} m_2 (l_2 \dot{\varphi}_2)^2 \right]}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \quad (9.33)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = \frac{d \left[(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \right]}{dt} = (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 \quad (9.34)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = \frac{\partial \left[\frac{1}{2} (m_1 + m_2) (l_1 \dot{\varphi}_1)^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} m_2 (l_2 \dot{\varphi}_2)^2 \right]}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2 \quad (9.35)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) = \frac{d \left[m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2 \right]}{dt} = m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 \quad (9.36)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial (m_1 \cdot g \cdot l_1 (1 - \cos \varphi_1) + m_2 \cdot g [l_1 (1 - \cos \varphi_1) + l_2 (1 - \cos \varphi_2)])}{\partial \varphi_1} \quad (9.37)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = m_1 \cdot g \cdot l_1 \cdot \sin \varphi_1 + m_2 \cdot g \cdot l_1 \cdot \sin \varphi_1 = m_1 \cdot g \cdot l_1 \cdot \varphi_1 + m_2 \cdot g \cdot l_1 \cdot \varphi_1 = (m_1 + m_2) \cdot g \cdot l_1 \cdot \varphi_1 \quad (9.38)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial (m_1 \cdot g \cdot l_1 (1 - \cos \varphi_1) + m_2 \cdot g [l_1 (1 - \cos \varphi_1) + l_2 (1 - \cos \varphi_2)])}{\partial \varphi_2} \quad (9.39)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = m_2 \cdot g \cdot l_2 \cdot \sin \varphi_2 = m_2 \cdot g \cdot l_2 \cdot \varphi_2 \quad (9.40)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial \left[\frac{1}{2} (m_1 + m_2) (l_1 \dot{\varphi}_1)^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} m_2 (l_2 \dot{\varphi}_2)^2 \right]}{\partial \varphi_1} = 0 \quad (9.41)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial \left[\frac{1}{2} (m_1 + m_2) (l_1 \dot{\varphi}_1)^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} m_2 (l_2 \dot{\varphi}_2)^2 \right]}{\partial \varphi_2} = 0 \quad (9.42)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_1} \quad (9.43)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_2} \quad (9.44)$$

$$Q = 0 \quad (9.45)$$

Dostávame sa tak ku konečnej podobe pohybových rovníc.

1. pohybová rovnica

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) + \frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = 0 \quad (9.46)$$

Do (9.46) dosadíme vzťahy (9.34) a (9.38), čím dostaneme:

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \varphi_1 = 0 \quad (9.47)$$

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{-m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 - (m_1 + m_2) g l_1 \varphi_1}{(m_1 + m_2) l_1^2} \quad (9.48)$$

Úpravou získavame konečnú podobu prvej pohybovej rovnice systému:

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{-m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 - (m_1 + m_2) g l_1 \varphi_1}{(m_1 + m_2) l_1^2} \quad (9.49)$$

2. pohybová rovnica

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) + \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = 0 \quad (9.50)$$

Do (9.50) dosadíme vzťahy (9.36) a (9.40), čím získavame:

$$m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 g l_2 \varphi_2 = 0 \quad (9.51)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{-m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 - m_2 g l_2 \varphi_2}{m_2 l_2^2} \quad (9.52)$$

Úpravou získavame konečnú podobu druhej pohybovej rovnice systému:

$$\ddot{\varphi}_2 = -\frac{m_2 l_1 l_2}{m_2 l_2^2} \ddot{\varphi}_1 - \frac{m_2 g l_2}{m_2 l_2^2} \varphi_2 \quad (9.53)$$

Ak uvažujeme aj vplyv tlmení b_1 a b_2 a silu F , tak budú mať výsledné pohybové rovnice (9.49) a (9.53) matematického modelu kyvadla nasledujúci tvar:

$$\ddot{\varphi}_1 = -\frac{m_2 l_1 l_2}{(m_1 + m_2) l_1^2} \ddot{\varphi}_2 - \frac{F + b_1 \dot{\varphi}_1 + (m_1 + m_2) g l_1 \varphi_1}{(m_1 + m_2) l_1^2} \quad (9.54)$$

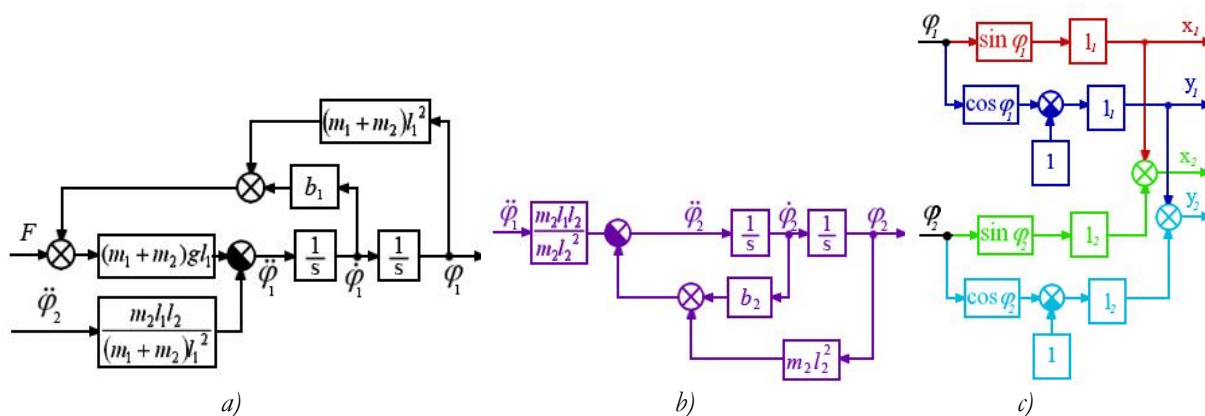
$$\ddot{\varphi}_2 = -\frac{m_2 \cdot l_1 \cdot l_2}{m_2 \cdot l_2^2} \ddot{\varphi}_1 - \frac{b_2 \cdot \dot{\varphi}_2 + m_2 \cdot g \cdot l_2 \cdot \varphi_2}{m_2 \cdot l_2^2} \quad (9.55)$$

9.3.3 Bloková schéma a časové ododzvy

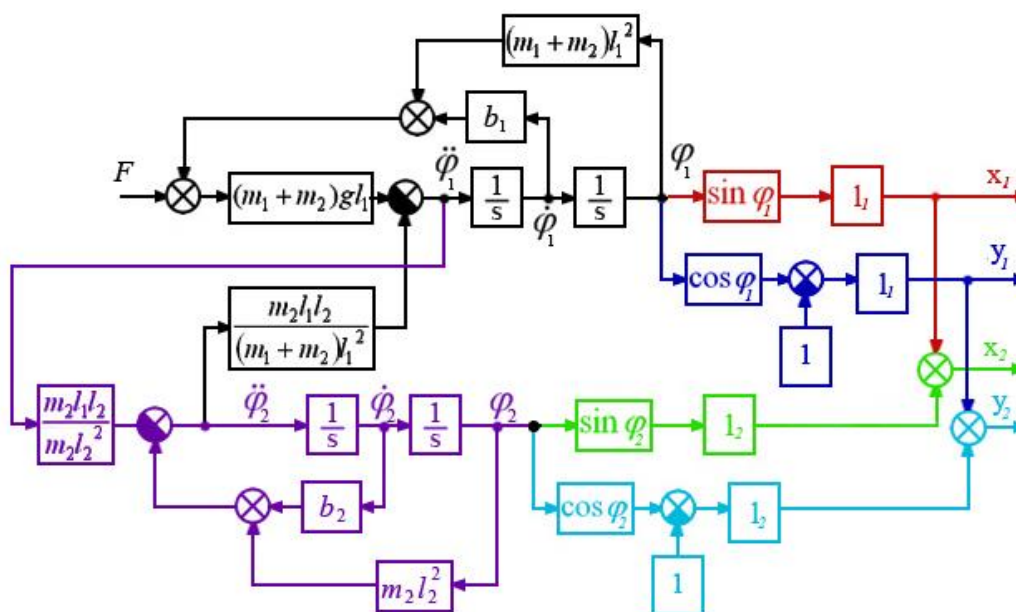
Z pohybovej rovnice (9.54) popisujúcej systém zostavíme blokovú schému, ktorá popisuje výpočet uhla φ_1 (Obr. 9.9a). Rovnakým spôsobom z pohybovej rovnice (9.55) popisujúcej systém zostavíme blokovú schému, ktorá popisuje výpočet uhla φ_2 (Obr. 9.9b).

Zo vzťahov (9.23) a (9.25) popisujúcich polohu hmotných bodov v smere osi x a vzťahov (9.24) a (9.26) popisujúcich polohu hmotných bodov v smere osi y podobným spôsobom zostavíme blokové schémy (Obr. 9.9c).

Spojením jednotlivých blokových schém získavame úplnú blokovú schému jednoduchého matematického kyvadla (Obr. 9.10). Takto zostavenú úplnú blokovú schému použijeme ako základ pre vytvorenie programovej schémy pre číslicovú simuláciu v Simulinku (Obr. 9.11).

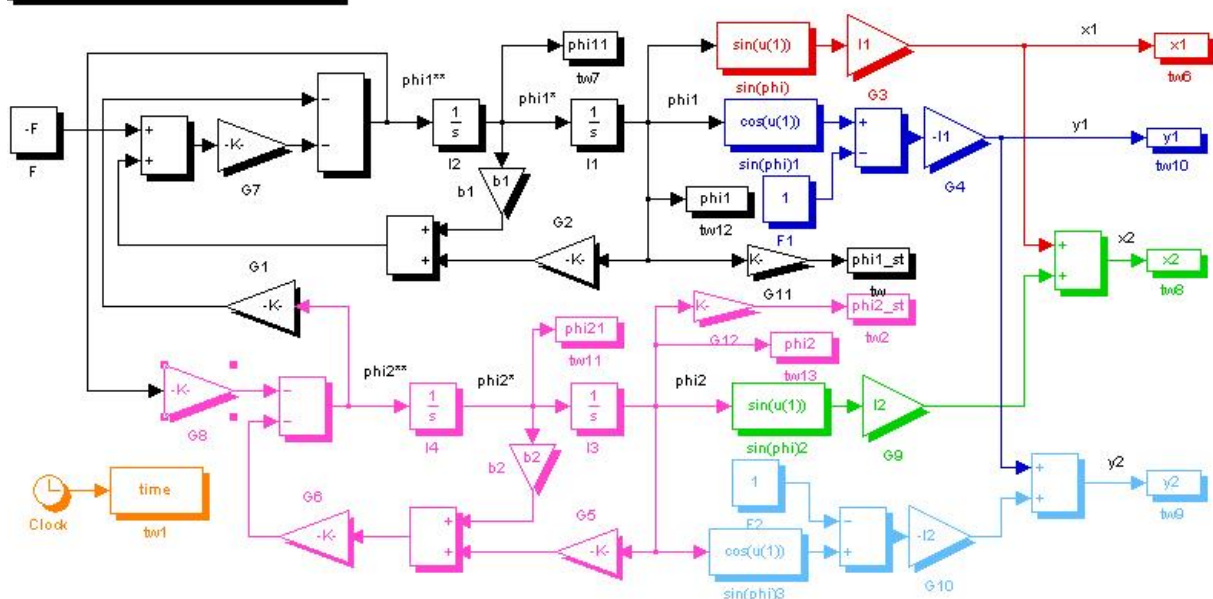


Obr. 9.9 Blokové schémy: a) pre výpočet uhla φ_1 , b) pre výpočet uhla φ_2



Obr. 9.10 Výsledná bloková schéma dvojitého matematického kyvadla

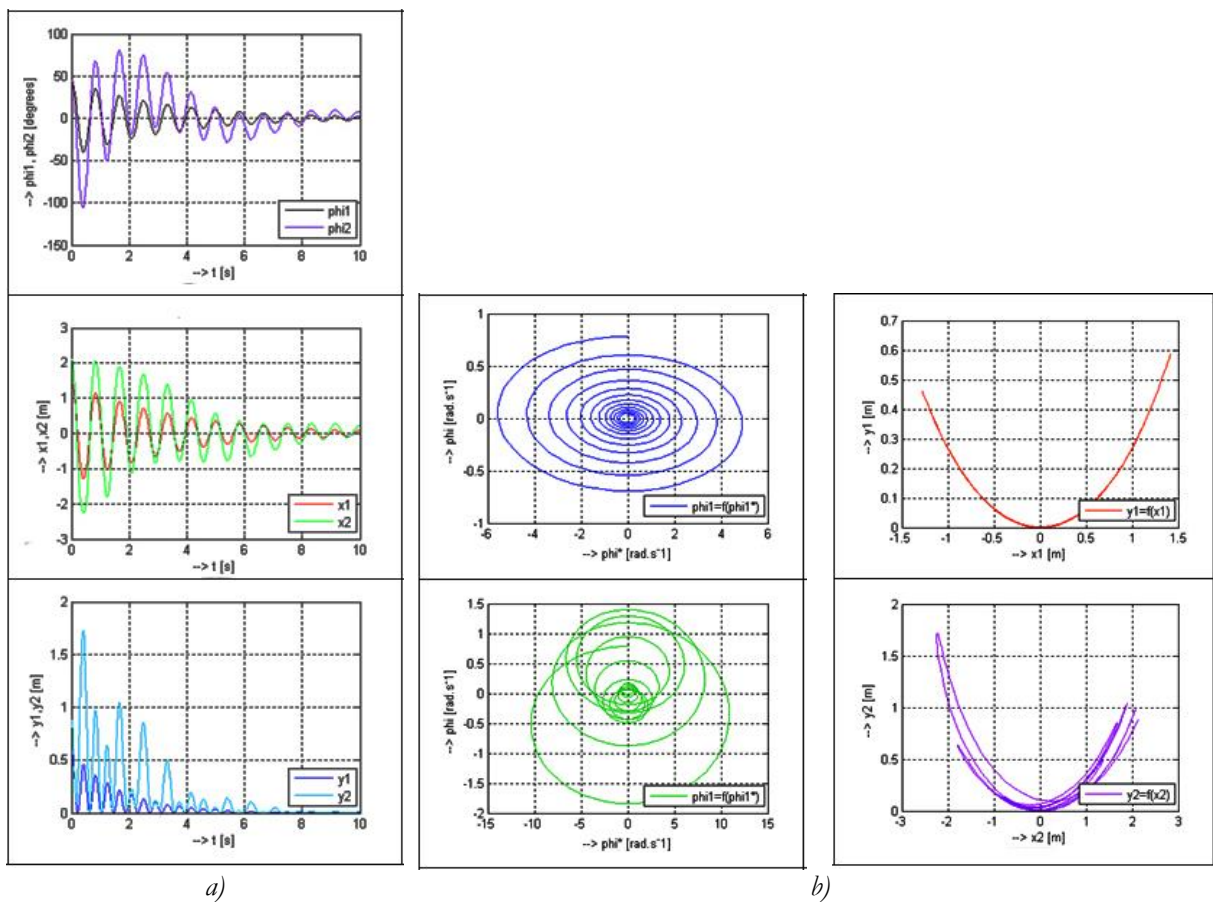
Double Mathematic Pendulum



Obr. 9.11 Programová schéma dvojitého matematického kyvadla v Simulinku

Priebehy veličín kyvadla zo simulácie sú uvedené na Obr 9.12.

Hodnoty parametrov: $m_2 = 0,3 \text{ kg}$, $l_1 = 2 \text{ m}$, $l_2 = 1 \text{ m}$, $\varphi_0 = 45^\circ$, $F = 0 \text{ N}$, $b_1 = 0$.



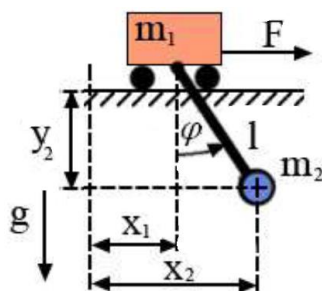
Obr. 9.12 Časové priebehy (a) a priebehy funkcií (b) dvojitého matematického kyvadla pre $b_2 = 0,2$ a $m_1 = 0,3 \text{ kg}$.

9.4 Kyvadlo na vozíku

Kyvadlo na vozíku je modelom dynamického systému, ktorý pozostáva z vozíka s hmotnosťou m_1 a jednoduchého matematického kyvadla, ktoré je na ňom zavesené. Kyvadlo sa skladá z hmotného bodu s hmotnosťou m_2 a lana (alebo iného spájacieho média, napríklad železnej tyče) s dĺžkou l , na ktorom je tento hmotný bod zavesený. Hmotnosť lana zanedbáme. Kyvadlo je ukotvené na vozíku nad ťažiskom hmotného bodu a môže sa v závесе voľne pohybovať vo vodorovnom smere. V bode závesu naň pôsobí tlmenie b .

9.4.1 Kinematická schéma a základné rovnice

Aby sa kyvadlo uviedlo do pohybu, musí byť vychýlené z vodorovnej osi o uhol φ (Obr. 9.13).



Obr. 9.13 Kinematická schéma kyvadla na vozíku

Následný pohyb kyvadla je spôsobený silou $F_g = m_2 g$, ktorá pôsobí zvisle nadol a je dôsledkom pôsobenia gravitačných síl na hmotný bod. Sila F je sila pôsobiaca na vozík vo vodorovnej polohe a slúži na pohyb vozíka). Základné rovnice pre polohu kyvadla v smere osí x a y sú nasledovné:

$$x_1 = x_1 \quad (9.56)$$

$$x_2 = x_1 + l \sin \varphi \quad (9.57)$$

$$y_1 = 0 \quad (9.58)$$

$$y_2 = l(1 - \cos \varphi) \quad (9.59)$$

Zo vzťahu (9.57) deriváciou vyjadríme rýchlosť pohybu hmotného bodu v smere osi x a zo vzťahu (9.59) pohyb v smere osi y :

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l\dot{\varphi} \cos \varphi \quad (9.60)$$

$$\dot{y}_2 = -l\dot{\varphi} \sin \varphi \quad (9.61)$$

Následne môžeme vyjadriť zrýchlenie hmotného bodu v smere osi x a y ako druhú deriváciu polohy:

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 + l\ddot{\varphi} \cos \varphi + l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \quad (9.62)$$

$$\ddot{y}_2 = -l\ddot{\varphi} \sin \varphi - l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \quad (9.63)$$

9.4.2 Odvodenie matematického modelu a časové ododozvy

Najprv vyjadríme kinetickú a potenciálnu energiu celého systému.

Kinetická energia:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (9.64)$$

Dosadením vzťahov (9.60) a (9.61) do vzťahu (9.64) dostávame:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1^2 + l_2 \dot{\varphi}^2 + 2l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi) \quad (9.65)$$

Po zjednodušení a linearizácii získavame vzťah:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1 + l \dot{\varphi})^2 \quad (9.66)$$

Potenciálna energia:

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \quad (9.67)$$

Dosadením vzťahov (9.58) a (9.59) do tohto vzťahu dostávame:

$$V = m_2 g l (1 - \cos \varphi) \quad (9.68)$$

Ak rovnice (9.66) a (9.67) dosadíme do vzťahu (9.2) pre Lagrangeovu funkciu, dostávame:

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1 + l \dot{\varphi})^2 + m_2 g l (\cos \varphi - 1) \quad (9.69)$$

čím získavame sústavu dvoch Lagrangeových rovníc:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \text{ pre } j = 1, 2. \quad (9.70)$$

Postupne vykonáme naznačené derivácie vzťahu (9.70) podľa $q_1 = x_1$ a podľa $\dot{q}_1 = \dot{x}_1$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \quad (9.71)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial \left[\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1 + l \dot{\varphi})^2 + m_2 g l (\cos \varphi - 1) \right]}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 + m_2 (\dot{x}_1 + l \dot{\varphi}) \quad (9.72)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{d[m_1 \dot{x}_1 + m_2 (\dot{x}_1 + l \dot{\varphi})]}{dt} = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 (\ddot{x}_1 + l \ddot{\varphi}) \quad (9.73)$$

Podobne vykonáme derivácie (9.70) podľa druhej zovšeobecnenej premennej $q_2 = \varphi$ a $\dot{q}_2 = \dot{\varphi}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 g l \sin \varphi \quad (9.74)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \left[\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1 + l \dot{\varphi})^2 + m_2 g l (\cos \varphi - 1) \right]}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l (\dot{x}_1 + l \dot{\varphi}) \quad (9.75)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d[m_2 l (\dot{x}_1 + l \dot{\varphi})]}{dt} = m_2 l (\ddot{x}_1 + l \ddot{\varphi}) \quad (9.76)$$

Dosadením (9.71), (9.73), (9.74) a (9.76) do (9.70) získavame sústavu Lagrangeových rovníc:

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_1 + m_2 l \ddot{\varphi} = 0 \quad (9.77)$$

$$l \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{x}_1 + m_2 g l \sin \varphi = 0 \quad (9.78)$$

Tie následne upravíme do konečnej podoby pohybových rovníc:

$$\ddot{x}_1 = \frac{-m_2 l \ddot{\varphi}}{m_1 + m_2} \quad (9.79)$$

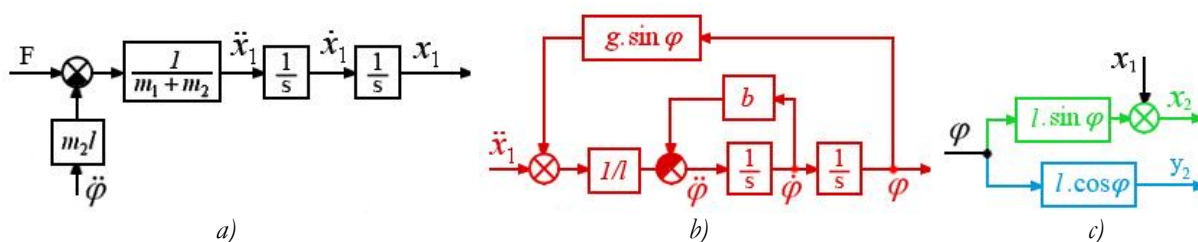
$$\ddot{\varphi} = \frac{-(\ddot{x}_1 + g \sin \varphi)}{l} \quad (9.80)$$

Ak uvažujeme aj vplyv tlmenia b a silu F , tak budú mať výsledné pohybové rovnice (107) a (108) nasledujúci tvar:

$$\ddot{x}_1 = \frac{F - m_2 l \ddot{\varphi}}{m_1 + m_2} \quad (9.81)$$

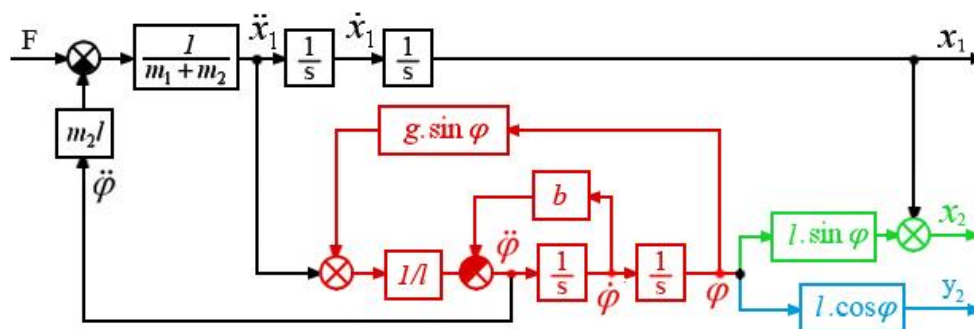
$$\ddot{\varphi} = \frac{-(\ddot{x}_1 + g \sin \varphi)}{l} - b \dot{\varphi} \quad (9.82)$$

Z pohybovej rovnice (9.81) zostavíme blokovú schému pre výpočet zrýchlenia vozíka v smere osi x (Obr. 9.14a) a z rovnice (9.82) zostavíme schému pre výpočet uhla φ (Obr. 9.14b). Zo vzťahu (9.57) popisujúceho polohu hmotného bodu kyvadla v smere osi x a vzťahu (9.59) popisujúceho polohu hmotného bodu kyvadla v smere osi y , zostavíme blokovú schému na Obr. 9.14c.



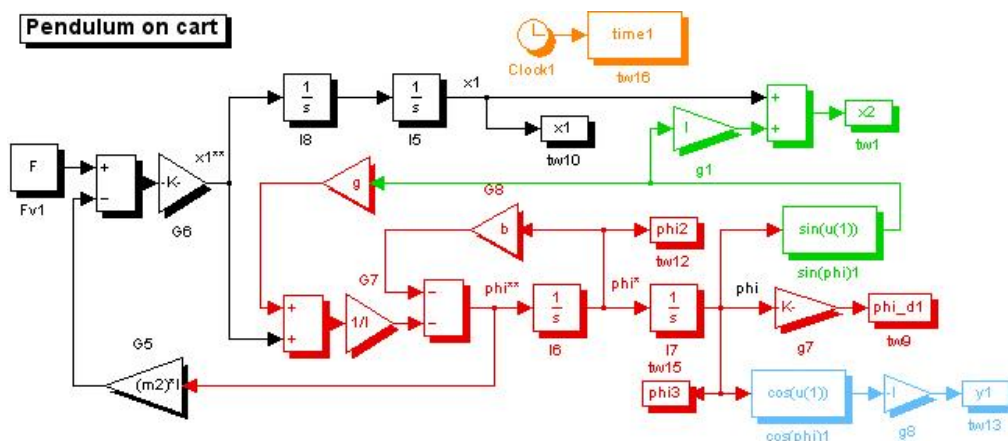
Obr. 9.14 Blokové schémy pre: a) výpočet zrýchlenia v smere osi x , b) pre výpočet uhla φ , c) polohy hmotného bodu kyvadla

Spojením jednotlivých blokových schém získavame úplnú blokovú schému jednoduchého matematického kyvadla (Obr. 9.15).



Obr. 9.15 Výsledná bloková schéma kyvadla na vozíku

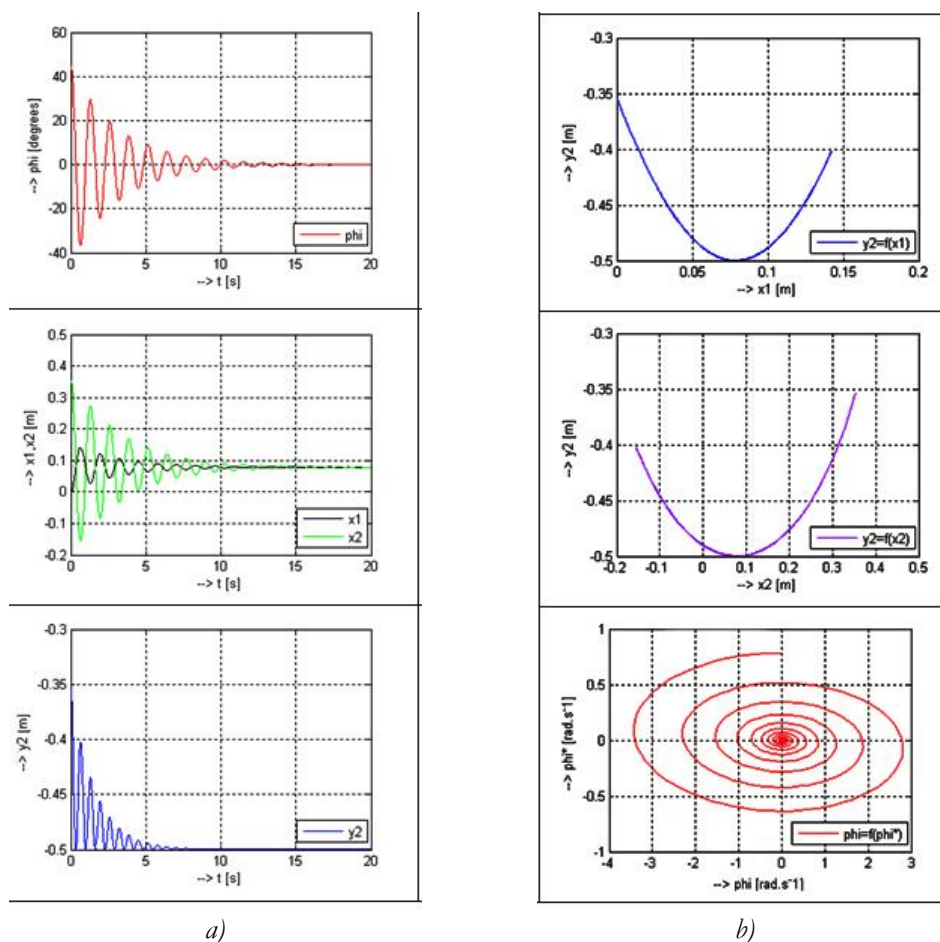
Odpovedajúca programová schéma pre číslicovú simuláciu v Simulinku je na Obr. 9.16.



Obr. 9.16 Programová schéma kyvadla na vozíku v Simulinku

Výsledky simulácie dvojitého matematického kyvadla sú uvedené na Obr. 9.17.

Parametre simulácie: $m_1 = 20$ kg, $m_2 = 5$ kg, $\varphi_0 = 45^\circ$, $g = 9,81$ m.s⁻², $b = 0$, $l = 0.5$ m.



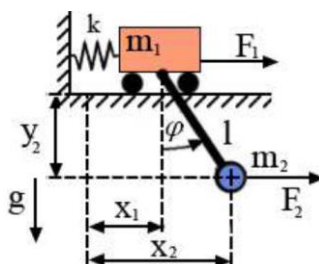
Obr. 9.17 a) Časové priebehy veličín jednoduchého kyvadla na vozíku: φ , x_1 , x_2 , y_2 a
b) priebehy funkcií $y_2 = f(x_1)$ a $y_2 = f(x_2)$. $\varphi = f(\dot{\varphi})$.

9.5 Kyvadlo na vozíku s pružinou

Kyvadlo na vozíku s pružinou je modelom dynamického systému, ktorý pozostáva z vozíka s hmotnosťou m_1 a jednoduchého matematického kyvadla, ktoré je na ňom zavesené. Vozík je však pružinou s tuhosťou k pevne prichytený k stene. Kyvadlo sa skladá z hmotného bodu s hmotnosťou m_2 a lana (alebo iného spájacieho média, napríklad železnej tyče) s dĺžkou l , na ktorom je tento hmotný bod zavesený. Hmotnosť lana v tomto prípade zanedbáme. Kyvadlo je ukotvené na vozíku nad ťažiskom hmotného bodu a môže sa v závесе voľne pohybovať vo vodorovnom smere. V bode závesu naň pôsobí tlmenie b .

9.5.1 Kinematická schéma a základné rovnice

Kinematická schéma modelu je uvedená na Obr. 9.18.



Obr. 9.18 Kinematická schéma kyvadla na vozíku s pružinou

Aby sme kyvadlo uviedli do pohybu, musíme ho vychýliť z vodorovnej osi o uhol φ . Následný pohyb kyvadla je spôsobený silou $F_g = m_2 g$, ktorá pôsobí zvisle nadol a je dôsledkom pôsobenia gravitačných síl na hmotný bod. Sila F_1 je sila pôsobiaca na vozík vo vodorovnej polohe a slúži na pohyb vozíka. Sila F_2 je sila pôsobiaca na kyvadlo vo vodorovnej polohe a slúži na vychýlenie kyvadla. Základné kinematické rovnice pre polohu v smere osi x a y sú také isté, ako v predchádzajúcom prípade:

$$x_1 = x_1 \quad (9.83)$$

$$x_2 = x_1 + l \sin \varphi \quad (9.84)$$

$$y_1 = 0 \quad (9.85)$$

$$y_2 = l(1 - \cos \varphi) \quad (9.86)$$

9.5.2 Odvodenie úplného matematického modelu

Najprv vyjadríme kinetickú a potenciálnu energiu celého systému.

Kinetická energia:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \quad (9.87)$$

Dosadením vzťahov (9.83) a (9.84) dostávame:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1 + l \dot{\varphi})^2 \quad (9.88)$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_1 l \dot{\varphi} + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 \quad (9.89)$$

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_1.l.\dot{\varphi} + \frac{1}{2}m_2.l^2.\dot{\varphi}^2 \quad (9.90)$$

Potenciálna energia:

$$V = \frac{1}{2}k.x_1^2 + m_2.g.y_2 \quad (9.91)$$

Dosadením vzťahov (9.83) a (9.86) do vzťahu (9.91) dostávame:

$$V = \frac{1}{2}k.x_1^2 + m_2.g.l(1 - \cos \varphi) \quad (9.92)$$

Lagrangeova rovnica II. druhu má v tomto prípade tvar:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} + Q_j \quad (9.93)$$

Vykonáme derivácie naznačené v rovnici (9.93):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial \left[\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_1.l.\dot{\varphi} + \frac{1}{2}m_2.l^2.\dot{\varphi}^2 \right]}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2.l.\dot{\varphi} \quad (9.94)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{d[(m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2.l.\dot{\varphi}]}{dt} = (m_1 + m_2).\ddot{x}_1 + m_2.l.\ddot{\varphi} \quad (9.95)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \left[\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_1.l.\dot{\varphi} + \frac{1}{2}m_2.l^2.\dot{\varphi}^2 \right]}{\partial \dot{\varphi}} = m_2.\dot{x}_1 + m_2.l^2.\dot{\varphi} \quad (9.96)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{d[m_2.\dot{x}_1.l + l^2.\dot{\varphi}]}{dt} = m_2.l.\ddot{x}_1 + m_2.l^2.\ddot{\varphi} \quad (9.97)$$

(125)

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2}k.x_1^2 + m_2.g.l(1 - \cos \varphi) \right)}{\partial x_1} \quad (9.98)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = k.x_1 \quad (9.99)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2}k.x_1^2 + m_2.g.l(1 - \cos \varphi) \right)}{\partial \varphi} \quad (9.100)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = m_2.g.l.\sin \varphi = m_2.g.l.\varphi \quad (9.101)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{\partial \left[\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_1.l.\dot{\varphi} + \frac{1}{2}m_2.l^2.\dot{\varphi}^2 \right]}{\partial x_1} = 0 \quad (9.102)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \left[\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_1 l \dot{\varphi} + \frac{1}{2}m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 \right]}{\partial \varphi} = 0 \quad (9.103)$$

$$Q = 0 \quad (9.104)$$

Dostávame sa ku konečnej podobe pohybových rovníc:

1. Pohybová rovnica

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 \quad (9.105)$$

Do (9.105) dosadíme vzťahy (9.95) a (9.99), čím získavame:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l \ddot{\varphi} + k x_1 = 0 \quad (9.106)$$

Vyjadrením $\ddot{x}_1$ z tohto vzťahu získavame rovnicu:

$$\ddot{x}_1 = \frac{-m_2 l \ddot{\varphi} - k x_1}{(m_1 + m_2)} \quad (9.107)$$

Úpravou (9.107) získavame konečnú podobu prvej pohybovej rovnice systému:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{m_2 l}{(m_1 + m_2)} \ddot{\varphi} - \frac{k}{(m_1 + m_2)} x_1 \quad (9.108)$$

2. Pohybová rovnica

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \quad (9.109)$$

Do (9.109) dosadíme vzťahy (9.97) a (9.101), čím dostaneme:

$$m_2 l \ddot{x}_1 + m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 g l \varphi = 0 \quad (9.110)$$

Vyjadrením $\ddot{\varphi}$ z tohto vzťahu získame vzťah:

$$\ddot{\varphi} = \frac{-m_2 l \ddot{x}_1 - m_2 g l \varphi}{m_2 l^2} \quad (9.111)$$

Následnou úpravou získavame konečnú podobu druhej pohybovej rovnice systému:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{m_2 l}{m_2 l^2} \ddot{x}_1 - \frac{m_2 g l}{m_2 l^2} \varphi \quad (9.112)$$

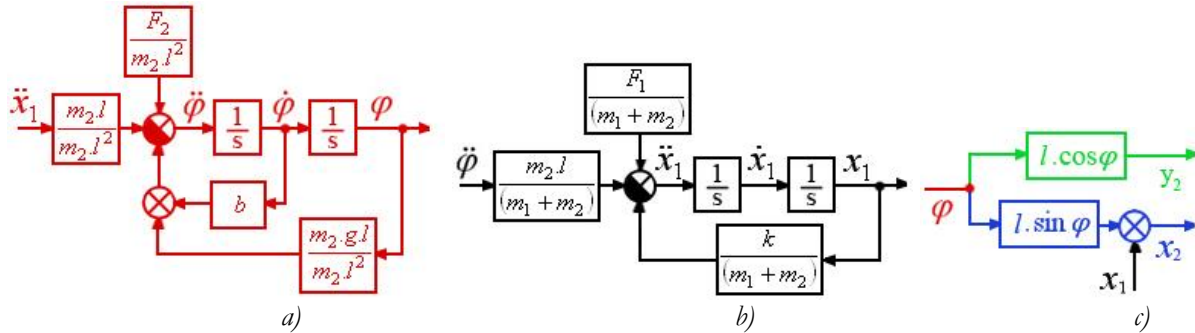
Ak uvažujeme aj vplyv tlmenia b a sily F_1 a F_2 , tak budú mať výsledné pohybové rovnice (9.108) a (9.112) nasledujúci tvar:

$$\ddot{x}_1 = \frac{F_1}{(m_1 + m_2)} - \frac{m_2 l}{(m_1 + m_2)} \ddot{\varphi} - \frac{k}{(m_1 + m_2)} x_1 \quad (9.113)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{F_2}{m_2 l^2} - \frac{m_2 l}{m_2 l^2} \ddot{x}_1 - \left(\frac{m_2 g l}{m_2 l^2} \varphi + b \dot{\varphi} \right) \quad (9.114)$$

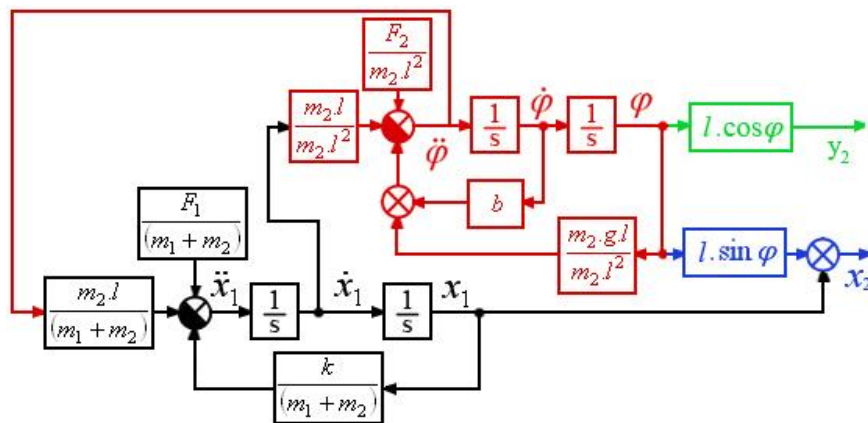
9.5.3 Bloková schéma

Z pohybovej rovnice (9.114) popisujúcej systém zostavíme blokovú schému, ktorá popisuje výpočet uhla φ (Obr. 9.19a). Rovnakým spôsobom z pohybovej rovnice (9.113) popisujúcej systém zostavíme blokovú schému, ktorá popisuje výpočet zrýchlenia vozíka v smere osi x (Obr. 9.19b). Zo vzťahu (9.84) popisujúceho polohu hmotného bodu kyvadla v smere osi x a vzťahu (9.86) popisujúceho polohu hmotného bodu kyvadla v smere osi y , zostavíme podobným spôsobom blokovú schému (Obr. 9.19c).

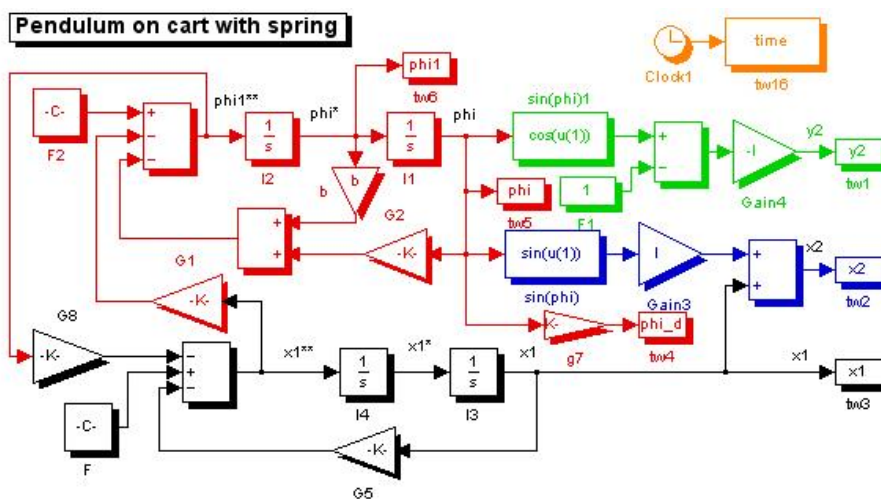


Obr. 9.19 Blokové schémy: a) pre výpočet uhla φ , b) pre výpočet zrýchlenia vozíka v smere osi x , c) pre polohu hmotného bodu kyvadla

Spojením jednotlivých blokových schém získavame úplnú blokovú schému jednoduchého matematického kyvadla ako to vidíme na Obr. 9.20 a schému v Simulinku (Obr. 9.21).



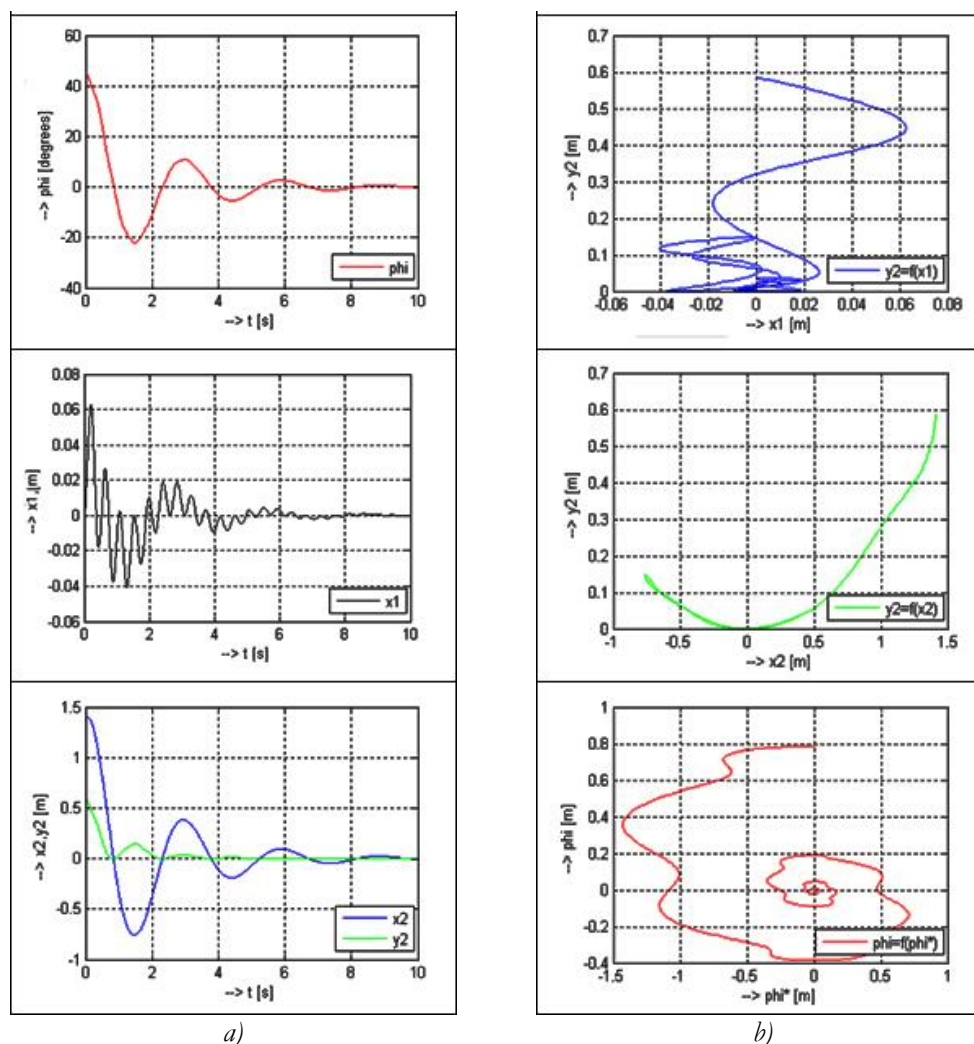
Obr. 9.20 Výsledná bloková schéma kyvadla na vozíku s pružinou



Obr. 9.21 Programová schéma kyvadla na vozíku s pružinou v Simulinku

9.5.4 Časové ododzvy číslícovej simulácie

Dynamické vlastnosti dvojitého kyvadla vyplývajú z časových priebehov na obr 9.22. Parametre simulácie $m_1 = m_2 = 1$ kg, $\varphi_0 = 45^\circ$, $g = 9.81$ m.s⁻², $F = 0$ N, $b = 0$, pre $l = 2$ m a $k = 200$ Nm⁻¹



Obr. 9.22 Ododzvy dvojitého kyvadla: a) časové priebehy a b) priebehy funkcií $y_2 = f(x_1)$ a $y_2 = f(x_2)$, $\varphi = f(\phi)$,

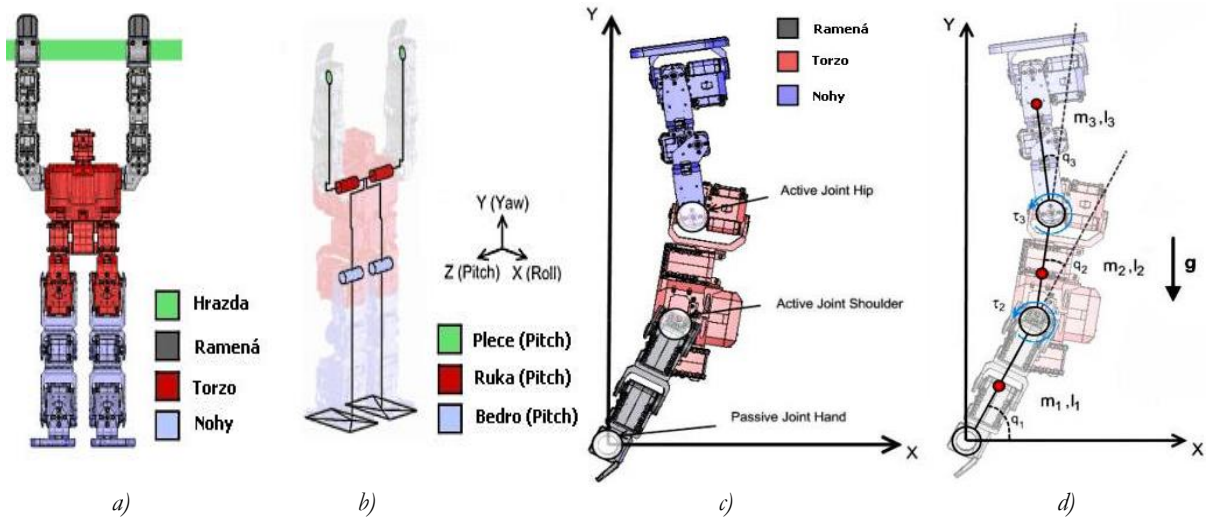
9.6 Trojité kyvadlo

Trojité matematické kyvadlo pozostáva z troch jednoduchých kyvadiel. Prvé je ukotvené kĺbom v pevnej základni, druhé je k nemu pohyblivo pripojené v mieste ťažiska a tretie je pohyblivo pripojené v mieste ťažiska druhého. Má 3 hmotné body s hmotnosťami m_1 , m_2 a m_3 , ktoré sú zavesené na troch tyčiach s dĺžkami l_1 , l_2 a l_3 so zanedbateľnými hmotnosťami a v jednotlivých kĺboch pôsobí tlmenie b_1 , b_2 a b_3 . Praktický príklad takéhoto kyvadla je na Obr. 9.24 (ide o humanoidný robot zavesený na hrazde – ide tu o inverzné trojité kyvadlo). Kyvadlo sa stáva inverzným až vtedy, keď ho prevrátime, t.j. posunieme ťažiská v smere osi y alebo nastavíme počiatočné podmienky pre uhol vychýlenia prvého kĺbu na $\pm 180^\circ$. Výsledok je však v oboch prípadoch rozdielny. Je to dané počiatočnou polohou (resp. orientáciou) súradnicového systému ťažiska hmotného bodu kyvadla, od ktorej sa počíta uhol vychýlenia.

Načrtnime zostavenie Lagrangeových rovníc. Kyvadlo sa uvedie do pohybu pôsobením sily F na hmotný bod m_3 . Pre pohyb ťažiska jednotlivých členov v smere osí x, y platí:

$$x_1 = l_{c1} \cos q_1 \quad (9.115)$$

$$x_1 = l_{c1} \sin q_1 \quad (9.116)$$



Obr. 9.23 Príklad na trojité matematické kyvadlo: a) robot typu Humanoid zavesený na hrazde, b) vysvetlenie základných otočných kĺbov, (robot ako trojité inverzné kyvadlo, d) rozmiestnenie kĺbov a hmotností pre prípad c)

$$x_2 = l_1 \cos q_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \quad (9.117)$$

$$y_2 = l_1 \sin q_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \quad (9.118)$$

$$x_3 = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) \quad (9.119)$$

$$y_3 = l_1 \sin q_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) + l_{c3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) \quad (9.120)$$

Kinetická energia jednotlivých členov humanoidného robota je nasledovná:

$$T_1 = \frac{1}{2} [m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + I_1 \dot{q}_1^2] \quad (9.121)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} [m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2] \quad (9.122)$$

$$T_3 = \frac{1}{2} [m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) + I_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2] \quad (9.123)$$

Potenciálna energia jednotlivých členov humanoidného robota je:

$$V_1 = m_1 g y_1 \quad (9.124)$$

$$V_2 = m_2 g y_2 \quad (9.125)$$

$$V_3 = m_3 g y_3 \quad (9.126)$$

Pre výpočet Lagrangeovej rovnice platí:

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (9.127)$$

Výpočet Lagrangeovho operátora – Lagrangiána sa uskutoční dosadením potenciálnych a kinetických energií jednotlivých členov humanoida do nasledujúcej rovnice:

$$L = \sum_{i=1}^3 (T_i - V_i) \quad (9.128)$$

Riešením Euler-Lagrangeových rovníc pre každý člen robota dostávame tri pohybové rovnice, ktorých zápis je v maticovom tvare nasledovný:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \quad (9.129)$$

kde: m_{ij} – zotrvačné sily,
 φ_i – gravitačné sily,
 h_i – Coriolisove a odstredivé sily,
 m_i – vstupné momenty.

Výpis prvkov matíc rov. (16) presahuje možnosti tohto textu a záujemca ich nájde uvedené napr. v [55].

Časť II – MATLAB/Simulink: pokročilé techniky pre riešenie modelov dynamických sústav

10 CONTROL SYSTEM TOOLBOX

Program MATLAB možno použiť tiež na analýzu dynamických systémov popísaných prenosovou funkciou alebo stavovým popisom. Control System Toolbox je aplikačná knižnica, ktorá rozširuje program MATLAB o nástroje pre analýzu a syntézu spojitých aj diskretných lineárnych systémov. Inštrukcie Control System toolboxu umožňujú ([56]-[59]):

- Modelovanie spojitých systémov
- Modelovanie diskretných systémov
- Výpočet a zjednodušovanie prenosov
- Spolupráca MATLABu a Simulinku
- S-funkcie v Simulinku

10.1 Zadanie matematického modelu systému v MATLABe

10.1.1 Práca s polynómami

Keďže prenosová funkcia predstavuje podiel dvoch polynómov, zopakujme si niektoré operácie MATLABu s polynómami. Polynóm v MATLABe je reprezentovaný vektorom obsahujúcim koeficienty zoradené v klesajúcom poradí mocniny nezávisle premennej:

Polynóm $p(s) = s^3 - 5s^2 - 1$ sa zapíše:

```
>> p=[1 -5 0 1];
```

Korene polynómu dostaneme pomocou inštrukcie **roots**:

```
>> r=roots(p)
r =
    4.9593
    0.4698
    0.4292
```

Koeficienty polynómu zo známych hodnôt koreňov získame pomocou inštrukcie **poly**:

```
>> p=poly(r)
p =
   -5.0000    0.0000    1.0000
```

MATLAB vie vynásobiť iba dva polynómy súčasne. Pri potrebe vynásobiť viac polynómov ich treba rozpísať. Napr. koeficienty polynómu $n(s) = (3s^3 - s + 1)(s^2 + s)(s + 3)$ vypočítame nasledovne:

```
>> p1=[3 0 -1 1];p2=[1 1 0];p3=[1 3];
>> p12=conv(p1,p2)
p12 =
    3    3   -1    0    1    0
```

```
>> n=conv(p12,p3)
```

```
n =
```

```
3 12 8 -3 1 3 0
```

Alebo použijeme zložený zápis:

```
>> conv(conv([3 0 -1 1],[1 1 0]),[1 3])
```

```
ans =
```

```
3 12 8 -3 1 3 0
```

Hodnotu polynómu pre zadanú hodnotu argumentu dostaneme pomocou funkcie **polyval**:

```
>> value=polyval(n,-4)
```

```
value =
```

```
2244
```

```
value=polyval(n,-3)
```

```
value =
```

```
0
```

10.1.2 Prenosové funkcie

Prenosovú funkciu (TF – transfer function) zadáme zvlášť pomocou polynómu čitateľa a menovateľa. Napr. prenosovú funkciu $G(s) = \frac{s+1}{s^2+s+4}$ zapíšeme:

```
>> num=[ 1 1];den=[1 1 4];
```

```
>> G=tf(num,den)
```

```
Transfer function:
```

```
s + 1
```

```
-----
```

```
s^2 + s + 4
```

alebo využitím symbolického počtu:

```
s = tf('s');
```

```
F = (s+1)/(s^2 + s + 4)
```

Numerické hodnoty núl a pólov systému, ako aj ich grafické rozmiestnenie v rovine koreňov dostaneme pomocou inštrukcie **pzmap**:

```
>> num=[ 1 1];den=[1 1 4];
```

```
>> [p,z]=pzmap(num,den)
```

```
p =
```

```
-0.5000 + 1.9365i
```

```
-0.5000 - 1.9365i
```

```
z =
```

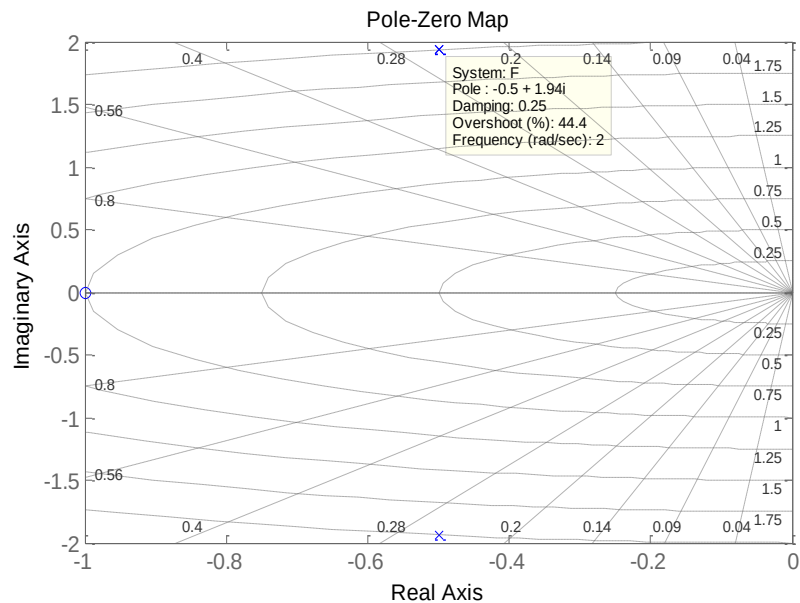
```
-1
```

alebo priamo (Obr. 10.1):

```
>> pzmap([ 1 1],[1 1 4]), grid % grid je pre zobrazenie mriezky
```

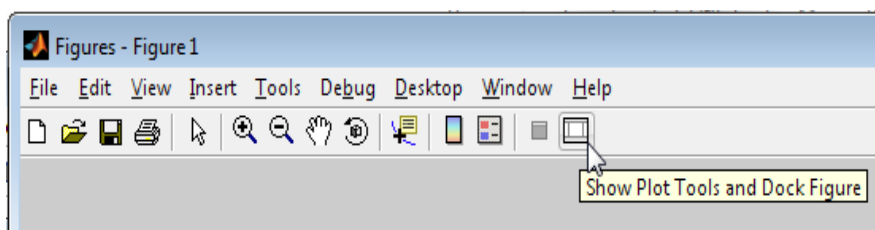
resp.

```
>> pzmap (F), grid
```

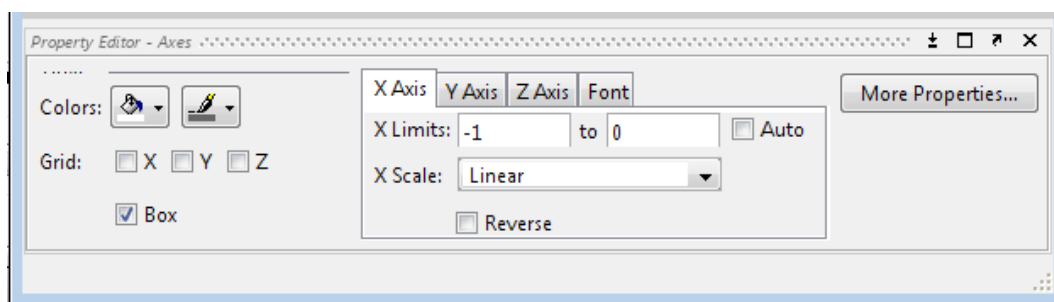


Obr. 10.1 Zobrazenie núl a pólov prenosovej funkcie.

Graf možno upraviť pomocou ikony v páse nad obrázkom: *Show plot tools* and *Dock figure* (Obr. 10.2), čím sa otvorí subpanel (Obr. 10.3), umožňujúci nastaviť farby, húbky čiar, pozadie, fonty a veľkosti značení a popisov grafu a mnoho ďalších parametrov, prístupných tlačidlom *More Properties...* (otvorí okno parametrov *Property Editor - Axes*).



Obr. 10.2 Pás ikon pre spracovanie obrázku



Obr. 10.3 Menu pre úpravu obrázku

Pre vytlačenie prenosovej funkcie na obrazovku použijeme inštrukciu **printsys**, napr.:

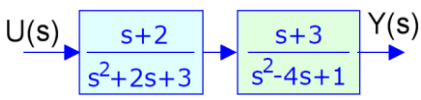
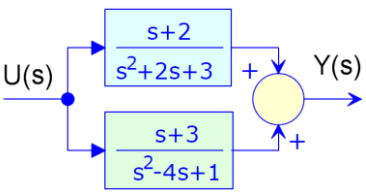
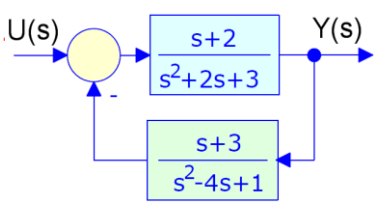
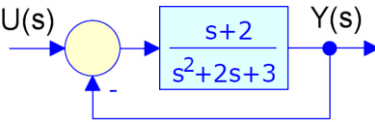
```
>> printsys(num,den,'s')
num/den =
s + 1
-----
s^2 + s + 4
```

10.1.3 Zapojenie systémov, blokové schémy

EE 380 - Control Engineering I Lab: ANALYSIS AND SIMULATION OF CONTROL SYSTEMS USING MATLAB

V MATLABE môžeme výhodne realizovať riešenie blokových schém. Základné operácie sú znázornené v Tab 10.1 spolu s príkladmi použitia.

Tab. 10.1 Zapojenie dynamických systémov v MATLABe

Zapojenie	Bloková schéma	Inštrukcie
sériové		<pre>>> num1=[1 2];den1=[1 2 3]; >> num2=[1 3];den2=[1 -4 1]; >> [num,den]=series(num1,den1,num2,den2) num = 0 0 1 5 6 den = 1 -2 -4 -10 3 >> G=tf(num,den) Transfer function: s^2 + 5 s + 6 ----- s^4 - 2 s^3 - 4 s^2 - 10 s + 3</pre>
paralelné		<pre>>> num1=[1 2];den1=[1 2 3]; >> num2=[1 3];den2=[1 -4 1]; >> [num,den]=parallel(num1,den1,num2,den2) num = 0 2 3 2 11 den = 1 -2 -4 -10 3 >> G=tf(num,den) Transfer function: 2 s^3 + 3 s^2 + 2 s + 11 ----- s^4 - 2 s^3 - 4 s^2 - 10 s + 3</pre>
spätnoväzobné		<pre>>> num1=[1 2];den1=[1 2 3]; >> num2=[1 3];den2=[1 -4 1]; >> [num,den]=feedback(num1,den1,num2,den2,-1) num = 0 1 -2 -7 2 den = 1 -2 -3 -5 9 >> printsys(num,den) num/den = s^3 - 2 s^2 - 7 s + 2 ----- s^4 - 2 s^3 - 3 s^2 - 5 s + 9</pre>
jednotková spätná väzba	 Pozn: parameter -1 pri zápornej spätnej väzbe nie je potrebné uvádzať.	<pre>>> num1=[1 2];den1=[1 2 3]; >> [num,den]=cloop(num1,den1,-1) num = 0 1 2 den = 1 3 5 >> G=tf(num,den) Transfer function: s + 2 ----- s^2 + 3 s + 5</pre>

Miesto uvedených zapojení pri SISO systémoch možno využiť:

- pre sériové zapojenie systémov – násobenie prenosových funkcií:
- pre paralelné zapojenie – súčet prenosových funkcií:

```
>> G1=tf([1 2],[1 2 3]);
>> G2=tf([1 3],[1 -4 1]);
>> Gs=G1*G2           % seriove zapojenie
>> Gp=G1+G2           % paralelne zapojenie
```

Transfer function:

$s^2 + 5s + 6$

 $s^4 - 2s^3 - 4s^2 - 10s + 3$

Transfer function:

$2s^3 + 3s^2 + 2s + 11$

 $s^4 - 2s^3 - 4s^2 - 10s + 3$

čo dáva rovnaké výsledky ako sú uvedené v Tab. 10.1

Prenosovú funkciu možno dostať tiež zadaním núl, pólov a zosilnenia sústavy v tvare:

$$F(s) = \frac{Z(s)}{P(s)} = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_1) \dots (s - p_1)}$$

kde $Z(s)$ a $P(s)$ sú polynómy v čitateli a menovateli prenosovej funkcie.

Príklad 1: Zadať systém, ktorý má nulu v $z_1 = -1$ a dva póly $p_1 = -2, p_2 = -3$ a $k = 3$.

```
>> z=-1; p=[-2 -3]; k=3;
```

```
>> zpk(z,p,k)
```

Zero/pole/gain:

$3(s+1)$

$(s+2)(s+3)$

Príklad 2: Zostavenie prenosu **zpk** z prenosovej funkcie.

```
>> f=tf([3 3],[1 5 6])
```

Transfer function:

$3s + 3$

$s^2 + 5s + 6$

```
>> zpk(f)
```

Zero/pole/gain:

$3(s+1)$

$(s+3)(s+2)$

Príklad 3: Zostavenie prenosu MISO systému s komplexne združenými pólmi.

```
>> z = { [] ; -0.5}
>> p = {-2 ; [-2+i -2-i]}
>> k = [1 ; 2]
>> F = zpk(z,p,k)
Zero/pole/gain from input to output...
      1
#1: ----
    (s+2)

      2 (s+0.5)
#2: -----
    (s^2 + 4s + 5)
```

Príklad 4: Zostavenie prenosu MISO systému.

```
>> z = { -12 ; [-2 -2]};
>> p=[-3; -4; -5];
>> k=[3; 4]
>> zpk(z,p,k)
Zero/pole/gain from input to output...
      3 (s+12)
#1: -----
    (s+3) (s+4) (s+5)

      4 (s+2)^2
#2: -----
    (s+3) (s+4) (s+5)
```

Príklad 5: Rýchle zadanie dynamického systému proporcionálnej sústavy II. rádu zadanej tlmením d a frekvenciou pri nulovom tlmení w_0 :

$[A,B,C,D] = \text{ord2}(w_0,d)$ – vytvorí stavový model systému so zadanými vlastnosťami

$[\text{num},\text{den}] = \text{ord2}(w_0,d)$ – vytvorí prenosovú funkciu so zadanými vlastnosťami:

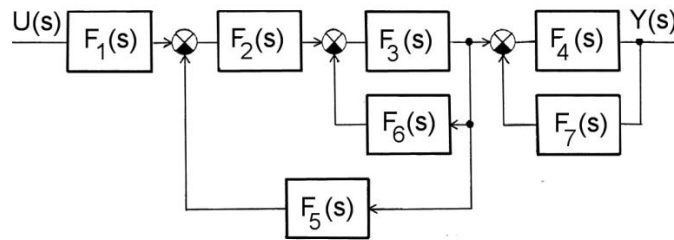
$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2}$$

10.1.4 Určenie prenosu systému z blokovej schémy

MATLAB pomocou Control System toolboxu umožňuje zistiť výslednú prenosovú funkciu ľubovoľne zložitého a zaväzbeného systému. Napr pre blokovú schému na Obr. 10.4 je postup nasledovný - začíname tým, že ľubovoľne očísľujeme bloky v blokovej schéme, pričom na vstup pridáme blok s jednotkovým prenosom

Príklad: Zostavme prenosovú funkciu zložitého systému (Obr. 10.4), ak prenosy sú:

$F(s)=1$, $F_2(s)=1/(s+1)$, $F_3(s)=1/(s+2)$, $F_4(s)=1/(s+3)$, $F_5(s)=4$, $F_7(s)=12$



Obr. 10.4 Bloková schéma systému s viacerými slučkami

```

n1 = 1; d1 = 1; % definovanie jednotlivých prenosov
n2=1, d2=[1 1]; n3=1, d3=[1 2]; n4=1, d4=[1 3];
n5=4, d5=1; n6=8, d6=8; n7=12, d7=1;
nblocks = 7; % celkový počet blokov v schéme
blkbuild % pozn.: toto je m-subor, nie funkcia
q = [2 1 -5 0 0
      3 2 -6 0 0
      4 2 -6 3 -7
      5 3 0 0 0
      6 3 0 0 0
      7 4 0 0 0];
input = 1; output = 4; % poradové číslo vstup. a výstup. bloku
[aa,bb,cc,dd] = connect(a,b,c,d,q,input,output);
[num,den] = ss2tf(aa,bb,cc,dd); % výsledný prenos
printsys(num,den,'s')
num/den =
      3.5527e-015 s^2 + 1 s + 3
      -----
      s^3 + 19 s^2 + 67 s + 105

```

Inštrukcia **blkbuild** vykonáva konverziu systému na stavový model pomocou `tf2ss` a rozpisuje ho na diagonály systém pomocou opakovaného použitia funkcie **append**. Inštrukcia **connect** vykoná prepojenie podsystemov a redukuje výsledný model na SIOS systém. Na záver použije inštrukcie **modred** a **balreal**, čím sa odstránia nadbytočné stavové veličiny zavedené pri prevode.

Pozn.: v dôsledku prípadnej numerickej nestability výpočtu inštrukcií `tf2ss` `ss2tf`, ich používanie nie je celkom spoľahlivé (predtým sa odporúča zistiť podmienenosť matic (je to číslo, ktoré kvalitatívne charakterizuje danú maticu a do značnej miery determinuje chováni (najmä) numerických maticových algoritmov). http://cs.wikipedia.org/wiki/Podm%C3%ADn%C4%9Bnost_matic

Rýchle generovanie sústavy II. rádu

Pre rýchle generovanie prenosovej funkcie sústavy II. rádu so štandardným prenosom v tvare:

$$F(s) = \frac{1/\omega_o^2}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2d}{\omega_n}s + 1} = \frac{1}{s^2 + 2d\omega_n s + \omega_n^2}$$

použijeme inštrukcie `[A,B,C,D] = ord2(wn,d)`, príp. `[num,den] = ord2(wn,d)`

Generovanie náhodných stabilných systémov.

Pre ladenie programov je často vhodné overiť ich činnosť pre rôzne systémy. Pritom používame inštrukciu **rss**:

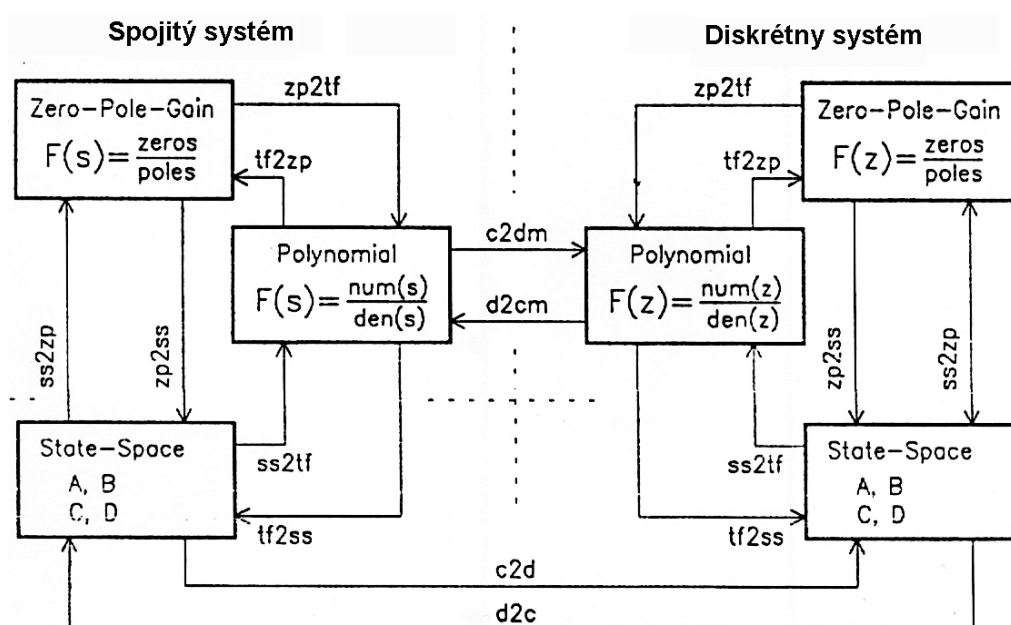
sys = rss(n) generuje stavový model SISO systému n-tého rádu

sys = rss(n,p,q) generuje stavový model MIMO n-tého rádu s p-vstupmi a q-výstupmi

Pre generovanie náhodných prenosových funkcií použijeme vhodnú konverziu získaného stavového modelu.

10.2 Transformácie medzi rôznymi popismi spojitých systémov

Ak máme zadaný popis systému pomocou jedného z vyššie uvedených sôsobov (*tf*, *zpk*, *ss*) a potrebujeme ho vyjadriť v inom tvare, môžeme použiť funkcie MATLABu, ktoré tento prevod umožňujú. Tiež je možné prevádzať spojitý systém na diskrétne a naopak a diskrétne systémy možno prevádzať na systémy s inou vzorkovacou periódou. Prehľad používaných inštrukcií je znázornený na Obr. 10.5 a ich použitie je uvedené v Tab. 4.2.



Obr. 10.5 Inštrukcie pre prevod medzi rôznymi spôsobmi zápisu systému

V Tab 10.2 sú uvedené príklady na nasledovné prevody zápisu systému v MATLABe:

- 1) prevod stavového popisu na prenosovú funkciu (SS $\rightarrow$ TF)
- 2) prevod prenosovej funkcie na stavový popis (TF $\rightarrow$ SS)
- 3) prevod stavového popisu na prenos zadaný pomocou zpk (SS $\rightarrow$ ZPK)
- 4) prevod prenosu zadaným funkciou zpk na stavový popis (ZPK $\rightarrow$ SS)
- 5) prevod prenosovej funkcie na prenos zadaný funkciou zpk (TF $\rightarrow$ ZPK)
- 6) prevod prenosu zadaného funkciou zpk na prenosovú funkciu (ZPK $\rightarrow$ TF)

Tab. 10.2 Príklady transformácie medzi rôznymi spôsobmi zápisu dynamického systému

1) SS → TF	$A = [-1 \ -3 \ -2; 1 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0]; B = [1; 0; 0]; C = [0 \ 4 \ 7]; D = 0;$ <code>[num, den] = ss2tf (A, B, C, D)</code> <code>TFsys=tf(num, den)</code> Transfer function: $\frac{1.665e-015 s^2 + 4 s + 7}{s^3 + s^2 + 3 s + 2}$	konštantu 1.665e-015 v čitateli môžeme zanedbať. Iný spôsob – priamy prepis: TFsys = tf(SSsys)
2) TF → SS	<code>TFsys = tf([2 5], [7 2 5 1])</code> <code>[num, den]=tfdata(TFsys, 'v')</code> <code>[A,B,C,D] = tf2ss (num,den)</code> <code>SSsys=ss(A,B,C,D)</code>	Prevod priamo pomocou funkcie ss: SSsys = ss(TFsys)
3) SS → ZPK	$A = [-1 \ -3 \ -2; 1 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0]; B = [1; 0; 0]; C = [0 \ 4 \ 7]; D = 0;$ <code>SSsys = ss(A,B,C,D)</code> <code>[A,B,C,D]=ssdata(SSsys)</code> <code>[z,p,k] = ss2zp (A, B, C, D)</code> <code>ZPKsys=zpk(Z,P,K)</code>	Prevod pomocou funkcie zpk: ZPKsys1 = zpk(SSsys)
4) ZPK → SS	<code>ZPKsys = zpk([0 0 -2],[0 0 -5 -6 -2],3)</code> <code>[Z,P,K]=zpkdata(ZPKsys,'v')</code> <code>[A,B,C,D]=zp2ss(Z,P,K)</code> <code>SSsys=ss(A,B,C,D)</code>	Prevod pomocou funkcie ss: SSsys1 = ss(ZPKsys)
5) TF → ZPK	<code>TFsys = tf([2 5], [7 2 5 1])</code> Prevod pomocou funkcie tf2zp <code>[num, den]=tfdata(TFsys,'v')</code> <code>[Z,P,K]=tf2zp(num, den)</code> <code>ZPKsys=zpk(Z,P,K)</code>	Prevod pomocou funkcie zpk: ZPKsys1 = zpk(TFsys)
6) ZPK → TF	<code>ZPKsys=zpk([0 0 -2],[0 0 -5 -6 -2],3)</code> Prevod pomocou funkcie zp2tf <code>[Z,P,K]=zpkdata(ZPKsys,'v')</code> <code>[NUM, DEN]=zp2tf(Z,P,K)</code> <code>TFsys=tf(NUM, DEN)</code>	Prevod pomocou funkcie tf: TFsys1 = tf(ZPKsys)

Pozn.: vo vyššie uvedených príkladoch: funkcia **ssdata** extrahuje matice A, B, C, D zo stavového modelu a funkcia **tfdata** vyjadrí čitateľ a menovateľ prenosu (parameter *v* ukladá hodnoty ako vektory).

10.3 Prevod medzi spojitým a diskretným systémom

10.3.1 Prevod spojitého systému na diskretný

Spojité systém prevedieme na diskretný pomocou funkcie `c2d`. Príkaz zadáme v tvare:

`sysD = c2d(sysC,Ts)`

kde `sysD(discrete)` je výsledný diskretný prenos, `sysC (continuous)` je spojitý prenos, `Ts` vzorkovacia frekvencia.

Príklad:

Treba previesť spojitý systém zadaný prenosovou funkciou $F(s) = \frac{2s+5}{7s^3+2s^2+5s+1}$ na diskretný systém so vzorkovacou periódou: $T=0,5$ s.

`sysC = tf([2 5], [7 2 5 1])`

Transfer function:

..... $2s + 5$

 $7s^3 + 2s^2 + 5s + 1$

`sysD = c2d(sysC,0.5)`

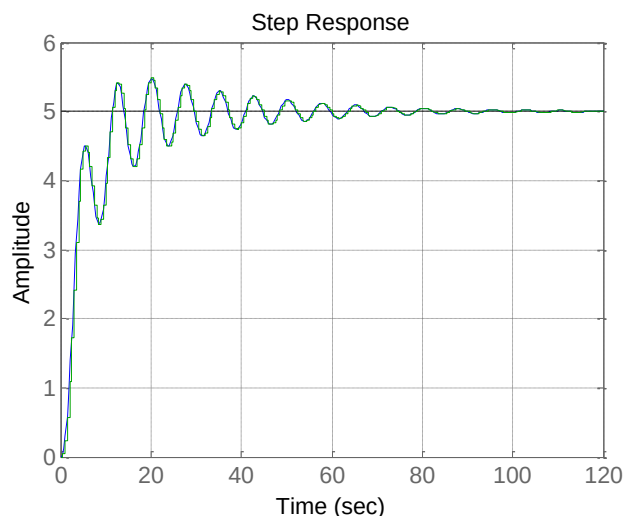
Transfer function:

$0.2295z^2 + 0.3744z - 0.01873$

 $z^3 - 2.105z^2 + 1.973z - 0.7515$

Sampling time: 1

Porovnanie prechodovej charakteristiky spojitého systému s diskretným dostaneme pomocou inštrukcie **`step(sysC, sysD)`** – Obr. 10.6.



Obr. 10.6 Porovnanie prechodovej charakteristiky spojitého a diskretného prenosu

10.3.2 Prevod diskretného systému na spojitý

Pro prevod je určená funkcia **d2c**, ktorú zadáme v tvare:

$$\text{sysC} = \text{d2c}(\text{sysD})$$

kde sysC je výsledný diskretný prenos a sysD je spojitý prenos.

Je možné špecifikovať aj metódu

$$\text{sysC} = \text{d2c}(\text{sysD}, \text{method})$$

kde method je buď 'zoh' (zero-order hold) alebo 'foh' (first-order hold).

Zmena vzorkovacej frekvencie diskretného systému

Pre zmenu vzorkovacej frekvencie v lineárnych diskretných systémoch na novú hodnotu Ts sa používa inštrukcia **d2d**:

$$\text{sysD} = \text{d2d}(\text{sysD}, T_s),$$

10.4 Vykreslenie základných charakteristík dynamického systému

V nasledujúcej kapitole sú popísané možnosti vykreslenia základných charakteristík systému:

Prechodové charakteristiky:

step(num, den)	pre prenosovú funkciu
step(A, B, C, D)	pre systém zadany stavovým popisom
step(A, B, C, D, t)	t-časový interval (lineárny vektor)
step(A, B, C, D, iu, t)	pre systémy s viacerými vstupmi: iu – poradové číslo vstupu

Časové ododzvy na preddefinované vstupné signály:

lsim	vykoná simuláciu spojitého alebo diskretného systému SISO/MIMO na ľubovoľný vstupný signál
lsim(sys,u,t)	u, t – definovanie vektora vstupného signálu

prípadne je možné azpamätať si I/O údaje v tvare: **[y,t,x]=lsim(sys, u,t)**

Frekvenčné charakteristiky:

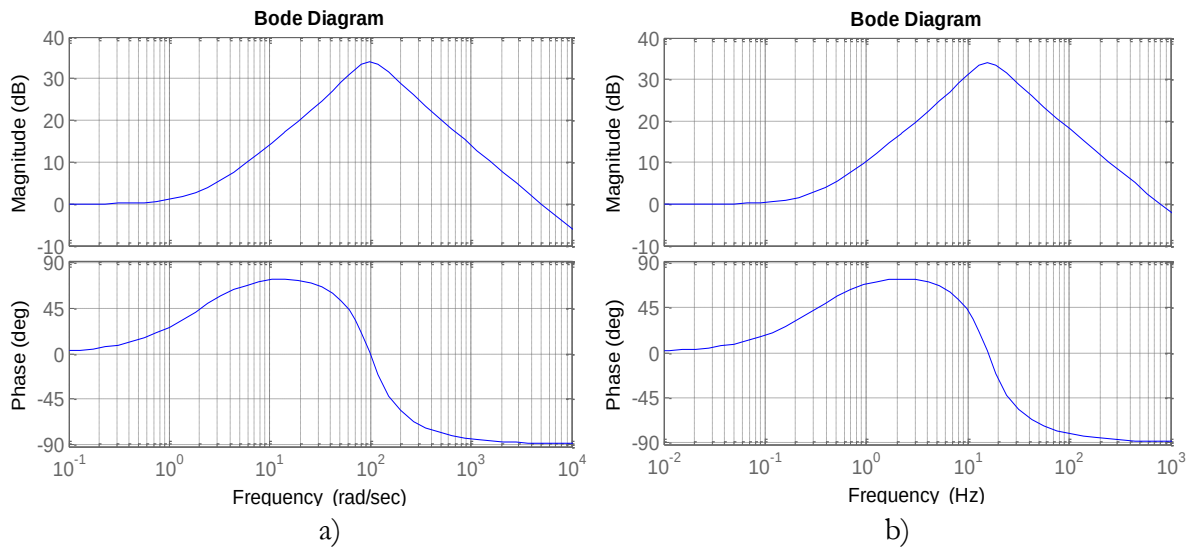
nyquist(sys)	Nyquistova komplexná frekvenčná charakteristika,
bode(sys)	Bodeho logaritmické frekvenčné charakteristiky (amplitúdová a fázová)

kde kde **sys** predstavuje buď prenosovú funkciu alebo stavový popis systému. Je možné zadať tiež interval zmeny uhlovej rýchlosti **w**. Tento vektor, vytvorený výhodne v logaritmickej mierke s využitím inštrukcie **logspace**), sa doplní nasledovne **nyquist(sys,w)**, **bode(sys,w)**.

Príklad 1:

```
w=logspace (-1,4,1000);  
bode([0.5 1], [1e-4 0.01 1])  
grid on
```

Bodeho logaritmické frekvenčné charakteristiky sú na Obr. 10.7.



Obr. 10.7 Logaritmické frekvenčné charakteristiky:
a) v závislosti od kruhovej frekvencie v rad/s; b) v závislosti od frekvencie v Hz

Príklad 2:

Ak miesto kruhovej frekvencie ω chceme zobrazit' graf v Hz, potom použijeme pomocou tzv. handle nasledové inštrukcie (Obr. 10.7b):

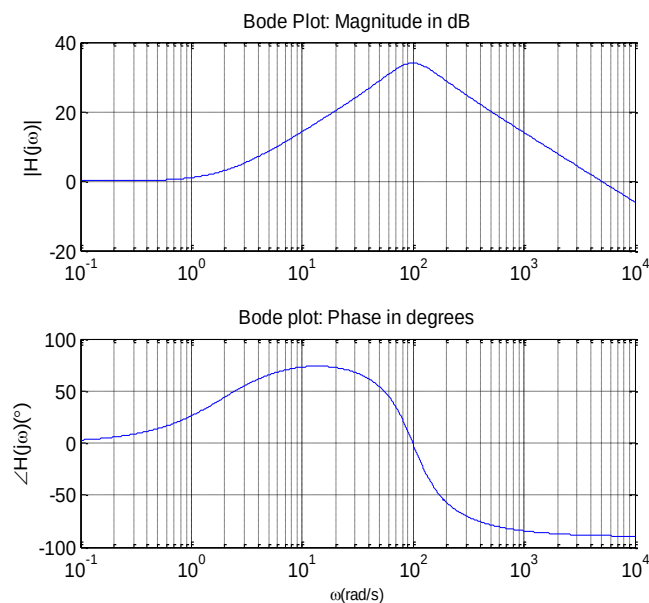
```
sys=tf([0.5 1], [1e-4 0.01 1])
h= bodeplot(sys);grid
setoptions(h,'FreqUnits','Hz');
```

Príklad 3: Pri priamom nakreslení logaritmickéj frekvenčnej charakteristiky na základe definície lepšie porozumieme konštrukcii logaritmických charakteristík. Do prenosovej funkcie $F(s)$ dosadíme $s = j\omega$.

$$F(j\omega) = \frac{2j\omega + 5}{7(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 1}$$

```
w=logspace(-1,4,1000);
F=(1+0.5j*w)./(1e-4*(j*w).^2 + 0.01*(j*w) +1);
subplot(2,1,1); semilogx(w,20*log10(abs(H))); grid on, ylabel('| G(j\omega) | ');
title('Bode Plot: Magnitude in dB');
subplot(2,1,2); semilogx(w,unwrap(angle(G))*180/pi); grid on;
xlabel('\omega(rad/s)'); ylabel('\angle G(j\omega)(\circ)');
title('Bode plot: Phase in degrees');
```


Dostávame taký istý výsledok (Obr. 10.8) ako pri použití inštrukcie **bode** v predchádzajúcom prípade (Obr. 10.7a).



Obr. 10.8 Vypočítané a nakreslené frekvenčné logaritmické charakteristiky

Poznámka: Pri definícii prenosovej funkcie F je potrebné pre správne násobenie a umocňovanie používať operátor “.” (bodka) – ide o matematické operácie, ktoré sa vykonávajú na jednotlivých prvkoch vektora $j*w$, nie na vektoroch ako celku.

11 SYMBOLIC MATH TOOLBOX

<http://www.mathworks.com/help/symbolic/functionlist.html>

Symbolic Math toolbox umožňuje používateľom vykonávať symbolické matematické výpočty pomocou MATLABu (v minulosti sa pre tieto výpočty používal program MAPLE). Pre symbolické výpočty Symbolic Math toolbox používa syntax jazyka MATLAB. Toolbox poskytuje viac než 100 symbolických funkcií [60] pre riešenie algebraického počtu, diferenciálneho a integrálne počtu vrátane možnosti zobrazenia grafov funkcií. Preto Symbolic Math toolbox je obzvlášť dôležitý analýzu a návrh riadiacich systémov je, pretože umožňuje nasledovné operácie:

- 1) Prenosové funkcie a ďalšie výrazy môžu byť zapísané v symbolickej podobe, tak, ako ich sa zapisujú pomocou textového editora.
- 2) Umožňuje vykonávať matematické operácie nad symbolickými výrazmi a zjednodušovať ich.
- 3) Polynómy, zapísané v symbolickom tvare, možno jednoducho konvertovať na vektory zodpovedajúce koeficientom pri jednotlivých mocninách operátora s .
- 4) Výrazy možno v okne MATLABu vytlačiť v prehľadnom tvare („pretty printed“)

Tab. 11.1 Porovnanie vlastností symbolického a numerického riešenia

Forma	Výhody	Nevýhody
Symbolické riešenie	• Výsledok je v analytickom tvare • Riešiteľ má prehľad o postupe (odvození) riešenia	• Riešenie nemusí vždy viesť k cieľu • Pomerne zložité riešenie • Riešenie je náročné na analytické vedomosti riešiteľa
Numerické výpočty	• Numerické riešenie vždy existuje • Výsledok možno získať s požadovanou presnosťou • Možno ho ľahko algoritmizovať	• Neexistuje priamy súvis medzi algoritmom a podstatou riešenia • Numerické metódy niekedy zlyhávajú • Podľa zložitosti algoritmu a požadovanej presnosti riešenie zaberá určitý čas

Všetky funkcionality v Symbolic Math toolboxe zistíme po zapísaní inštrukcie **help symbolic** v MATLABe. In this section, we will learn commands of Symbolic Math toolbox particularly useful for control engineering.

Symbolic Math toolbox obsahuje inštrukcie pre vykonávanie nasledovných výpočtov v symbolickom tvare:

- 1) derivácie
- 2) integrály (určité a neurčité)
- 3) konverziu na číselné premenné („double“) pre ďalšie numerické výpočty
- 4) dosadzovanie do výrazov
- 5) kreslenie rovníc a funkcií
- 6) riešenie rovníc: grafická aproximácia, riešenie jednoduchých rovníc a sústav rovníc, nelineárne rovnice.
- 7) limity
- 8) Taylorove rady
- 9) aritmetika s premenlivou presnosťou („Variable precision“)

Pozn. Pri štúdiu je vhodné oboznámiť sa s možnosťami toolboxu zadáním **>> demos** do riadku MATLABu a výberom časti Symbolic Math Demos (obsahuje riešené príklady v členení Introduction, Variable Precision Arithmetic, Calculus, Solving Equations, Symbolic Matrix Computation, Plane Rotations).

S ohľadom na názornosť nasledovná látka bude vysvetľovaná formou príkladov. Pre úsporu miesta v príkladoch sú príbuzné inštrukcie zapísané v jednom riadku.

11.1 Inštrukcie symbolickej matematiky

Symbolické objekty je možné považovať za špeciálny datový typ MATLABu. Pred začiatkom výpočtov so symbolickými premennými je potrebné ich deklarovať. Najjednoduchšie to vykonáme pomocou inštrukcie **syms** "Např., ak budeme mať symbolické premenné x, y, a, b a c, potom zadáme

```
>> syms x y a b c d f g % jednotlivé položky sú oddelené medzerou
```

O tom, že daná premenná je symbolická, sa môžeme presvedčiť v okne Workspace, resp. po zadání inštrukcie **whos** (dostávame hodnotu **<1x1 sym>**).

Alternatívne možno symbolické premenné deklarovať počas riešenia. Príklady rôznych možností:

```
>> x=sym('x'), y=sym('y'), a=sym('a'), b=sym('b')
>> delta = sym('1/10'), delta = sym(1/10,'d')
```

Oba spôsoby zápisu symbolických premenných sú rovnocenné; kvôli jednoduchšiemu zápisu sa však odporúča uprednostniť prvý zápis – pomocou **syms**. Pri použití symbolickej hodnoty, MATLAB nevracia reálnu hodnotu, ale symbolickú hodnotu. Porovnajte nasledovné riešenia:

<pre>>> b=sym(2) b = 2 >> sqrt(b) ans = 2^(1/2)</pre>	<pre>>> b=sym(2) b = 2 >> c= sqrt(b) >> real(c) ans = 1.4142</pre>
---	--

Počítanie so symbolickými premennými má niekedy výhodu např. pri počítaní so zlomkami

```
>> sym(2/5)+sym(1/4)+sym(2/3)
ans =
79/60
```

Počítanie so zlomkami zadanými v symbolickom tvare

```
>> a=sym('1/3');b=sym('4/5');
>> d=a*b
d =
4/15
```

Zadanie matice v symbolickom tvare:

```
>> Mat=sym([1 2;3 4]);
```

11.1.1 Derivovanie

Výpočet prvej derivácie_vzhľadom na špecifikovanú premennú.

Napr. deriváciu funkcie $dfx = \frac{df}{dx}$, kde $f = e^{-ax}x^{3b}\sin(cx)$, kde a, b a c sú nešpecifikované konštanty, nájdeme nasledovne (deriváciu funkcie f označíme premennou dfx):

```
f=exp(-a*x)*x^(3*b)*sin(c*x)
dfx = diff(f,x)
```

Výsledok mám dáva pomerne zložitý výraz. Zjednodušíme ho pomocou inštrukcie **simple**:

```
dfx1 = simple(df)
```

MATLAB používa niekoľko algoritmov pre zjednodušenie algebraických výrazov a z nich vyberie najkratší. Môže sa však stať, že nenájde žiadny jednoduchší výraz.

Výpočet derivácií vyšších rádov

Napríklad, výpočet druhej derivácie funkcie $dfx2 = \frac{d^2x}{dt^2}$ zapíšeme nasledovne

```
df2=diff(f,x,2)
```

pričom využijeme vopred definovanú funkciu f .

11.1.2 Integrálny počet

Neurčitý integrál

Výpočet neurčitého integrálu $int_g = \int g(x) dx$, kde $g = e - a^x \sin(cx)$, zapíšeme:

```
syms a c x;
g=exp(-a*x)*sin(c*x),
int_g = int(g,x)
```

Pre kontrolu môžeme výsledok derivovať:

```
dfx = diff(int_g,x)
```

čím by sme mali dostať pôvodnú funkciu. Výsledok však na prvý pohľad nemusí vyzerat' rovnako, pretože MATLAB nenájde vždy najjednoduchší tvar. V tomto prípade použijeme zjednodušenie výrazu:

```
dfx1 = simple(diff_int)
```

Poznamenajme, že MATLAB nepridáva integračnú konštantu ("C"); túto treba zapísať zvlášť.

Niekedy program MATLAB nie je schopný symbolicky integrovať zadanú funkciu. Napríklad pre nájdenie integrálu $\int f dx$, kde f je rovnaká funkcia, ako v predchádzajúcom prípade: $f = e^{-ax}x^{3b}\sin(cx)$, kde a, b a c sú nešpecifikované konštanty, postupujeme nasledovne:

```
syms a b c x;
f = exp(-a*x)*x^(3*b)*sin(c*x), int(f,x)
```

Ak MATLAB nevie nájsť riešenie, vypíše upozornenie a výraz nie je programom MATLAB riešiteľný.

Určitý integrál

Pre výpočet určitého integrálu: $\text{int_g} = \int_{-\pi}^{\pi} g \, dx$ zadáme:

```
syms a b x;  
g = exp(-a*x)*sin(b*x),  
int_g = int(g,x,-pi,pi)
```

Ak MATLAB nevie nájsť analytické (symbolické) riešenie, ako napr. v prípade:

```
syms x, int(exp(sin(x)),0,10)
```

Potom numerické riešenie možno nájsť pomocou inštrukcie **quad** nasledovne: v editore MATLABu sa vytvorí funkcia a uloží sa do aktuálneho adresára (Current Directory), ku ktorému musí byť prístupná cesta (File / Set Path). Napr., funkciu $\exp(\sin(x))$ uložíme ako externý skript (m-súbor) pod menom func1.m.

```
function y = func1(x)  
y = exp(sin(x));  
end
```

Potom použijeme nasledovnú inštrukciu:

```
quad('func1',0,10)
```

alebo

```
quad(@func1,0,1)
```

Inštrukcia **quad** je založená na numerickom riešení určitého integrálu pomocou Simsonovho pravidla s chybou 10^{-6} .

Pri riešení určitého integrálu $\int_a^b x e^x dx$ v hraniciach $a=0$, $b=2$ najprv vypočítame integrál symbolicky a potom dosadíme:

```
Q = int(x*exp(x),a,b)  
subs(Q, {a,b}, {0,2})
```

Konverzia na číselnú (numerickú) premennú s dvojnásobnou presnosťou

Výstupom symbolického počtu v MATLABe sú symbolické výsledky, ako napríklad:

```
syms x;  
f=exp(-x)*sin(x),  
int_f=int(f,x,-pi,pi)
```

Iracionálne čísla dávajú v symbolickom tvare zlomok napr. $4/3$ a nie 1.3333. Pre použitie symbolických hodnôt pre ďalšie numerické riešenie treba symbolický výsledok konvertovať na číselnú premennú pomocou inštrukcie **double**:

```
int_f_doub=double(int_def_h)
```

11.1.3 Ďalšie matematické operácie pre symbolické riešenie

Dosadzovanie do výrazov

Ak je potrebné dosadiť skutočnú (číselnú) hodnotu alebo parameter do ineého výraz, použijeme inštrukciu `subs`. Napr. pre dosadenie $a = 2$ a $c = 4$ do funkcie `int_def_g` zadáme:

```
syms a c x;  
g = exp(-a*x)*sin(c*x)  
int_def_g = int(g,x,-pi,pi)  
int_sub=subs(int_def_g,{a,c},{2,4})
```

Dosadzovanie je vhodné vykonať po prevedení symbolickej operácie – do výsledku. Ináč dostávame iný tvar výsledku, ktorý síce nevedí pri určitom integrále, ale pri neurčitom integrále to môže viesť k nesprávnemu výsledku.

Roznásobenie výrazu (dvojčlen, trojčlen, ...)

```
>> a=sym('1/3'); b=sym('b');  
>> expand((a-b)^2)  
ans =  
1/9-2/3*b+b^2
```

Výpočet inverznej matice zadanej v symbolickom tvare

```
>> Mat=sym([1 2; 3 4]);  
>> InvMat=inv(Mat)  
InvMat =  
[ -2,  1]  
[ 3/2, -1/2]
```

Podobne možno realizovať ostatné maticové operácie s maticami v symbolickom tvare, maticové maticové operácie pri kombinácii matíc v symbolickom a číselnom tvare, výpočet determinantu a pod.

Zlúčenie výrazov

Spočíta výrazy napr. pri rovnakých mocninách

```
>> syms x y  
>> collect(3*x+4*y-1/3*x^2-x+3/2*y)  
ans =  
2*x+11/2*y-1/3*x^2
```

Úprava matematických výrazov

Výsledok možno často upraviť do prehľadnejšieho tvaru pomocou inštrukcie `pretty`.

11.1.4 Kreslenie grafov a funkcií

Symbolický toolbox obsahuje inštrukcie pre kreslenie symbolických rovníc a funkcií. Pre kreslenie dvojrozmerného grafu používame inštrukciu **ezplot**.

Ako príklad nakreslíme kružnicu s polomerom 2, ktorej rovnica je v tvare: $x^2 + y^2 = 4$.

- 1) Premiestnime všetky výrazy na ľavú stranu rovnice, t.j. $x^2 + y^2 - 4 = 0$.
- 2) Deklarujeme x a y ako symbolické premenné.
- 3) Definujeme premennú, ktorú položíme rovnú získanému výrazu a a v hranatých zátvorkách definujeme rozsahy premenných pre kreslenie grafu.
- 4) Použijeme inštrukciu **ezplot**:

```
k = 'x^2+y^2 - 4';  
ezplot(k, [-3,3,-2.5,2.5])
```

Údaje v hranatej zátvorke **[-3,3,-2,2]** znamenajú rozsah okna grafu $-3 \leq x \leq 3$ a $-2 \leq y \leq 2$.

Obrázok možno tiež editovať priamo v okne obrázka nasledovne:

- Klikneme na ikonu šípky a potom klikneme dvakrát na akúkoľvek časť obrázku, ktorú chceme upraviť. Týmto spôsobom môžeme zmeniť farbu a hrúbku krivky, pridať body, zmeniť osi a upraviť názov grafu. Po kliknutí do menu obrázku možno vytvoriť 3D obrázku, natáčať ho, vypísať súradnice bodov na danej krivke po kliknutí myšou na dané miesto, zobraziť legendu grafu, zoom a pod.
- Použijeme **Edit/Copy Figure** na uloženie obrázku do medzipamäte Windows Clipboard. Potom ho môžeme nakopírovať napr. do textového editora.
- Ak v okne obrázku a súčasne stlačíme klávesy **Alt** a **Print Screen**, do schránky uložíme celé okno. Obsah tejto schránky možno takisto vložiť do dokumentu programu Word.

Kreslenie priestorových grafov - funkcie troch premenných

Môžeme tiež vykresliť funkcie, ktoré sú definované v skripte m súboru, ako napríklad funkciu **func1** pre vyššie uvedený určitý integrál, ktorý mal byť nájdený číselne pomocou **quad**. Pre takúto funkciu, musíme dať názov funkcie do jednoduchých úvodzoviek:

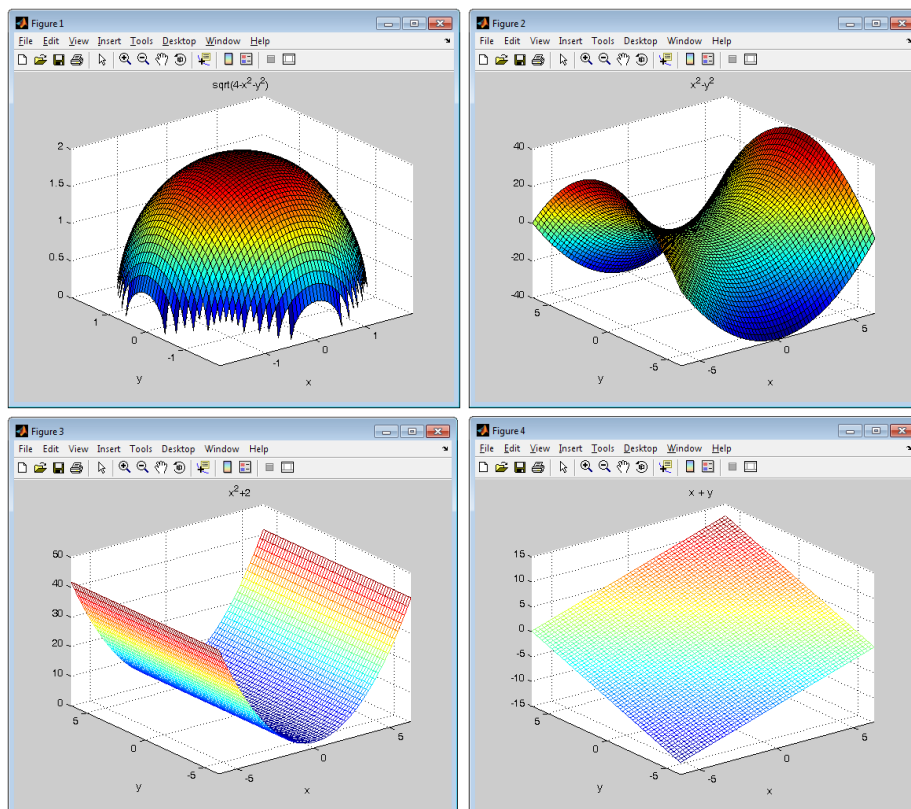
```
ezplot('func1',0,10)
```

Trojrozmerné grafy možno kresliť pomocou inštrukcií **ezmesh** and **ezsurf**. Prekreslenie týchto grafov treba vyjadriť premennú explicitne – napr. $z = f(x, y)$. Niektoré z možností kreslenia grafov zobrazuje nižšie uvedený príklad.

Príklad:

```
ex1='sqrt(4-x^2-y^2)'; figure(1); ezsurf(ex1,[-2,2,-2,2]);  
ex2='x^2-y^2'; figure(2); ezsurf(ex2);  
ex3='x^2+2'; figure(3); ezmesh(ex3);  
ex4='x + y'; figure(4); ezmesh(ex4);
```

Výsledok kreslenia grafov, odpovedajúcich daným rovniciam, je zobrazený na Obr. 11.1. Menu uvedené nad obrázkom umožňuje natáčať graf, zväčšovať a zmenšovať, meniť farebnú škálu, natáčať - meniť uhol pohľadu, zistiť hodnotu premenných v danom bode a pod.



Obr. 11.1 Výsledky pri kreslení trojrozmerných grafov pomocou inštrukcií **ezsurf** (hore) a **ezmesh** (dole)

11.1.5 Riešenie algebraických rovníc

Symbolic Math toolbox v MATLABe umožňuje riešiť mnoho druhov rovníc, vrátane nelineárnych rovníc a riešenia sústavy rovníc. Používame pritom inštrukciu **solve**. Postup:

- 1) Definujeme premenné v rovnici ako symbolické pomocou inštrukcie **syms**.
- 2) Zapišeme rovnice.
- 3) Riešime rovnice pomocou inštrukcie **solve**.
- 4) Ak existuje viac riešení, rozhodneme, ktoré je fyzikálne zdôvodniteľné a zvolíme ho.
- 5) Urobíme skúšku správnosti dosadením do pôvodnej rovnice/rovníc.

Rovnica sa zadáva do jednoduchých úvodzoviek – napr. '**a*x^2+b*x+c = 0**'.

Existujú dva spôsoby, ako možno symbolicky zapísať riešenie rovnice.

Príklad 1:

Riešenia klasickej kvadratickej rovnice v tvare $ax^2 + bx + c = 0$ nájdeme nasledovne:

- 1) `>> syms x a b c;`
- 2) `>> f = 'a*x^2+b*x+c = 0';`
`f =`
`a*x^2+b*x+c = 0`
- 3) `>> [x]=solve(f,x)`
`x =`

$$-1/2*(b-(b^2-4*a*c)^(1/2))/a$$

$$-1/2*(b+(b^2-4*a*c)^(1/2))/a$$

Dostali sme dve riešenia. Ak chceme použiť iba prvé, potom ho vyberieme nasledovne:

$$x1 = x(1)$$

- 4) Ak nie je špecifikovaná pravá strana rovnice, implicitne sa predpokladá, že je rovná nule:

```
>> syms x a b c;
>> f = a*x^2 + b*x + c,
>> [x]=solve(f,x)
```

Dostávame ten istý výsledok, ako v predchádzajúcom prípade.

Podobne vyriešime kvadratickú rovnicu s dvoma premennými vzhľadom na premenné x a y :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

```
>> syms a b r x y
>> solve('(x-a)^2+(y-b)^2=r^2','x')
>> solve('(x-a)^2+(y-b)^2=r^2','y')
ans =
a+(2*y*b-b^2-y^2+r^2)^(1/2)
a-(2*y*b-b^2-y^2+r^2)^(1/2)
ans =
b+(-x^2+2*x*a-a^2+r^2)^(1/2)
b-(-x^2+2*x*a-a^2+r^2)^(1/2)
```

Príklad 2:

Riešenie rovnice $e^{2x} = 3y$ vzhľadom na x nájdeme nasledovne:

```
>> syms x y;
>> eq = 'exp(2*x) = 3*y',
>> [x] = solve(eq, x)
```

Riešenie sústavy rovníc nájdeme podobným spôsobom:

Príklad 3:

Nájdite riešenie nasledovnej sústavy troch lineárnych rovníc o troch neznámych:

$$2x - 3y + 4z = 5$$

$$y + 4z + x = 10$$

$$-2z + 3x + 4y = 0$$

```
>> syms x y z;
>> eq1 = '2*x-3*y+4*z = 5'
>> eq2 = 'y+4*z+x = 10'
>> eq3 = '-2*z+3*x+4*y = 0'
>> [x,y,z] = solve(eq1,eq2,eq3,x,y,z)
```

Poznámka:

pri zadávaní premenných nie je potrebné ich zadávať v abecednom poradí. Na druhej strane, premenné vo výsledku sa nachádzajú v abecednom poradí bez ohľadu na to, v akom poradí boli deklarované, resp. zadávané do rovníc, takže je potrebné dávať pozor na poradie premenných v poslednej z vyššie uvedených inštrukcií. Napríklad, pri zadaní poradia **[z,x,y]** miesto **[x,y,z]** môže dôjsť ku zámene premenných. Výsledok dostávame v symbolickom tvare a pre získanie číselnej hodnoty je potrebné vykonať nasledovný výpočet:

```
>> x_d = double(x), y_d = double(y), z_d = double(z)
```

Príklad 4:

Je možné riešiť tiež sústavu dvoch nelineárnych algebraických rovníc, napr.

$$y = 2e^x \text{ a } y = 3 - x^2:$$

```
>> syms x y;
>> eq1='y=2*exp(x)', eq2='y=3-x^2';
>> [x,y]=solve(eq1,eq2,x,y)
```

Všimnime si, že dostávame iba jedno riešenie, hoci existujú dve, ako to uvidíme nižšie. Opäť platí, že pre prevod symbolických premenných x a y na numerické použijeme príkaz **double**.

Približné riešenie môžeme získať nakreslením grafov rovníc a zistiť ich križovanie. Najprv všetko presunieme na ľavú stranu rovníc, pretože **ezplot** kreslí výrazy a nie rovnice.

```
>> exp1 = 'y - 2*exp(x)';
>> exp2 = 'y-3+x^2';
>> ezplot(exp1), hold on; ezplot(exp2); hold off
```

Orientačné hodnoty riešenia (priesečníky grafov) možno získať v okne obrázku kliknutím na **Nástroje/Zoom In**. Kliknutím na priesečník zväčšíme danú oblasť grafu. Po kliknutí na **Nástroje/Data Cursor**, a kliknutí na priesečníky grafov dostaneme približné hodnoty x a y . Porovnajme tieto výsledky s tými, ktoré boli vyriešené pomocou vyššie uvedeného príkazu **solve**.

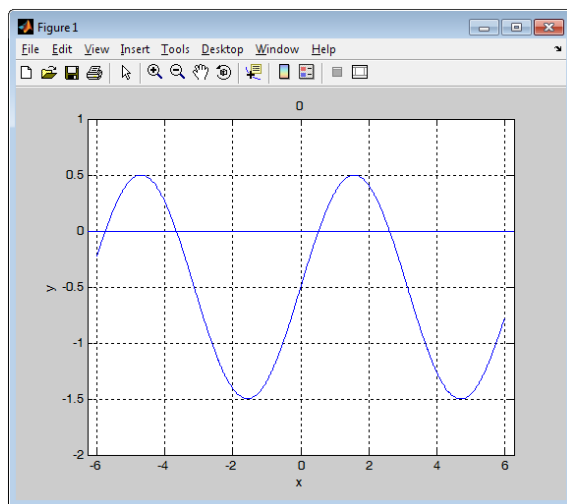
Príklad 5:

Existujú tiež rovnice s nekonečným počtom riešení. Príkladom je rovnica $\sin(x) = 1/2$.

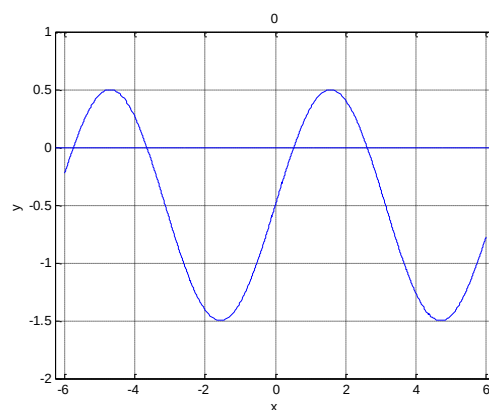
Preto je vhodné nakresliť si danú funkciu a skusmo pozrieť, pri akých hodnotách premennej x je jej hodnota nulová:

```
>> exp1='y - sin(x) + 1/2',
>> exp0='0'
>> ezplot(exp1,[-6,6,-2,1]), hold on; ezplot(exp0); hold off
```

Inštrukcia **hold on** umožní vykresliť oba grafy do jedného obrázku. Príkaz **ezplot(exp0)** vynesie vodorovnú čiaru v grafe pre $y=0$. Priesečníky sínusoidy s touto líniou predstavujú riešenie prvej rovnice. Graf je zobrazený na Obr. 11.2.



a)



b)

Obr. 11.2 Graf priebehu pre riešenie rovnice $\sin x = 1/2$: a) celé okno grafu aj s menu, b) samotný graf

Symbolic Math toolbox pri zadaní `solve` nájde iba dve riešenia medzi 0 a π :

```
>> syms x;
>> eq='sin(x)-1/2=0';
>> [x]=solve(eq,x);
>> x_doub=double(x)
```

Predpokladajme však, že chceme získať riešenie, ktoré leží medzi $x = 4$ a $x = 10$. Možno to vykonať pomocou funkcie **evalin**, ktorá umožňuje nájsť riešenie v špecifikovanom rozsahu:

```
evalin(symengine,'numeric::solve(sin(x) = 1/2, x = 4..10)')
```

Several other numerical methods are described in [Tutorial on numerical solution of equations using MATLAB](#)

11.1.6 Limity

Symbolický toolbox obsahuje inštrukciu pre nájdenie limity výrazu. Napr. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x}$ bude:

```
>> syms x a;
>> value = limit(sin(a*x)/x,x,0)
```

Existujú prípady, kde hodnota limity závisí od smeru, z ktorého sa priblížime ku danému bodu. Typickým prípadom je funkcie $\tan(x)$, ktorú môžeme zakresliť v závislosti od premennej x pomocou inštrukcie:

```
>> ezplot('tan(x)')
```

Predpokladajme, že chceme zistiť hodnotu $\tan(x)$ v bode $x = \pi/2$. Použijeme inštrukciu:

```
>> tan(pi/2)
```

Je získaný výsledok správny? Pripomeňme si, že hodnota $\tan(\pi/2)$ môže byť buď $+\infty$ alebo $-\infty$ v závislosti od toho, či sa k bodu $x = \pi/2$ približujeme zľava alebo sprava. Pre správne riešenie úlohy použijeme symbolický počet:

```
>> syms x,
>> tan_sprava = limit(tan(x),x,pi/2,'right')
>> tan_zlava = limit(tan(x),x,pi/2,'left')
```

Niektoré výsledky pri zadávaní limit:

```
syms x a t h;
limit(sin(x)/x) ..... výsledok = 1
limit((x-2)/(x^2-4),2) ..... výsledok = 1/4
limit((1+2*t/x)^(3*x),x,inf) ..... výsledok = exp(6*t)
limit(1/x,x,0,'right') ..... výsledok = inf
limit(1/x,x,0,'left') ..... výsledok = -inf
limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0) ..... výsledok = cos(x)
v = [(1 + a/x)^x, exp(-x)]; limit(v,x,inf,'left') ..... výsledok = [exp(a), 0]
```

11.1.7 Taylorov rad

Taylorov rad predstavuje polynomiálnu aproximáciu funkcie v blízkom okolí zvoleného bodu nezávisle premennej (pracovného bodu). Pre vytvorenie tohto polynómu sú potrebné derivácie vyššieho rádu. Syntax inštrukcie je **taylor(expression, order, variable, point)**

Príklad:

Rozvoj funkcie e^x v bode pre $x = 0$ do radu s piatimi členmi rozvoja:

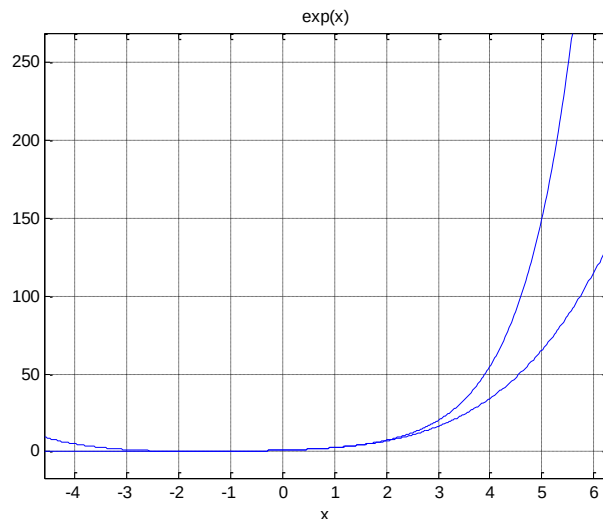
```
>> syms x
>> Tay_expx=taylor(exp(x),5,x,0)
Tay_expx =
1+x+1/2*x^2+1/6*x^3+1/24*x^4
```

Výsledok je presný v bode pre $x = 0$ a so zväčšujúcou sa vzdialenosťou od tohto bodu sa zvyšuje nepresnosť. Napr v bode $x = 2$ bude chyba nasledovná (v porovnaní s presnou hodnotou):

```
>> approx=subs(Tay_exp,x,2), exact=exp(2), frac_err=abs(1-approx/exact)
approx =
7
exact =
7.3891
frac_err =
0.0527
```

Presnosť aproximácie sa zvyšuje s počtom členov radu, čo ilustruje príklad (Obr. 11.3):

```
>> ezplot(Tay_expx), hold on, ezplot(exp(x)), hold off, grid
```



Obr. 11.3 Funkcia e^x (horný priebeh) a jej aproximácia v bode $x = 0$ s piatimi členmi rozvoja

11.1.8 Súčet radu

Pomocou inštrukcie **symsum** v symbolickom toolboxe možno vykonávať aj symboické súčty členov radu, dokonca členov nekonečného radu.

Vypočítajme súčet členov radu $\sum_{k=m}^n f(k)$, kde $f(k)$ je funkciou celočíselnej premennej k . The syntax to calculate this using MATLAB is

syms k, symsum(f,k,m,n).

Príklad 1: Výpočet $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

```
>> syms k x;
>> symsum(1/sym(k^2), k, 1, Inf)
ans =
1/6*pi^2
```

Výpočet faktoriálu. Pri výpočte faktoriálu aj výkričník ! predstavuje číselnú operáciu. Preto výraz, obsahujúci faktoriál, v MATLABe zadáme v inštrukcii sym do jednoduchých úvodzoviek. Napríklad, pre výpočet výrazu $(1+2*k)!$ treba použiť výraz **sym('(1+2*k)!')**.

Súčet nekonečného radu.

Riešenie radu $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+2)!}$ symbolickým počtom zadáme nasledovne:

```
>> syms k x;
>> symsum((-1)^k*x^(2*k + 1)/sym('(2*k + 1)!'), k, 0, Inf)
ans =
sin(x)
```

Príklad 2: Výpočet $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

```
>> syms k x; symsum (x^k/sym('k!'), k, 0, Inf)
ans =
exp(x)
```

11.1.9 Aritmetika s premenlivou presnosťou

Aritmetika s premenlivou presnosťou (Variable Precision Arithmetic – VPA) umožňuje zadávať presnosť, s akou má MATLAB riešiť výpočty s iracionálnymi číslami. Defaultne MATLAB počíta so 16 významovými číslicami.

Syntax VPA pre výpočet hodnoty čísla **R** z výrazu **A** je **R = vpa(A)**, resp. **R = vpa('A')**

v závislosti od toho, či vo výsledku chceme výsledok zaokrúhliť na 16 desatiných miest, alebo získať plnú presnosť v symbolickom tvare (nemá však význam používať presnosť $d > 32$).

Počet číslic, na ktoré sa má zaokrúhliť výsledok, zadáme pomocou **R = vpa(A,d)**. Znamená to, že VPA sa používa na výpočet hodnoty výrazu **A** so s presnosťou na **d** desatinných miest.

Príklad 3: Uvedený postup možno ilustrovať na príklade „zlatého rezu“ (pomere strán), pre ktorý platí rovnica $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Nájdite rozdiel voči presnej hodnote (phi1) pri výpočte hodnoty Φ s zôznou presnosťou:

```
>> phi1 = vpa((1+sqrt(5))/2)
>> phi2 = vpa('(1+sqrt(5))/2')
>> difference = phi1 - phi2
```

Vypočítajme hodnotu phi2 s presnosťou na rôzny počet číslic a presnosť posúdime na základe výpočtu rozdielu phi1 - phi2

```
>> ((1+sqrt(5))/2,4), phi2 = vpa('(1+sqrt(5))/2'), difference = phi1 - phi2
>> phi1 = vpa((1+sqrt(5))/2), phi2 = vpa('(1+sqrt(5))/2',4), difference = phi1 - phi2
>> phi1 = vpa((1+sqrt(5))/2,100), phi2 = vpa('(1+sqrt(5))/2',100), difference = phi1 - phi2
```

Z uvedeného porovnanie jednotlivých výsledkov vyplýva, že väčšiu presnosť možno získať pri použití symbolickej metódy riešenia, t.j. pri použití syntaxu v tvare **R = vpa('A')**.

11.2 Formátovanie výsledkov

Uvednieme tu niektoré praktické zjednodušenia, ktoré s výhodou môžeme použiť pre väčšiu prehľadnosť riešenia.

Príklad 1: Preverme, ako inštrukcia **collect** zhromaždí koeficienty pri rovnakej mocnine:

```
>> syms x;
>> f=(x-1)*(x-2)*(x-3);
>> collect (f)
ans =
-6+x^3-6*x^2+11*x
```

Príklad 2: Inštrukciu **expand** možno použiť napríklad pri riešení goniometrických výrazov:

```
>> syms x y;
>> f=cos(x+y); expand(f)
ans =
cos(x)*cos(y)-sin(x)*sin(y)
```

Príklad 3: Pre vytlačenie textu a výsledku na obrazovku použijeme nasledovnú formu zápisu:

```
>> syms x y z
>> eq = 2*x+3*y+4*z;
>> fprintf('Prenosová funkcia je: %s = D.\n',char(eq));
Prenosová funkcia je: 2*x+3*y+4*z = D.
```

Viac informácií o formátovaní výstupu na obrazovku možno nájsť v pomocníkovi pre **fprintf**.

Príklad 4: Inštrukcia:

```
>> fprintf('Obvod kružnice s polomerom r = 1 m je %g metrov.\n', 2*pi)
```

Zobrazí na obrazovke riadok v tvare:

Obvod kružnice s polomerom r = 1 m je 6.28319 metrov.

Príklad 5: Výsledky riešenia možno zapisovať do tabuľky vo zvolenom súbore a potom tento vytlačiť na obrazovku. Ukážme si postup na jednoduchom príklade.

Vytvoríme textový súbor nazvaný **exp.txt**, ktorý obsahuje tabuľku hodnôt x , e^x . e. Použijme inštrukciu **fopen** s parametrom nastaveným na **'wt'** pre otvorenie súboru na zápis (podrobné informácie o formáte sú uvedené v pomocníkovi pre inštrukciu **fopen**). Na záver súbor uzavrieme pomocou inštrukcie **fclose**.

```
>> x = 0:1:1;
>> y = [x; exp(x)];
>> fid = fopen('exp.txt', 'wt');
>> fprintf(fid, '%6.2f %12.8f\n', y)
>> fclose(fid)
```

kde výraz **%12.8f** znamená zápis čísla o dĺžke 12 znakov s 8 mietami za desatinnou bodkou.

Obsah vytvoreného súboru **exp.txt** vypíšeme na obrazovku pomocou **type exp.txt**:

```
0.00 1.00000000
0.10 1.10517092
...
1.00 2.71828183
```

Príklad 6: Zápis výsledkov vo forme textu:

```
>> B = [8.8 7.7; 8800 7700]
>> fprintf(1, 'Dlžka X je %4.2f metrov alebo %8.3f mm\n', 9.9, 9900, B)
```

Čo nám dáva výpis na obrazovku:

```
Dlžka X je 9.90 metrov alebo 9900.000 mm
Dlžka X je 8.80 metrov alebo 8800.000 mm
Dlžka X je 7.70 metrov alebo 7700.000 mm
```

11.3 Riešenie prenosových funkcií

Najprv ukážme použitie symbolického počtu pri výpočte inverznej Laplaceovej transformácie prenosovej funkcie v tvare $F(s) = \frac{b}{(s+a)^2+b}$:

```
>> syms s a b
>> F = b/((s+a)^2+b^2)
F =
b/((s+a)^2+b^2)
>> pretty(F)                                % inštrukcia pre úpravu výsledku

      b
-----
      2      2
(s + a) + b                                % výsledok v prehľadnej forme

>> ilaplace (F)                             % inverzná Laplaceova transformácia F(s)
ans =
exp(-a*t)*sin(b*t)                         % výsledok
```

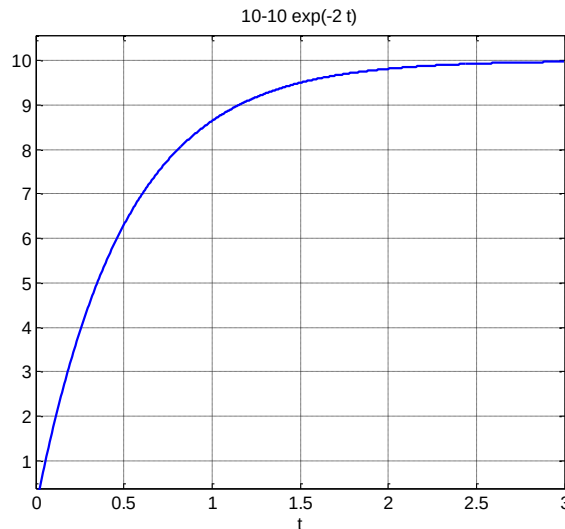
Príklad 1: Pomocou nástrojov symbolického toolboxu nájdite časovú dodozvu funkcie $G(s) = \frac{K}{Ts+1}$ pri buzení sústavy pomocou jednotkového skoku s amplitúdou A.

Hodnoty pre zobrazenie riešenia: $K = 2$, $T = 0.5s$, $A = 5$.

Postup: Premenné a parametre s , T a K budeme deklarovať ako symbolické premenné a nájdeme inverznú Laplaceovu transformáciu funkcie $G(s) = \frac{A}{s} \frac{K}{Ts+1}$.

```
>> syms s K T A
>> G=A*K/s/(T*s+1)
>> g=ilaplace(G)
>> g=subs (g,{A,K,T},{5,2,0.5})
>> ezplot(g,[0,3]),grid
```

Časová ododzva systému je zobrazená na Obr. 11.4.



Obr. 11.4 Časová ododzva sústavy I. rádu $G(s) = \frac{A}{s} \frac{K}{Ts+1}$ pre $K = 2$, $T = 0.5s$, $A = 5$.

Príklad 2: Nájdite Laplaceovu transformáciu časovej funkcie $f(t) = 1 + \frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{4}{3}e^{-t}$. Na výpočet Laplaceovej transformácie použijeme inštrukciu **laplace(f)**.

```
>> laplace (1+exp(-4*t)/3+4*exp(-t))
ans =
1/s+1/3/(s+4)+4/(1+s)
```

čo po prepísaní dáva prenosovú funkciu v tvare: $\frac{1}{s} + \frac{1}{3(s+4)} + \frac{4}{1+s}$.

Inštrukcia **simple(F)** nájde najjednoduchší tvar prenosovej funkcie $F(s)$ s najmenším počtom výrazov. Inštrukciu **simplify(F)** možno použiť na výpočet kombinácie parciálnych zlomkov. V Symbolic Math toolboxe sa nachádzajú ešte ďalšie inštrukcie, ktoré môžu upraviť výsledok tak, aby dával prehľadnejší matematický výraz. Niektoré z týchto možností sú:

- **collect(F)** – zhromažďí výrazy s rovnakými koeficientmi funkcie $F(s)$
- **expand(F)** – rozšíri násobenie činiteľov $F(s)$
- **vpa(F, places)** – nahradzuje symbolický výraz numerickou hodnotou s požadovanou presnosťou (táto inštrukcia konvertuje zlomkové symbolické výrazy na desatinné čísla so špecifikovaným počtom miest v premennej **places**).

Príklad 3: Nájdite zjednodušenie prenosovej funkcie zadanej v tvare: $F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{3} \frac{1}{s+4} - \frac{4}{3} \frac{1}{s+1}$ pomocou inštrukcie **simplify**:

```
>> syms s;
>> F = (1/s) + (1/3)*(1/(s+4)) - (4/3)*(1/(s+1))
F =
1/s+1/3/(s+4)-4/3/(s+1)
>> pretty(F)
```

```

      1      1
1/s + 1/3 ----- - 4/3 -----
      s + 4      s + 1
>> pretty(simplify(F))
      4
-----
s (s + 4) (s + 1)

```

Symbolické zlomky 1/3 and 4/3 v uvedenom príklade sa pretransformujú na numerické hodnoty 0.333 a 1.33 pričom tri významové číslice dosiahneme dosadením hodnoty 3 za argument **places** v inštrukcii **vpa(G, places)**.

```

>> pretty(vpa(G,3))
      0.333      1.33
1/s + ----- - -----
      s + 4.      s + 1.

```

Príklad 4: Uvažujme časovú funkciu $f(t) = 1 + \frac{b}{a-b}e^{-at} - \frac{a}{a-b}e^{-bt}$. Pomocou symbolického počtu v MATLAbE nájdime odpovedajúcu prenosovú funkciu (zodpovedá operátorovej funkcii $F(s) = \frac{a b}{s (s+a) (s+b)}$).

Aj v symbolickom počte možno používať základné matematické operátory +, -, *, /.

Napríklad spätnoväzobné zapojenie prenosov $G(s) = \frac{K}{s(s+5)}$ so zosilnením $K = 2.5$ v priamej vetve a prenosu $H(s) = \frac{2.5}{0.1s+1}$ v spätnej väzbe dáva prenos $F(s) = \frac{K G(s)}{1+G(s) H(s)}$.

Tento prenos vypočítame pomocou symbolického počtu v MATLAbE nasledovne.

```

>> syms s K; G = 2.5/(s*(s+5)); H = 1/(0.1*s+1); M = K*G/(1+G*H)
M =
5/2*K/s/(s+5)/(1+5/2/s/(s+5)/(1/10*s+1))
>> pretty(M)
      K
5/2 -----
      /      1      \
s (s + 5) | 1 + 5/2 ----- |
      \      s (s + 5) (1/10 s + 1)/
>> pretty(simplify(M))
      (s + 10) K
5/2 -----
      3      2
s + 15 s + 50 s + 25

```

Pomocou toolboxu Symbolic Math možno symbolické prenosové funkcie ľahko transformovať na časovo-invariantné prenosové funkcie (LTI - Linear Time-Invariant). Táto konverzia prebieha v dvoch krokoch:

- 1) v prvom kroku sa použije inštrukcia **numden** na oddelenie symbolického čitateľa a menovateľa prenosovej funkcie $G(s)$
- 2) v druhom kroku sa pomocou inštrukcie **sym2poly** konvertuje zvlášť čitateľ a zvlášť menovateľ na odpovedajúce vektory. V poslednom kroku sa vytvorí LTI prenosová funkcia pomocou vektorového zobrazenia čitateľa a menovateľa prenosovej funkcie

Príklad 5: Vytvorme prenosovú funkciu $M(s)$ vo vyššie uvedenom príklade pre $K = 1$:

```
>> K = 1; G = 2.5/(s*(s+5)); M = K*G/(1+G*H);
>> [nums, dens] = numden(M)      % polyn. čitateľa a menovateľa v symb. tvare
nums =
5*s*(s+5)*(s+10)
dens =
2*s*(s+5)*(s^3+15*s^2+50*s+25)
>> num = sym2poly(nums)          % symbolický polynóm čitateľa na vektor
num =
    5    75   250    0
>> den = sym2poly(dens)          % symbolický polynóm menovateľa na vektor
den =
    2    40   250   550   250    0
Transfer function:
      5 s^3 + 75 s^2 + 250 s
-----
    2 s^5 + 40 s^4 + 250 s^3 + 550 s^2 + 250 s
```

Komplementárna inštrukcia **poly2sym** mení vektor koeficientov polynómu na vektor koeficientov symbolického polynómu (pozri **help** pre inštrukciu **poly2sym**).

Príklad 6: Vypočítajte prenos dvoch sústav prvého rádu (parametre: K_1, T_1, K_2, T_2) zapojených v sérii s celkovou proporcionálnou spätnou väzbou K_3 . Pre zvolené parametre nakreslite časovú odozvu. Výpis zostaveného m-súboru je nasledovný:

```
clc, clear
syms K1 K2 K3 T1 T2 s
Fo=K1/(1+s*T1)*K2/(1+s*T2);
disp('Prenos otvoreneho obvodu:'),pretty (Fo)
F=Fo/(1+K3*Fo);
disp('Prenos uzavreteho obvodu:'),pretty(F)
Fo=subs(Fo,{K1,K2,T1,T2},{1,2,.1,.2});
disp('Otvoreny obvod pre: K1=1, K2=2, T1=.1, T2=.2:'),pretty(Fo)
fto=ilaplace(Fo/s); % Pre v7po4et prechodov
disp('Prechodova charakteristika otvoreneho obvodu:'),pretty (fto)
F=subs(F,{K1,K2,T1,T2,K3},{1,2,.01,.1,.2})
disp('Uzavrety obvod pre: K1=1, K2=2, K3=.01, T1=.1, T2=.2:'),pretty(F)
ft=ilaplace(F/s);
disp('Prechodova charakteristika uzavreteho obvodu:'),pretty (ft)
figure (1),ezplot(fto,[0, 2]),grid, figure (2),ezplot(ft,[0, 0.45]),grid
```

Výpis výsledkov je nasledovný:

Prenos otvoreneho obvodu:

$$\frac{K_1 K_2}{(s T_1 + 1) (s T_2 + 1)}$$

Prenos uzavreteho obvodu:

$$\frac{K_1 K_2}{(s T_1 + 1) (s T_2 + 1) \left| 1 + \frac{K_3 K_1 K_2}{(s T_1 + 1) (s T_2 + 1)} \right|}$$

Otvoreny obvod pre: $K_1=1, K_2=2, T_1=.1, T_2=.2$:

$$\frac{1}{(1 + 1/10 s) (1 + 1/5 s)}$$

Prechodova charakteristika otvoreneho obvodu:

$$2 - 4 \exp(-5 t) + 2 \exp(-10 t)$$

F =

$$2 / (1 + 1/100 s) / (1 + 1/10 s) / (1 + 2/5 / (1 + 1/100 s) / (1 + 1/10 s))$$

Uzavrety obvod pre: $K_1=1, K_2=2, K_3=.01, T_1=.1, T_2=.2$

$$\frac{1}{(1 + 1/100 s) (1 + 1/10 s) \left| 1 + 2/5 \frac{1}{(1 + 1/100 s) (1 + 1/10 s)} \right|}$$

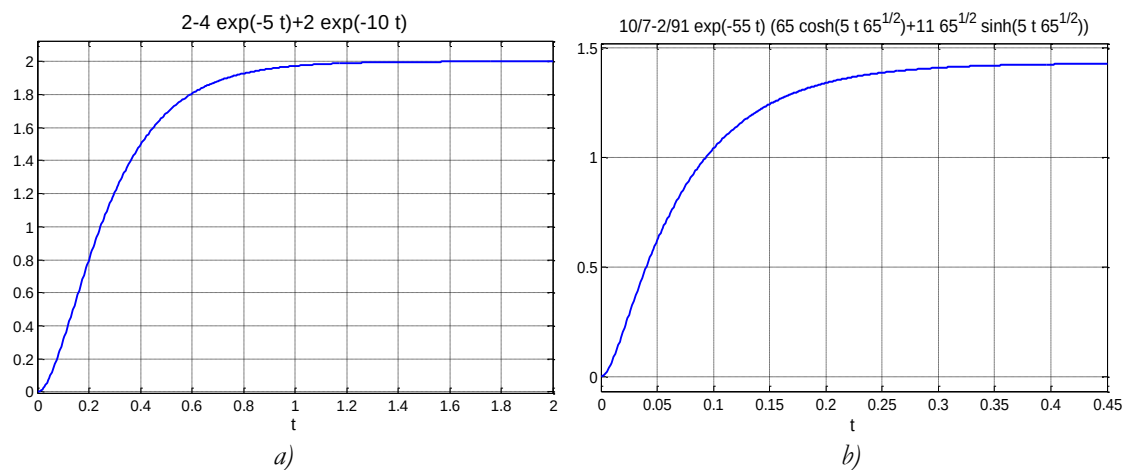
Prechodova charakteristika uzavreteho obvodu:

$$10/7 - 2/91 \exp(-55 t) (65 \cosh(5 t 65^{1/2}) + 11 65^{1/2} \sinh(5 t 65^{1/2}))$$

čo zodpovedá časovej funkcii:

$$h(t) = 10/7 - 2/91 e^{-55t} (65 \cosh(5 \sqrt{65} t) + 11 \sqrt{65} \sinh(5 \sqrt{65} t))$$

Výsledné prechodové charakteristiky pre zvolené parametre sú zobrazené na Obr. 11.5.



Obr. 11.5 Prechodové charakteristiky sústavy ku Príkladu 8: a) figure (1), b) figure (2)

Príklad 7: Podobne, ako v predchádzajúcom prípade sú dve sústavy I. rádu v sérii s proporcionálnou spätnou väzbou z výstupu na vstup. Zostavíme stavový model a prenos vypočítame pomocou známeho vzťahu $F(s) = \mathbf{c}^T (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$. Výpis programu je nasledovný:

```
clc, clear
syms K1 K2 K3 T1 T2 s
I=[1 0; 0 1];
A=[-1/T1 -K1*K3/T1; K2/T2 -1/T2]
b=[K1/T1; 0]
cT=[0 1]
Inv=inv(s*I-A);
F=cT*Inv;
F=F*b;
disp('Prenosova funkcia:'), pretty (F)
F=subs(F,{K1,K2,T1,T2,K3},{1,2,.01,1,.2});
disp('Prenosova funkcia pre parametre: K1=1, K2=2, K3=.01, T1=.1, T2=.2:'), pretty (F)
ft=ilaplace(F/s);
disp('Prechodova charakteristika uzavreteho obvodu:'), pretty (ft)
ezplot(ft,[0, 0.4]),grid
```

Výpis výsledkov je nasledovný:

```
A =
[ -1/T1, -K1*K3/T1]
[  K2/T2,  -1/T2]
```

```
b =
K1/T1
0
```

```
cT =
0 1
```

Prenosova funkcia:

$$\frac{K_2 K_1}{1 + s T_2 + s T_1 + s T_1 T_2 + K_1 K_3 K_2}$$

Prenosova funkcia pre parametre: K1=1, K2=2, K3=.01, T1=.1, T2=.2:

$$\frac{2}{7/5 + \frac{11}{100} s + \frac{2}{1000} s^2}$$

Prechodova charakteristika uzavreteho obvodu:

$$10/7 - 2/91 \exp(-55 t) \left(65 \cosh\left(5 t \sqrt{65}\right) + 11 \sqrt{65} \sinh\left(5 t \sqrt{65}\right) \right)$$

čo zodpovedá tej istej časovej funkcii, ako v predchádzajúcom prípade a dostávame aj rovnaký grafický výstup (prechodová charakteristika na Obr. 11.4b).

V uvedených príkladoch treba vhodne zvoliť časovú mierku riešenia a zobrazenia v inštrukcii **ezplot**. Volíme ju tak, aby sme veľmi nepredlžovali ustálený stav; ináč dostávame nesprávne výsledky.

11.4 Riešenie diferenciálnych rovníc symbolickým počtom

Symbolickým počtom možno riešiť tiež diferenciálne rovnice [64]. Syntax je:

dsolve (rovnica, podmienka)

kde pod podmienkou máme na mysli hraničnú alebo počiatočnú podmienku. Derivácia sa zapisuje písmenom D, za ktorým nasleduje číslo označujúce poradie derivácie. Napr Dy reprezentuje dy/dx , D2y predstavuje $\frac{d^2y}{dx^2}$, atď.

Príklad 1: Štandardný prenos kmitavej sústavy II. rádu je:

$$F(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_o^2} s^2 + 2d\omega_o s + 1} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Tomu zodpovedá diferenciálna rovnica v tvare

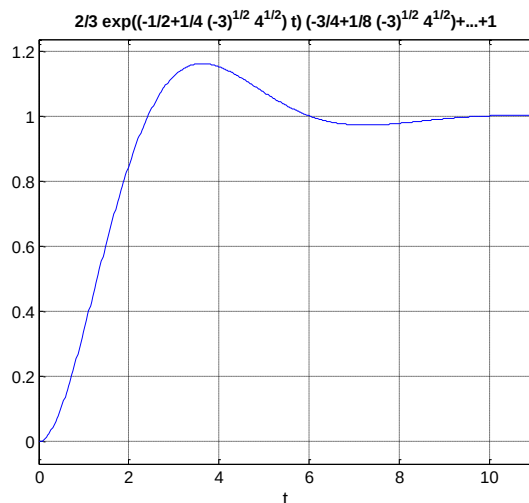
$$\frac{1}{\omega_o^2} \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{2d}{\omega_o} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

Vyriešme túto diferenciálnu rovnicu s nulovými počiatočnými podmienkami (tak je definovaný prenos) a zobrazme riešenie pre parametre $d = 0,5$ a $\omega_o = 10$ rad/s na skokový vstupný signál.

Riešenie: $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2d\omega_o \frac{dy(t)}{dt} + \omega_o^2 y(t) = u(t)$

```
>> syms d w0
>> z=dsolve('D2y+2*d*w0*Dy+w0^2*y=1','y(0)=0','Dy(0)=0')
z =
-1/2*exp(-(d-(d^2-1)^(1/2))*w0*t)*(d^2-1+d*(d^2-1)^(1/2))/(d^2-1)/w0^2-
1/2*exp(-(d+(d^2-1)^(1/2))*w0*t)*(d^2-d*(d^2-1)^(1/2)-1)/(d^2-1)/w0^2+1/w0^2
>> x=subs(z,{d,w0},{0.5,1})
x =
2/3*exp((-1/2+1/4*(-3)^(1/2))*4^(1/2))*t)*(-3/4+1/8*(-
3)^(1/2)*4^(1/2))+2/3*exp((-1/2-1/4*(-3)^(1/2))*4^(1/2))*t)*(-3/4-1/8*(-
3)^(1/2)*4^(1/2))+1
>> ezplot(x,[0,11])
>> grid
```

Priebeh prechodovej charakteristiky je na Obr. 11.6.



Obr. 11.6 Priebeh riešenia diferenciálnej rovnice II. rádu pre $d = 0.5, \omega = 1 \text{ rad/s}$

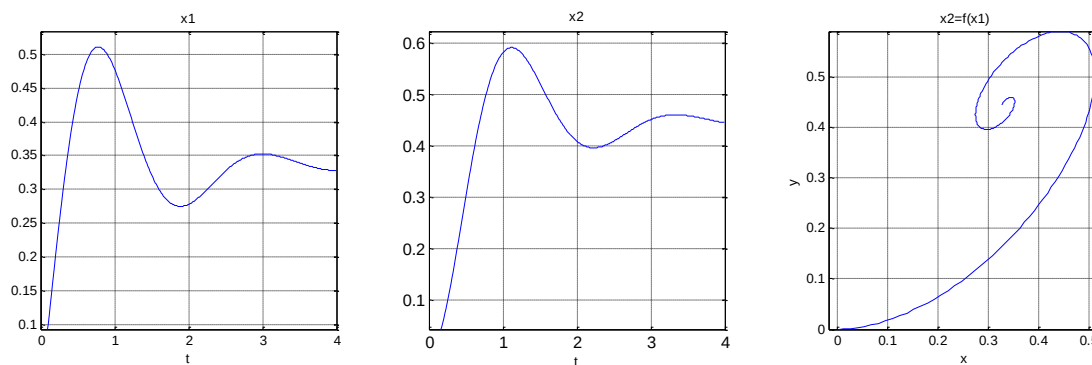
Príklad 2: Symbolické riešenie lineárneho stavového modelu s dvoma stavovými veličinami a nulovými počiatočnými podmienkami:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Najprv vypočítame vlastné hodnoty systému, aby sme zistili, či systém je stabilný. Po riešení dvoch diferenciálnych rovníc prvého rádu zobrazíme závislosti $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_2(t) = f[x_1(t)]$:

```
>> eig([1 -3; 4 -3])
ans =
-1.0000 + 2.8284i
-1.0000 - 2.8284i
>> [x1,x2]=dsolve('Dx1=1*x1-3*x2+1','Dx2=4*x1-3*x2','x1(0)=0,x2(0)=0')
x1 =
1/3+exp(-t)*(1/6*sin(2*2^(1/2)*t)*2^(1/2)-1/3*cos(2*2^(1/2)*t))
x2 =
4/9+2/3*exp(-t)*(-1/6*sin(2*2^(1/2)*t)*2^(1/2)-2/3*cos(2*2^(1/2)*t))
>> subplot (131), ezplot(x1,[0,5]), grid, title('x1')
>> subplot (132), ezplot(x2,[0,5]), grid, title('x2')
>> subplot (133), ezplot(x1,x2,[0,4]), grid, title ('x2=f(x1)')
```

Vlastné hodnoty systému sú komplexne združené so zápornou reálnou časťou, teda systém je stabilný. Priebeh stavových veličín je zobrazený v grafoch na Obr. 11.7.



Obr. 11.7 Priebeh stavových veličín stavového modelu systému

11.5 Modelovanie diskretných systémov

11.5.1 Konverzia spojitého systému na diskretný systém

Ak poznáme priamo opis diskretného systému, či už vo forme stavového modelu, alebo prenosovej funkcie, zadávame ho priamo do MATLABu. Ak poznáme opis spojitého dynamického systému, potom diskretizáciu vykoná priamo MATLAB.

Prehľad základných inštrukcií v MATLABe pre diskretizáciu systémov

Pre prácu s diskretnými systémami v MATLABe používame základné funkcie, ktorých význam je uvedený v Tab. 11.2.

Tab. 11.2 Základné inštrukcie v MATLABe pre prácu s diskretnými systémami

Inštrukcia	Popis
c2d	Konverzia spojitého systému na diskretný
d2c	Konverzia diskretného systému na spojitý
d2d	Prevzorkovanie diskretného systému

Pre konverziu spojitého systému na diskretný používame inštrukciu **c2d(sys,Ts)**, pričom **Ts** je doba vzorkovania, reps. **c2d(sys,Ts,metóda)**, čo umožňuje podľa charakteru zadania využívať niektorú z diskretizačných a interpolačných metód, ako je to uvedené v Tab. 11.3. Pod parametrom sys môžeme zadať prenosovú funkciu, alebo stavový popis systému.

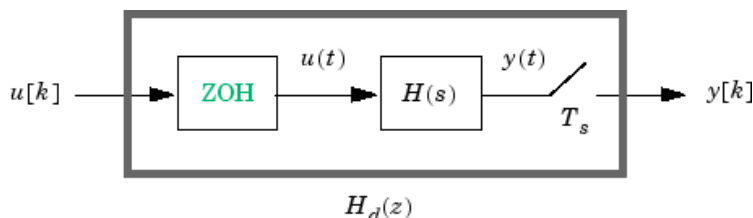
Tab. 11.3 Prehľad diskretizačných metód

Diskretizačná metóda	Význam	Použitie
'zoh' zero-order hold	pomocou tvarovacieho člena nultého rádu	Presná diskretizácia stupňovitého vstupného signálu.
'foh' first-order hold	pomocou tvarovacieho člena prvého rádu	Presná diskretizácia po častiach lineárneho vstupného signálu.
'imp' impulse-invariant mapping	Impulse-Invariant Mapping (iba c2d)	Presná diskretizácia impulzných signálov vstupného signálu..
'tustin'	Tzv. Tustinova aproximácia	Aproximácia vo frekvenčnej oblasti medzi spojitými a diskretnými systémami, obzvlášť vhodná pre zadanú frekvenciu.
'matched' zero-pole matching equivalents	metóda porovnávania núl a pólov	Dobrá aproximácia SISO modelov spojitých a diskretných systémov.

Podobné metódy (okrem **'imp'**) sa používajú pre spätnú transformáciu diskretného systému s prenosom $H_d(z)$ na spojitý systém s prenosom $H(s)$ použijeme inštrukciu **d2c** konverziu diskretného systému na spojitý pomocou inštrukcie **d2c**.

Konverzia pomocou tvarovacieho člena nultého rádu ('zoh')

Metóda ZOH poskytuje presnú zhodu medzi spojitým a diskrétnym systémom v časovej oblasti pre stupňovité vstupné signály. Bloková schéma na Obr. 11.8 ilustruje diskretizáciu spojitého lineárneho modelu s prenosom $H(s)$ na diskrétny model $H_d(z)$.



Obr. 11.8 Bloková schéma tvarovacieho člena nultého rádu (ZOH)

Blok ZOH generuje spojitý vstupný signál $u(t)$ pomocou jeho udržiavania na konštantnej hodnote $u(k)$ počas doby periódy vzorkovania:

$$u(t) = u[k] \quad \text{pre } kT_s \leq t \leq (k+1)T_s \quad (11.1)$$

Signál $u(t)$ predstavuje vstup do spojitého systému s prenosom $H(s)$. Výstupný signál $y[k]$ dostaneme zo vzorkovania signálu $y[t]$ vždy po dobe T_s .

Uvedená transformácia (ZOH) má nasledovné obmedzenia:

- Pomocou inštrukcie **d2c** nemožno konvertovať lineárne časovo-invariantné modely (LTI), ktoré majú pól v bode $z = 0$.
- Pre diskrétny časovo invariantný model so zápornými reálnymi pólmi, konverzia pomocou **d2c** vedie na spojitý systém vyššieho rádu. Rád modelu sa zvýši v dôsledku faktu, že záporný reálny pól v z oblasti sa mapuje na čistú imaginárnu hodnotu v s oblasti, čo vedie na spojitý model s komplexnými koeficientmi. Aby sa tomu predišlo, softvér miesto jedného pólu zavedie dvojicu komplexne združených pólů v s oblasti.

Konverzia pomocou tvarovacieho člena prvého rádu ('foh')

Metóda **'foh'** transformuje spojitý systém na diskrétny v prípade, ak počas doby vzorkovania je na vstupe lineárny signál, t.j. spojitý signál sa linearizuje po častiach s danou dobou vzorkovania T_s :

$$u(t) = u[k] + \frac{t - kT_s}{T_s} u[k+1] - u[k] \quad \text{pre } kT_s \leq t \leq (k+1)T_s \quad (11.2)$$

Pre hladké vstupné signály táto metóda dáva presnejšie výsledky ako **'zoh'**

Tustinova bilinéarna aproximácia ('tustin')

Tustinova alebo bilinéarna aproximácia sa vykonáva na základe diskrétného ekvivalentu integračného pravidla lichobežníkovej metódy/bilinéarnej transformácie podľa Tustina a je založená na vzťahu medzi „ s “ a „ z “ oblasťou:

$$z = e^{sT_s} = \frac{1 + sT_s/2}{1 - sT_s/2} \quad (11.3)$$

Pri konverzii **c2d** diskrétnu prenosovú funkciu $H_d(z)$ zo spojitý $H(s)$ dostaneme transformáciou:

$$H_d(z) = H(s') \quad s' = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} \quad (11.4)$$

A podobne konverzii **d2c** zodpovedá inverzná transformácia:

$$H(s) = H_d(z') \quad z' = \frac{1 + sT_s/2}{1 - sT_s/2} \quad (11.5)$$

Pri konverzii stavového modelu pomocou Tustinovej metódy sa stavové veličiny nezachovávajú (MATLAB si generuje nové stavové veličiny).

Metóda porovnávania núl a pólov ('matched')

Póly a nuly spojitého a diskrétného systému sú viazané transformačným vzťahom:

$$z_i = e^{s_i T_s} \quad (11.6)$$

kde s_i je i -tý pól alebo nula diskrétného systému a s_i je i -tý pól alebo nula diskrétného systému.

Metóda je vhodná iba pre SISO systémy.

Príklad 1: Diskretizácia prenosovej funkcie

$$H(s) = \frac{s-1}{s^2 + 4s + 5}$$

s dobou vzorkovania 0,1 s a 0,25 s. Pri použití metódy 'foh'

```
>> H = tf([1 -1], [1 4 5]); Hd1 = c2d(H, 0.1, 'foh'), Hd2 = c2d(H, 0.25, 'foh')
```

Transfer function:

0.04226 z^2 - 0.01093 z - 0.03954

z^2 - 1.629 z + 0.6703

Sampling time: 0.1

Transfer function:

0.08163 z^2 - 0.05094 z - 0.06919

z^2 - 1.175 z + 0.3679

Sampling time: 0.25

```
>> step(H), hold on, step(Hd1), step(Hd2)
```

Prechodové charakteristiky sú zobrazené na Obr. 11.9a.

```
>> H = tf([1 -1], [1 4 5]); Hd1 = c2d(H, 0.1, 'zoh'), Hd2 = c2d(H, 0.25, 'zoh')
```

Transfer function:

0.07736 z - 0.08557

z^2 - 1.629 z + 0.6703

Sampling time: 0.1

Transfer function:

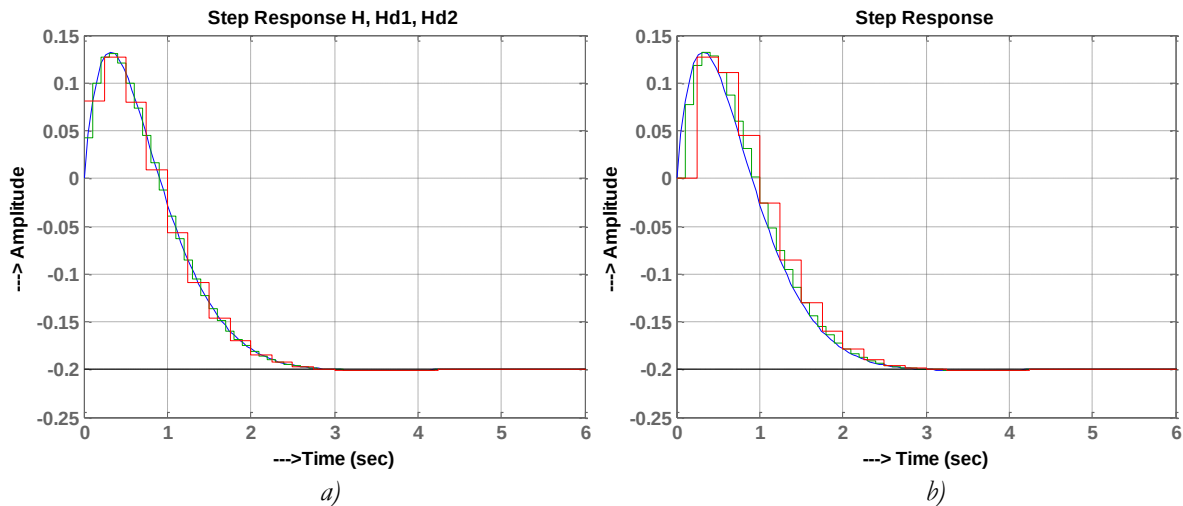
0.1276 z - 0.1661

z^2 - 1.175 z + 0.3679

Sampling time: 0.25

```
>> step(H),hold on,step(Hd1),step(Hd2)
```

Prechodové charakteristiky sú zobrazené na Obr. 11.9b. Máme pmožnosť porovnať diskretizáciu pomocou oboch metód 'foh' a 'zoh'.



Obr. 11.9 Časová ododzva spojitého systému a diskrétného ekvivalentu so vzorkovaním 0,1s a 0,25 s pri aplikácii metódy a) 'foh'; b) 'zoh'

Príklad 2: Vytvorme stavový model sys z prenosovej funkcie z Príkladu 1, zostavme diskrétny model sysd1 pre dobu vzorkovania 0,1 s a tento prevzorkujme na diskrétny model sysd2 s dobou vzorkovania 0.25 s.

```
>> sys = ss(tf([1 -1], [1 4 5]))
sysd1=c2d(sys,0.1)
sysd2=d2d(sysd1,0.25)
step(sys),hold on,step(sysd1),step(sysd2),grid
legend('sys','sysd1...0.1 s','sysd2...0.25 s')

a =
    x1    x2
    x1    -4    -2.5
    x2     2     0

b =
    u1
    x1    1
    x2    0

c =
    x1    x2
    y1     1    -0.5

d =
    u1
    y1    0
```

Continuous-time model.

```
a =  
      x1    x2  
x1  0.6512 -0.2043  
x2  0.1635  0.9781
```

```
b =  
      u1  
x1  0.08174  
x2  0.008754
```

```
c =  
      x1    x2  
y1   1 -0.5
```

```
d =  
      u1  
y1   0  
Sampling time: 0.1  
Discrete-time model.
```

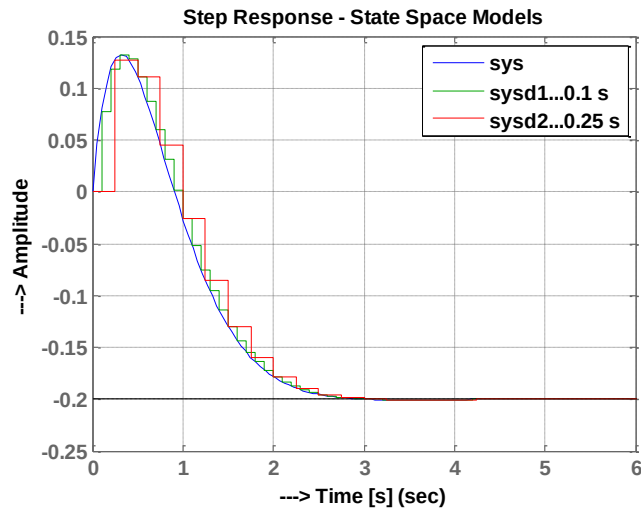
```
a =  
      x1    x2  
x1  0.2876 -0.3751  
x2  0.3001  0.8878
```

```
b =  
      u1  
x1  0.1501  
x2  0.04488
```

```
c =  
      x1    x2  
y1   1 -0.5
```

```
d =  
      u1  
y1   0  
Sampling time: 0.25  
Discrete-time model.
```

Výsledok je zobrazený na Obr. 11.10. Pri riešení MATLAB implicitne zvolil 'zoh' metódu.



Obr. 11.10 Časové ododzvy spojitého a diskrétnych systémov ekvivalentných ku Obr. 11.9

Príklad 3: Zostavte program pre nasledovné zobrazenie diskkrétnej prenosovej funkcie: ´

$$H(z) = \frac{2 + 3z^{-1} + 4z^{-2}}{1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3}} = \frac{2z^2 + 3z + 4}{z^3 + 3z^2 + 3z + 1}$$

```
>> b = [2 3 4]; a = [1 3 3 1]
q = roots(b), p = roots(a)    % pôvodný tvar prenosovej funkcie
k = b(1)/a(1)                % zosilnenie
bb = k*poly(q), aa = poly(p) % nový tvar

q =
-0.7500 + 1.1990i
-0.7500 - 1.1990i

p =
-1.0000 + 0.0000i
-1.0000 - 0.0000i
-1.0000

k =
2

bb =
2.0000 3.0000 4.0000

aa =
1.0000 3.0000 3.0000 1.0000

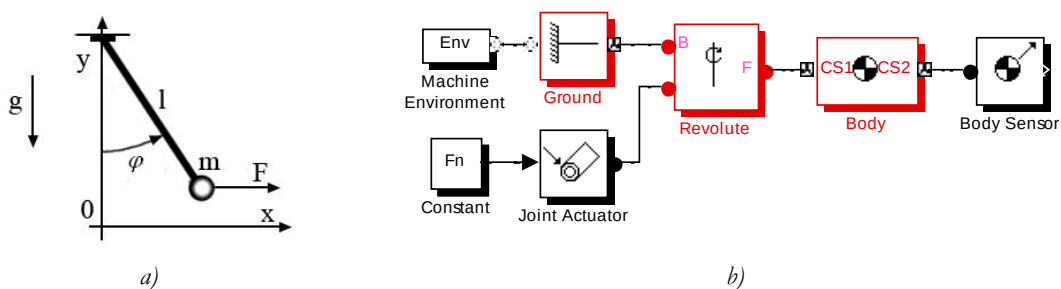
>> printsys(b,a,'z')

num/den =
    2 z^2 + 3 z + 4
-----
    z^3 + 3 z^2 + 3 z + 1
```

12 ZOSTAVOVANIE MODELOV MECHANICKÝCH SYSTÉMOV V PROGRAME SIMMECHANICS

Program SimMechanics je rozšírením programu Simulink z radu modelovacích nástrojov postavených na platforme Simscape, ktorý je určený na fyzikálne modelovanie mechaniky viachmotnostných telies. Obsahuje knižnice blokov, ktoré odpovedajú jednotlivým častiam mechanizmov. Môžeme ním modelovať zložité trojrozmerné mechanické sústavy, ktoré sú súčasťou väčšiny zariadení. Telesá modelu opisujeme podľa ich fyzikálnych vlastností hmotnosť, zotrvačnosť, poloha, orientácia spájame ich väzbami, pridávame im stupne voľnosti, pôsobíme na ne silou a pod. Takto môžeme jednoducho vytvárať grafickú reprezentáciu zložitých mechanických sústav, napojovať na okolité prostredie i na riadiaci systém modelovaný v Simulinku. Tu sa však bloky nespájajú spojovacími linkami, pri ktorých smer toku signálu je jednoznačne určený. Pracuje sa s fyzikálnymi signálmi, ktoré určujú vzájomné pôsobenie dvoch telies. Z tohto dôvodu sa signály z programu SimMechanics prevádzajú na štandardné signály v Simulinku pomocou senzorov a naspäť do prostredia SimMechanics pomocou akčných členov. Takto môžeme simulovať vzájomné pôsobenie mechanických častí s riadiacim systémom.

Výhoda fyzikálneho modelovania viachmotnostných systémov oproti štandardnému postupu riešenia pohybových rovníc v Simulinku spočíva v automatickom vytváraní dynamického modelu mechanického systému na základe geometrie modelu, pričom tento model v SimMechanics možno priamo prepojiť na modely Simulinku. Tým sa znižuje pravdepodobnosť chyby pri modelovaní zložitých systémov, zvýši sa prehľadnosť modelu a v prípade zmien v systéme nie je potrebné opätovné zostavenie modelu. Pre porovnanie sme zostavili model jednoduchého kyvadla (Obr. 12.1) pomocou Lagrangeových rovníc druhého druhu a pomocou programu SimMechanics (odvodenie vzťahov potrebných na vytvorenie matematického modelu tu neuvádzame, nakoľko úlohou práce je modelovanie pomocou SimMechanics a tento príklad je iba ukážkový, čo ale dostatočne prezentuje, že aj na odvodenie pohybovej rovnice jednoduchého kyvadla s jedným stupňom voľnosti, bez uvažovania tlmenia potrebujeme zostaviť diferenciálnu rovnicu druhého rádu).



Obr. 12.1 Jednoduché kyvadlo (a) a jeho model v prostredí SimMechanics

Matematický model v tvare diferenciálnych rovníc predstavuje nelineárny dynamický systém II. rádu:

$$\ddot{\varphi} = \frac{F - b\dot{\varphi} - mgl\varphi}{ml^2} \quad (12.1)$$

$$x = l \sin \varphi \quad (12.2)$$

$$y = l(1 - \cos \varphi) \quad (12.3)$$

Ekvivalentná schéma v prostredí SimMechanics je zobrazená na Obr. 12.1. Samotný systém v prostredí SimMechanics je označený červenou farbou, ostatné bloky sú iba senzory, akčné členy dopĺňujú “prostredie” programu. Pri zostavení modelu teda nie je potrebná znalosť metód na vytváranie rovníc ako ani samotné rovnice, SimMechanics si ich podľa topológie zostaví sám.

12.1 Prehľad blokov programu SimMechanics

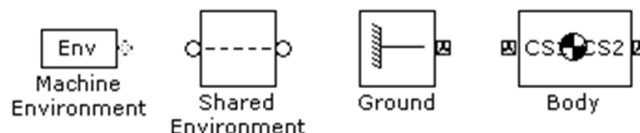
Bloky SimMechanics sa rozdeľujú do siedmich základných skupín (Obr. 12.2). Vysvetlíme si tu iba niektoré skupiny a ich najdôležitejšie bloky potrebné pre pochopenie princípu modelovania. Kvôli možnostiam aplikácie v laboratóriu výklad obmedzíme na verziu SimMechanics 2.7.



Obr. 12.2 Skupiny blokov programu SimMechanics 2.7

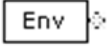
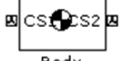
12.1.1 Skupina blokov Bodies

V skupine blokov *Bodies* (Obr. 12.3) okrem samotného bloku *Body*, ktoré reprezentuje pevné telesá, nájdeme bloky *Machine Environment*, ktorým definujeme prostredie modelu a blok *Ground*, ktorý predstavuje nepohyblivý bod). Popis je uvedený v Tab. 12.1.



Obr. 12.3 Bloky skupiny *Bodies*

Tab. 12.1 Popis najpoužívanějších blokov skupiny blokov *Bodies*

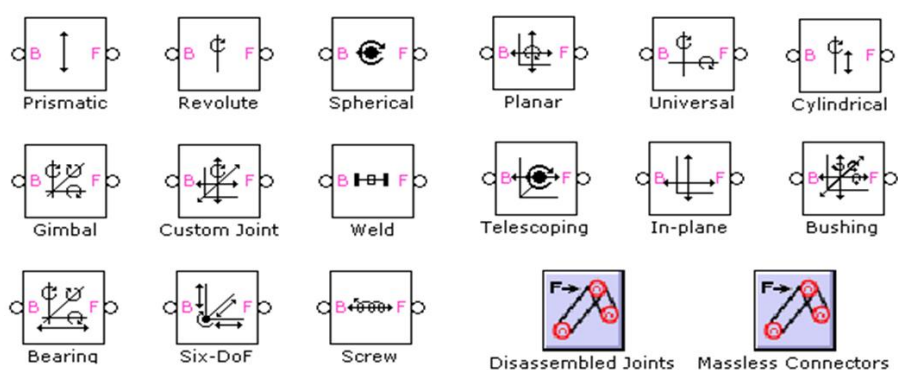
 Machine Environment	Blokom <i>Machine Environment</i> definujeme prostredie, v ktorom sa systém nachádza. Každý systém musí mať práve jeden taký blok spojený s blokom <i>Ground</i>. V tomto okne sa nastavujú presnosti výpočtu a parametre prostredia či typ analýzy. Typy analýz v SimMechanics Pri modelovaní v SimMechanics si musíme zvoliť vhodný typ analýzy podľa toho, čo s modelom plánujeme vykonať: • Priama dynamika (<i>Forward Dynamics</i>). V tomto móde program vypočíta hodnoty polôh a rýchlostí v každom časovom okamihu na základe počiatočných podmienok a silového pôsobenia v systéme. • Linerizácia (<i>Forward Dynamics</i>). V tomto móde prebehne linearizácia systému do stavového priestoru. Linearizácia sa vykonáva pomocou príkazu <code>linmod</code> z prostredia MATLAB-u. • Trimming (<i>Trimming</i>). V tomto móde nájdeme rovnovážny stav systému pomocou príkazu <code>trim</code> z prostredia MATLABu. • Inverzná dynamika (<i>Inverse Dynamics</i> pre otvorenú slučku a <i>Kinematics</i> pre uzavretú slučku). V tomto móde SimMechanics vypočíta sily potrebné pre vykonanie vopred nadefinovaného pohybu kinematickým budením.
 Ground	Blok <i>Ground</i> v prostredí SimMechanics reprezentuje nepohyblivý bod nekonečnej hmotnosti. Môžeme si to predstaviť napríklad ako podlahu, na ktorej je pripevnený zariadenie. V každom mechanickom systéme musí existovať jeden blok <i>Ground</i> spojený s blokom <i>Machine Environment</i>. Môžeme však pridávať ďalšie bloky <i>Ground</i> s inými súradnicami, tie sa však už s <i>Machine Environment</i> nespájajú.
 Body	Blokom <i>Body</i> v SimMechanics nahrádzame všetky pevné, tuhé telesá, medzi ktoré potom pridávame stupne voľnosti. Telesá sú definované ich konečnými a nenulovými hmotnosťami, zotrvačnosťami, pozíciami, smermi a k nim pripojenými súradnicovými systémami.

12.1.2 Skupina blokov Joints

Ďalšou veľmi dôležitou skupinou blokov je skupina blokov *Joints* – kĺby (Obr. 12.4). Tieto bloky spájajú bloky typu body a pridávajú im stupne voľnosti, tiež určujú smer a druh pohybu. Na rozdiel od fyzických kĺbov, v SimMechanics sú to bezhmotnostné telesá a nie je nutný ich fyzický kontakt s telesami. *Joints* majú v bloku porty označené ako *B-Base* a *F-Follower*. Znamená to, že *Follower* vykonáva pohyb vzhľadom k *Base*. Bloky typu *Joints* sú tvorené jedným alebo zlúčením viacerých primitív (*Joint Primitives*), ktoré potom tvoria stupne voľnosti.

Druhy primitív:

- *Prismatic* - jeden translačný stupeň voľnosti
- *Revolute* - jeden rotačný stupeň voľnosti
- *Spherical* - tri stupne voľnosti okolo stredného bodu
- *Weld* - zvar, bez stupňa voľnosti



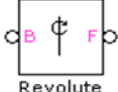
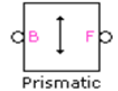
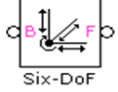
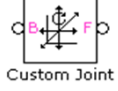
Obr. 12.4 Skupina blokov *Joints*

Bloky typu *Joints* rozdeľujeme do dvoch skupín:

- jednoduchých kĺbov (*Primitive joints*) skladajúcich sa len z jedného primitíva
- zložených kĺbov (*Composite joints*) skladajúcich sa z viacerých primitívov

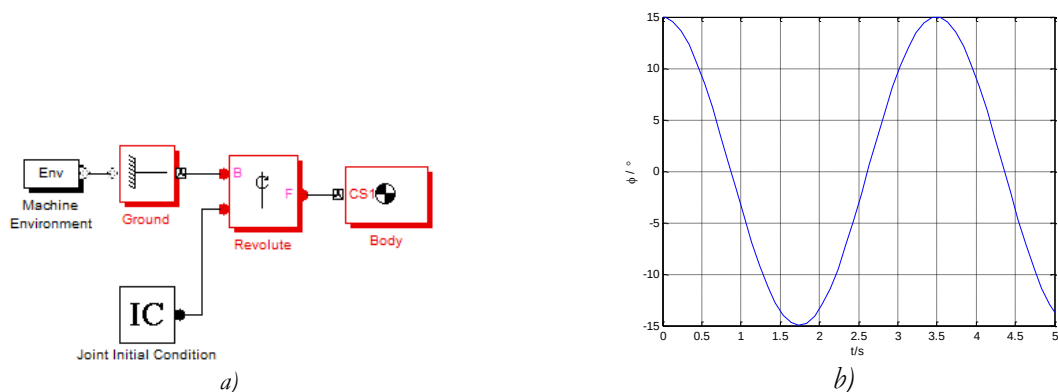
Význam blokov popisujúcich jednoduché kĺby je uvedený v Tab 12.2. Ostatné bloky *Joint* sú viacerou kombináciou týchto základných blokov.

Tab. 12.2 Popis najpoužívanějších blokov skupiny blokov *Joints*

 Revolute	Blok <i>Revolute</i> je jednoduchý kĺb s jedným rotačným stupňom voľnosti okolo zvolenej osi. Aplikácia – pozri Príklad 1.
 Prismatic	Blok <i>Prismatic</i> je jednoduchý kĺb s jedným translačným stupňom voľnosti. V tomto prípade sa pod osou pôsobenia rozumie os, pozdĺž ktorej sa teleso pohybuje.
 Screw	<i>Screw</i> predstavuje skrutku s nastaviteľným stúpaním závitov (thread pitch)
 Six-DoF	<i>Six DOF</i> predstavuje blok, ktorý pridáva telesu všetky stupne voľnosti
 Custom Joint	Blok <i>Custom Joint</i> kĺb si vytvárame sami. Pritom však treba dať pozor na poradie primitív, lebo toto poradie udáva akúsi hierarchiu a pohyb sa vykonáva presne v tom poradí, ako je v zozname.

Príklad 1 (Fyzikálne kyvadlo - bloky Joint, Revolute a Joint Initial Condition)

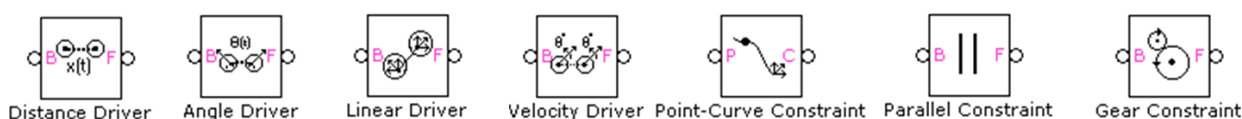
Fyzikálne kyvadlo s jedným stupňom voľnosti dokážeme namodelovať s doteraz uvedenými blokmi SimMechanics. Pozostáva z jedného uzemneného bloku *Joint* a bloku *Body*. Model kyvadla v prostredí SimMechanics je na Obr. 12.5a. Blokom *Joint Initial Condition* nastavujeme počiatočnú polohu a uhlovú rýchlosť kĺbu, pripája sa na port pre senzory a akčné členy. Časový priebeh uhla netlmeného vychýľovania kyvadla bez uvažovania trenia v kĺbe je uvedený na Obr. 12.5b.



Obr. 12.5 Fyzikálne kyvadlo: a) schéma v SimMechanics, b) časový priebeh uhla vychýlenia pri zadaní počiatočnej polohy

12.1.3 Skupina blokov Drivers & Constraints

Blokmi *Drivers & Constraints* (Obr. 12.6) pridávame časovo nezávislé (*Constraints*) a závislé (*Drivers*) obmedzenia v pohybe medzi telesá.



Obr. 12.6 Skupina blokov *Drives & Constraints*

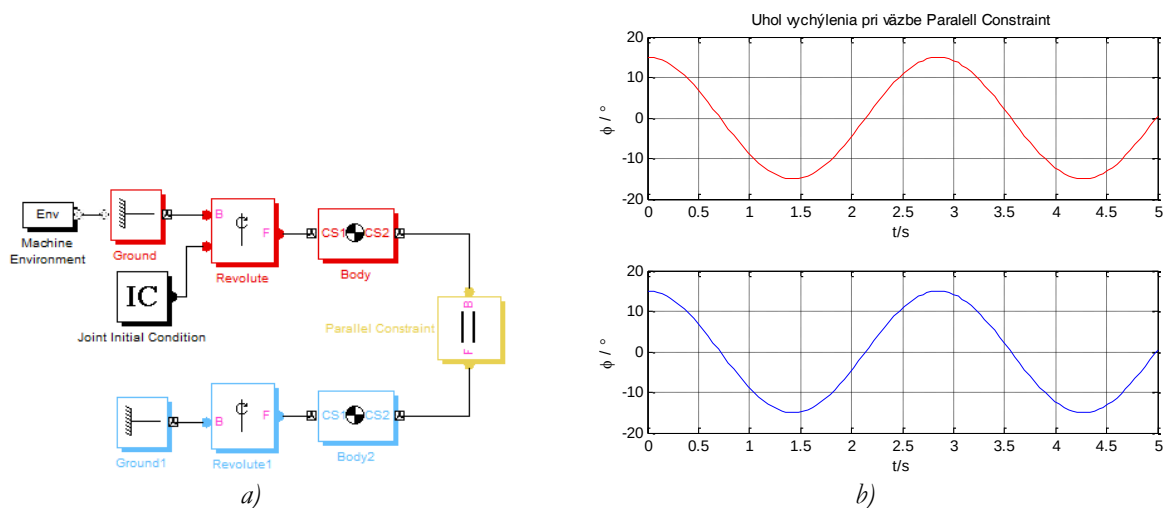
Podobne ako v prípade kĺbov, aj tieto bloky majú porty *Base* a *Follower*. Pri silovom pôsobení na telesá s obmedzením sa telesá môžu pohybovať len v dovolenom smere.

Tab. 12.3 Popis najpoužívanejších blokov skupiny blokov *Drives & Constraints*

 Parallel Constraint	Blokom <i>Parallel Constraint</i> dosiahneme, že vektory osí dvoch telies musia byť rovnobežné. Aplikácia - pozri Príklad 2.
 Gear Constraint	Blokom <i>Gear Constraint</i> vieme pridať prevod medzi dve telesá. V parametroch bloku definujeme polomery rozstupových kružníc ozubených kolies dvoch telies a počet portov pre pripojenie senzorov. Aplikácia - pozri Príklad 3.
 Point-Curve Constraint	Obmedzenie <i>Point-Curve Constraint</i> bodu telesa pripojeného do portu P vymedzuje pohybovať sa po vopred definovanej krivke, ktorá sa pohybuje spoločne s bodom telesa pripojeným do portu C. Aplikácia - pozri Príklad 4.

Príklad 2 (Paralelné fyzikálne kyvadlo s blokom Parallel Constraint)

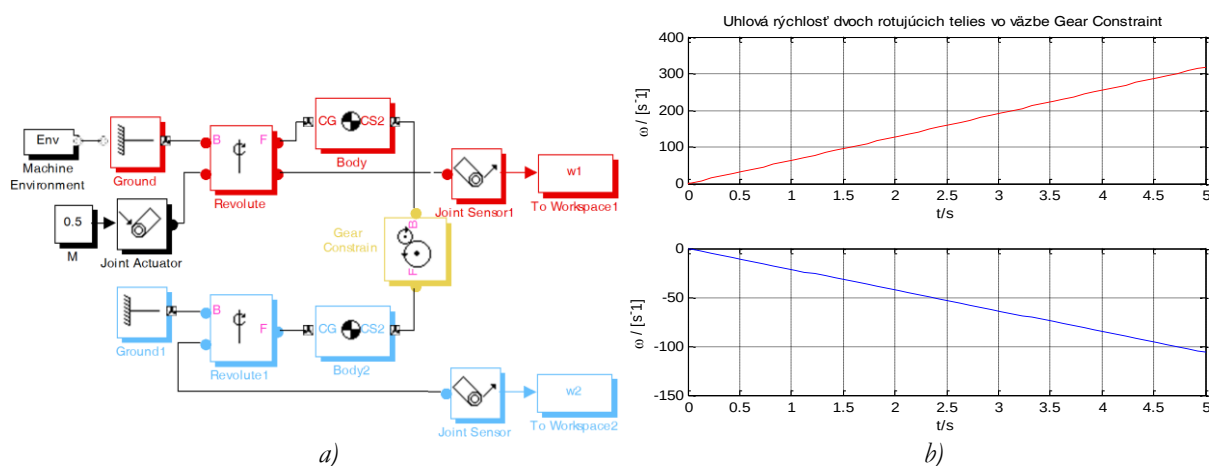
Doplnením fyzikálneho kyvadla z predchádzajúcej úlohy o druhé kyvadlo rovnakých parametrov, medzi ktoré pridáme obmedzenie *Parallel Constraint* získame programovú schému (Obr. 12.7a). V schéme vidíme, že fyzikálne kyvadlo z predchádzajúceho modelu (červené) je doplnené o ďalšie kyvadlo (modré), ktoré má rovnaké parametre, ale nemá blok určujúci jeho počiatočné podmienky. To znamená, že pri simulácii by červené kyvadlo kmitalo, ale modré by bolo v ustálenej polohe, nakoľko by nedošlo k počiatočnému vychýleniu. Ale ak dáme medzi koncové body kyvadiel blok *Parallel Constraint*, to nám zaisťuje, že osi kyvadiel budú rovnobežné a modré kyvadlo bude kmitať synchronne s červeným kyvadlom na Obr. 12.7b.



Obr. 12.7 Dve kyvadlá s obmedzením *Parallel Constraint*: a) Programová schéma v prostredí Sim Mechanics, b) uhol vychýlenia kyvadiel, vo väzbe *Parallel Constraint*

Príklad 3 (Paralelné fyzikálne kyvadlo s blokom Gear Constraint)

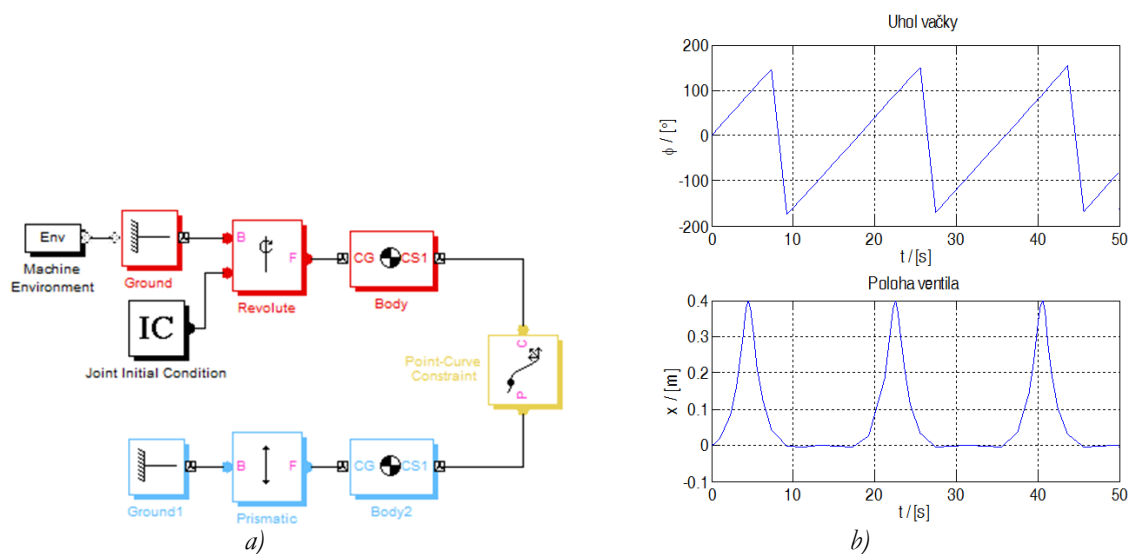
Na Obr. 12.8a vidíme, že programová schéma sa veľmi podobá na schému dvoch kyvadiel s paralelným obmedzením, len tu bolo použitá väzba *Gear Constraint* a táto schéma potrebuje odlišné nastavenia blokov. SimMechanics štandardne neuvažuje straty alebo trenia a platí zákon zotrvačnosti, *Body* sa bude otáčať okolo ťažiska konštantným uhlovým zrýchlením. Nakoľko ide o nesúhlasný prevod do pomaly, tým pádom sa hnacie koleso otáča menšou uhlovou rýchlosťou, úmernou prevodovému pomeru v opačnom smere. Výsledky simulácie sú na obrázku Obr.13.8b



Obr. 12.8 a) Programová schéma prevodu; b) Výsledky simulácie obmedzenia Gear Constraint: hnacie koleso (červená), hnané koleso (modrá)

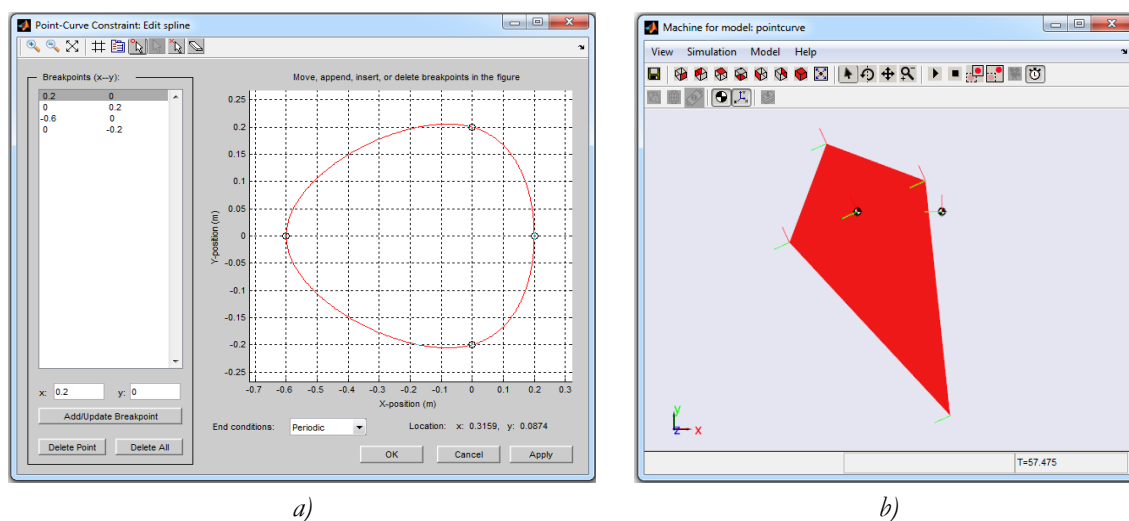
Príklad 4 (Vačkový hriadeľ s blokom Point-Curve Constraint)

Vačkový hriadeľ ovláda pohyb ventilu: vačka sa otáča okolo zvolenej osi a teleso ventilu kopíruje tvar k nej určenej krivky v osi pôsobenia kľbu *Prismatic* (Obr. 12.9).



Obr. 12.9 Programová schéma na použité bloku *Point-Curve Constraint* v systéme vačka - ventil

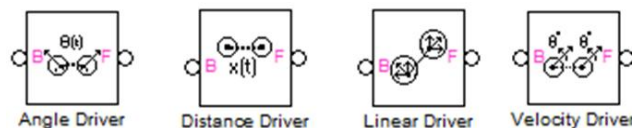
Parametre krivky vačky sa nadeľujú v okne *Edit spline* (Obr. 12.10a). Pre lepšiu názornosť činnosti zariadenia je ju možné doplniť vizualizáciou (Obr. 12.10b), kde sa pridajú pomocné body telesa vačky, ktorý vizualizačný program spojil a vytvoril takzvaný konvexný obal bodov telesa (*Convex hull*), ktorá ohraňuje všetky ostatné body z množiny, čím sa vizualizácia prehľadnejšou.



Obr. 12.10 a) Okno *Edit spline*; b) Vizualizácia pohybu telesa vačky

12.1.4 Skupina blokov Drivers

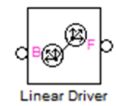
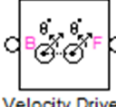
Blokmi *Driver* (Obr. 12.11) môžeme medzi dve telesá pridávať časovo závislé obmedzenie privedením externého signálu zo Simulinku cez *Driver actuator*. Keď sa signál neprivádza, berie sa do úvahy počiatočné, časovo nepremenné nastavenie.



Obr. 12.11 Skupina blokov *Drivers*

VTab. 12.4 je uvedený popis blokov a príklady na použití uvedených blokov sú na Obr. 12.13.

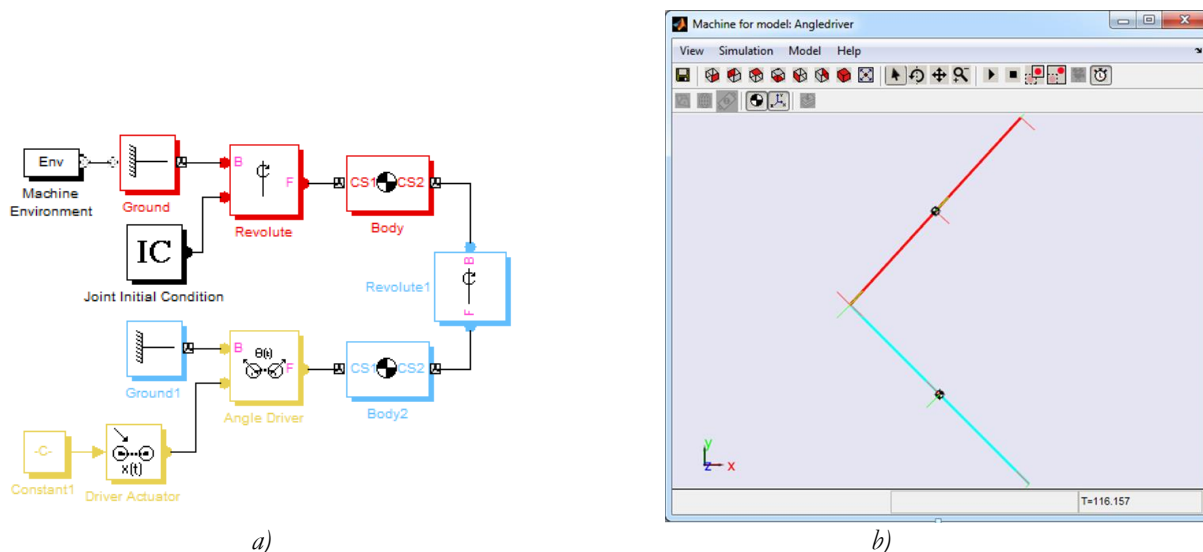
Tab. 12.4 Popis najpoužívanějších blokov skupiny blokov *Drivers*

 Angle Driver	Blokom <i>Angle Driver</i> definujeme uhol medzi základňou - <i>base</i> (B) a ďalším členom v danom súradnicovom systéme - <i>follower</i> (F). Neaktivovaný <i>Angle Driver</i> udržiava uhol zadaný počiatočným stavom. Fixed axes define body axis vectors in base and follower coordinate systems. Aplikácia – pozri Príklad 5.
 Distance Driver	<i>Distance Driver</i> - definuje vzdialenosť medzi dvoma súradnicovými systémami <i>Base</i> a <i>Follower</i> , ktorá môže byť funkciou času.
 Linear Driver	<i>Linear Driver</i> - definuje zložku vektora rozdielu medzi <i>Base</i> a <i>Follower</i> – daným súradnicovým systémom a základným systémom (world system)
 Velocity Driver	<i>Velocity Driver</i> - definujeme ním rýchlosť medzi <i>Base</i> a <i>Follower</i> .

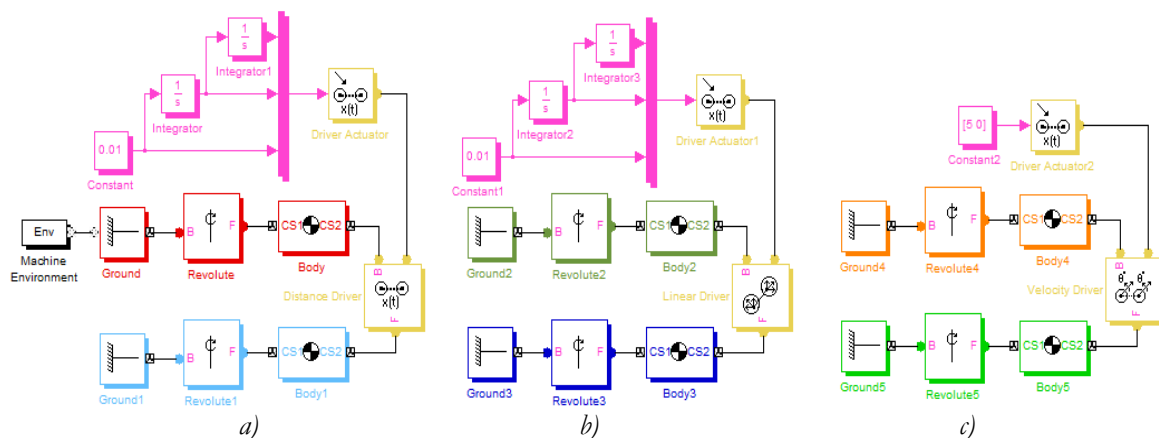
Príklad 5 (Vačkový hriadeľ s blokom *Angle Driver*)

Blok *Angle Driver* v schéme na Obr. 12.12a udržiava konštantný uhol medzi blokmi *Body2 CS1* a *Ground1* stále konštantný, ako to je znázornené na screenshots z vizualizácie na Obr. 12.12b.

Príklady použitia blokov sú uvedené na Obr. 12.13.



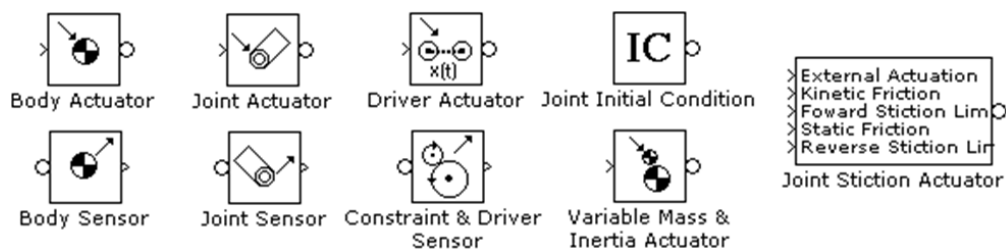
Obr. 12.12 Príklad použitia bloku *Angle Driver*. a) programová schéma; b) vizualizácia



Obr. 12.13 Príklady na použitie blokov: a) *Distance Driver*; b) *Linear Driver*; c) *Velocity Driver*

12.1.5 Skupina blokov Sensors & Actuators

Bloky *Sensors & Actuators* (Obr. 12.14) slúžia na prepojenie blokov SimMechanics so štandardnými blokmi Simulinku. Zo senzorov (*Sensors*) vystupuje signál so zvolenými nameranými veličinami, ktorý vieme zobrazit', prípadne s ním ďalej pracovať v Simulinku.



Obr. 12.14 Skupina blokov *Sensors & Actuators*

Akčnými členmi (*Actuators*) vieme signál Simulinku previesť späť na fyzické pôsobenie telies v SimMechanics. Sensory a akčné členy môžeme pripájať na bloky *Joint*, *Driver* a *Constraint* (iba senzory) do špeciálnych, na to určených, portov. V blokoch *Body* ich pripájame priamo do zvoleného bodu CS. Výstupmi zo senzorov môžu byť polohy, rýchlosti, zrýchlenia reakčné sily a podobne. Akčnými členmi vieme vytvoriť silové pôsobenie v kĺbe alebo v ľubovoľnom bode telesa, prípadne prepnúť akčný člen do módu kinematického budenia a priamo ovládať polohu, rýchlosť a zrýchlenie.

Základný popis blokov ke uvedený v Tab. 12.5.

Tab. 12.5 Popis najpoužívanějších blokov skupiny blokov *Sensors & Actuators*

 Body Sensor	Blokom <i>Body Sensor</i> môžeme merať po pripojení na ľubovoľný CS bloku <i>Body</i> jeho dráhu, rýchlosť a zrýchlenie takisto translačné, tak aj uhlové. Jednotlivé zvolené signály sú vektorové v tvare [x, y, z] okrem rotačnej matice, ktorá vyjadruje zmenu orientácie CS v Priestore, tá je vyjadrená maticou o rozmere [3x3]. Veličiny môžeme snímať vzhľadom na svet alebo vzhľadom na lokálny súradnicový systém. Pri snímaní rýchlosti vzhľadom na lokálny súradnicový systém, dostávame rýchlosť vnímanú vzhľadom na svet prepočítanú na lokálny súradnicový systém.
 Body Actuator	Blokom <i>Body Actuator</i> môžeme pôsobiť silou alebo vytvárať moment na zvolené CS bloku <i>Body</i>. Vstupný signál musí byť vektor udávajúci smer pôsobenia síl, prípadne osí, okolo ktorých sa vytvára točivý moment na osi sveta alebo <i>Body CS1</i> ([F_x F_y F_z],[M_x M_y M_z]).

 Joint Sensor	Blokem <i>Joint Sensor</i> môžeme po prepojení na kĺb merať jeho dráhu, rýchlosť a zrýchlenie, prípadne uhol, uhlovú rýchlosť alebo uhlové zrýchlenie v závislosti od zvoleného druhu primitíva. Môžeme získavať aj hodnoty vypočítaných síl a momentov, ktorými kĺb pôsobí ako aj hodnoty reakčných síl a momentov meraných na Base alebo Follower.
 Joint Actuator	Blok <i>Joint Actuator</i> môže pracovať v dvoch režimoch (Actuate with) a to: silové pôsobenie (<i>Generalized forces</i>) a kinematické budenie (<i>Motion</i>). Pri silovom pôsobení privádzame skalár sily alebo momentu v závislosti od typu primitíva na blok <i>Joint Actuator</i> . V prípade kinematického budenia privádzame na akčný člen signál tvaru $[x \ v \ a]$, prípadne $[\varphi \ \omega \ \epsilon]$ ak pôjde o rotačné primitívum, ktorým definujeme v čase dráhu, rýchlosť a zrýchlenie (uhol, uhlovú rýchlosť a uhlové zrýchlenie). Tieto veličiny však so sebou úzko súvisia preto nemôžeme privádzať ľubovoľné signály. Platí: $v = \frac{dx}{dt}, a = \frac{dv}{dt}, (\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \epsilon = \frac{d\omega}{dt})$
 Constraint & Driver Sensor	Blokem <i>Constraint & Driver Sensor</i> môžeme merať reakčné sily v obmedzeniach na Base alebo na Follower v závislosti od zvoleného súradnicového systému.
 Driver Actuator	Blokem <i>Driver Actuator</i> sme sa stretli už v kapitole <i>Drivers</i> , dokážeme nim nastaviť hodnotu obmedzenia medzi dvoma blokmi a to aj v závislosti na čase. Ovláda sa rovnako ako <i>Joint Actuator</i> v režime kinematického budenia.
 Variable Mass & Inertia Actuator	Blokem <i>Variable Mass & Inertia Actuator</i> dokážeme meniť parametre hmotnosti a zotrvačnosti bloku <i>Body</i> v závislosti na čase. Typickým príkladom je úbytok paliva.

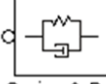
12.1.6 Skupina blokov Force Elements

Bloky *Force Elements* (Obr. 12.15, Tab 12.6) reprezentujú v SimMechanics paralelné spojenie pružiny a tlmiča. Môžeme nimi modelovať napríklad pružné spojenie dvoch telies alebo aj vytváranie torzných momentov.



Obr. 12.15 Skupina blokov *Force Elements*

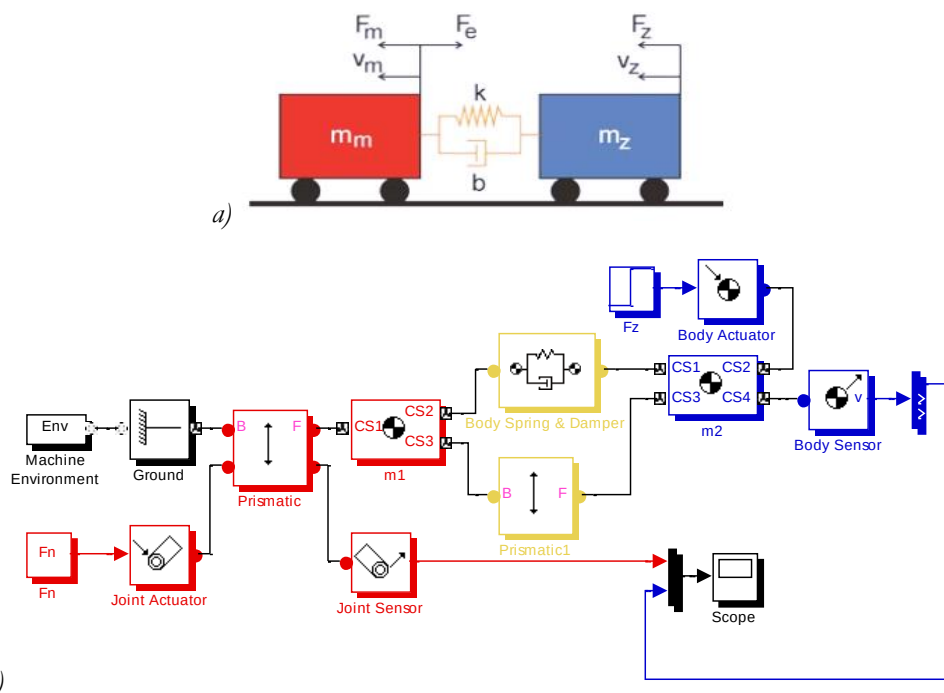
Tab. 12.6 Popis najpoužívanějších blokov skupiny blokov *Force Elements*

 Body Spring & Damper	Blok <i>Body Spring & Damper</i> modeluje silu od pružiny a tlmiča medzi dvoma telesami, ktoré modelujeme pomocou bloku <i>Body</i> . Tento blok nemá žiadny stupeň voľnosti. Blok pripájame paralelne s blokom <i>Prismatic</i> . Aplikácia – pozri Príklad 6.
 Joint Spring & Damper	Blok <i>Joint Spring & Damper</i> slúži na to isté ako blok <i>Body Spring & Damper</i> - modeluje lineárnu tlmenú kmitavú silu, ktorá pôsobí na <i>prismatic primitive</i> , alebo lineárny tlmený kmitavý moment, čo možno využiť napríklad na modelovanie torzného momentu. Pripája sa priamo na <i>Joint Sensor & Actuator port</i> a pre každé zvolené primitívum bloku Joint vytvára pružné spojenie. Aplikácia – pozri Príklad 7.

Príklad 6

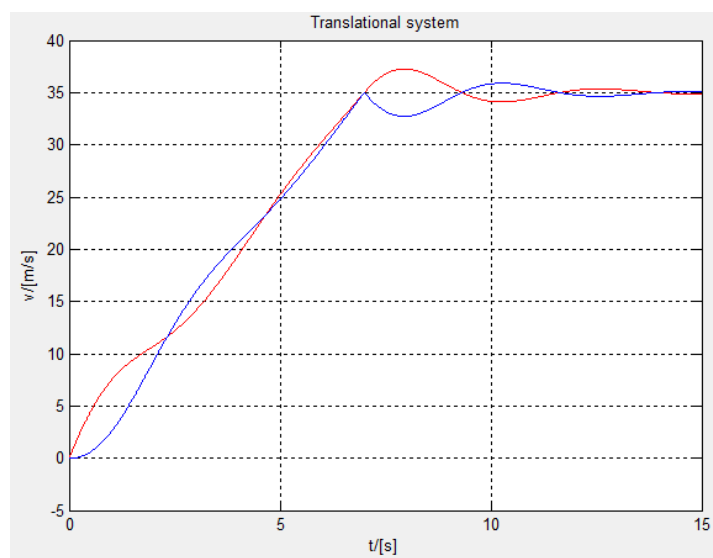
(Dvojhmotnostný traslačný systém s pružným členom - blok Body Spring & Damper)

Takto môžeme modelovať napríklad dva vozíky spojené pružným členom (Obr. 12.16a). Na červený vozík pôsobíme silou F_m a bude sa pohybovať rýchlosťou v_m . Pružným členom je k nemu pripojený modrý vozík, ktorý zatŕžujeme v istom časovom okamihu t silou F_z a má rýchlosť v_z . V pružnom člene vzniká sila F_e (pnutie). Pri prechodových dejoch sa rýchlosti v_m a v_z nerovnajú v dôsledku pružného člena, ale ich časové priebehy tlmené kmitajú okolo priamky. Budeme pozorovať priebehy týchto rýchlostí. Programová schéma v prostredí SimMechanics je nakreslená na Obr. 12.16b.



Obr. 12.16 Dvojhmotnostný traslačný systém: a) kinematická schéma, b) schéma v SimMechanics

V prípade voľby parametrov: $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$, $F_m = 10 \text{ N}$, $F_z = -10 \text{ N}$, $t = 7 \text{ s}$, $k = 1 \text{ N/m}$, $b = 0,4 \text{ Ns/m}$, $t_z = 7 \text{ s}$ (zatŕženie) dostávame priebehy, uvedené na Obr. 12.17.



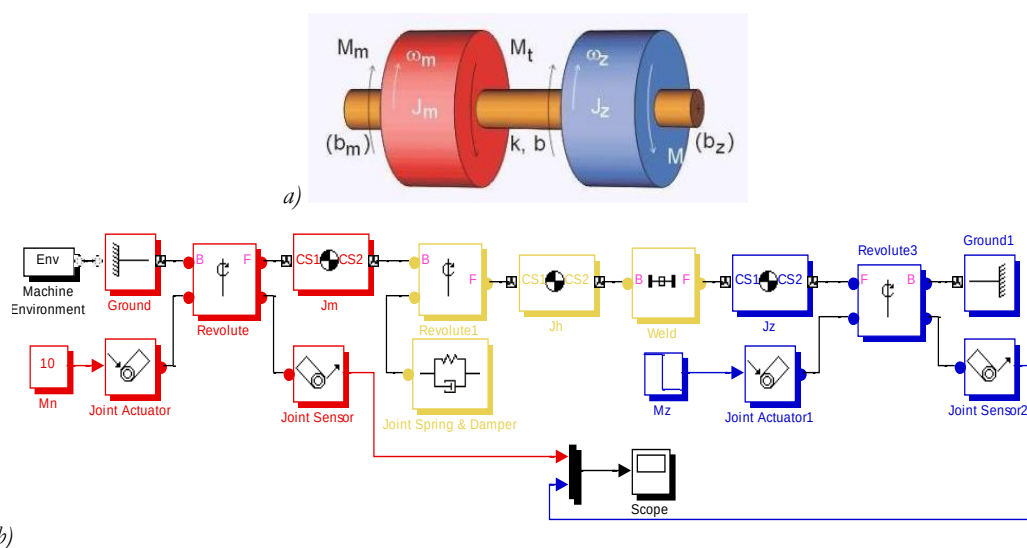
Obr. 12.17 Časové priebehy rýchlostí v_m a v_z jednotlivých vozíkov z Obr. 12.16 pri rozbehu a zatŕžení

Príklad 7

(Dvojhmotnostný rotačný systém s pružným členom - blok Joint Spring & Damper)

Príkladom použitia je motor spojený so záťažou dlhým pružným hriadeľom (Obr. 12.18a). Na rotor budeme pôsobiť momentom M_m a bude sa otáčať uhlovou rýchlosťou ω_m . Pružným hriadeľom je k nemu pripojená záťaž, na ktorý začneme v určitom čase t pôsobiť záťažovým momentom M_z . Záťaž sa bude otáčať uhlovou rýchlosťou ω_z . V pružnom hriadeľi vzniká torzný moment M_t . Pri prechodových dejoch sa rýchlosti ω_m a ω_z nerovnajú v dôsledku pružného hriadeľa, ale ich časové priebehy kmitajú okolo priamky podobne ako v prípade dvojhmotnostného translačného pohybu.

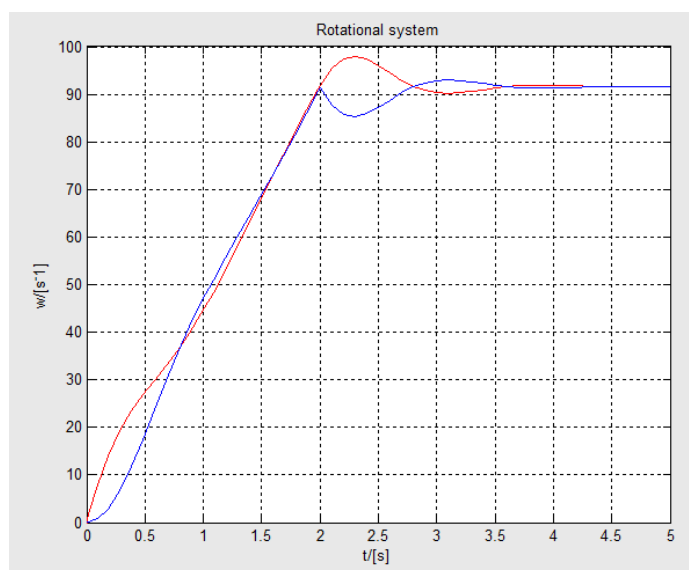
Odpovedajúce programová schéma v programe SimMechanics je na Obr. 12.18b.



Obr. 12.18 Dvojhmotnostný rotačný systém: a) Kinematická schéma; b) Programová schéma v SimMechanics

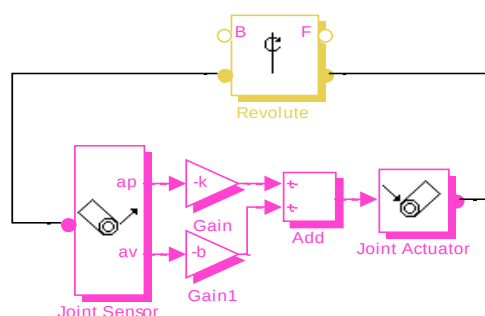
Výsledky simulácie na Obr. 12.19 boli dosiahnuté s nasledovnými parametrami:

$m_1 = 50\text{ kg } (J_m)$, $m_2 = 50\text{ kg } (J_z)$, $m_3 = 5\text{ kg } (J_h)$, $h_1 = 0,05\text{ m}$, $h_2 = 0,05\text{ m}$, $h_3 = 50\text{ m}$, $R_1 = 0,5\text{ m}$, $R_2 = 0,5\text{ m}$, $R_3 = 0,05\text{ m}$, $k = 1\text{ Nm}^{-1}$, $b = 0,2\text{ Nsm}^{-1}$.



Obr. 12.19 Časové priebehy uhlových rýchlostí telies, pre zvolené parametre

Pružné členy môžeme modelovať, aj zavedením spätnej väzby v blokoch typu *Joint* (Obr. 12.20).



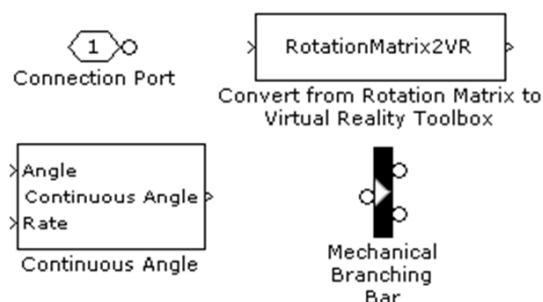
Obr. 12.20 Modelovanie pružného člena pomocou spätnej väzby k bloky typu *Joint*

12.1.7 Ďalšie skupiny blokov

Ide o bloky *Interface elements* (Obr. 12.21), ktoré slúžia na prepojenie s blokmi Simscape. V skupine blokov *Utilities* (Obr. 12.22) sa nachádzajú pomocné bloky SimMechanics. Popis je uvedený v tabuľke Tab 12.7.



Obr. 12.21 Skupina blokov *Interface elements*



Obr. 12.22 Skupina blokov *Utilities*

Tab. 12.7 Popis skupín blokov *Interface elements* a *Utilities*

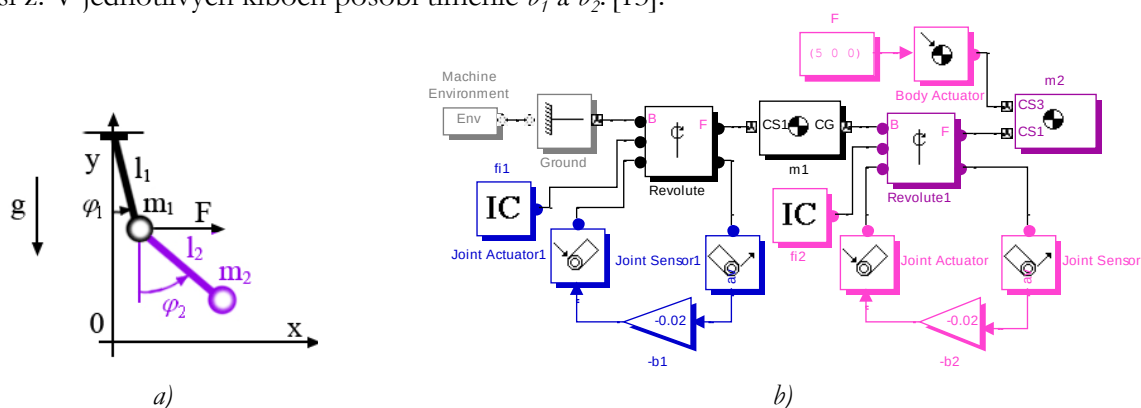
	Blok <i>Revolute-Rotational Interface</i> prepája prizmatický kĺb v SimMechanics s mechanickými prvkami knižnice blokov programu Simscape Foundation. Dynamically, such a connection is equivalent to connecting the mechanical translational elements between the two bodies that are connected to the prismatic primitive.
	Blok <i>Revolute-Rotational Interface</i> je podobný predchádzajúcemu, ale platí pre rotačné spojenia.
	<i>Connection Port</i> – slúži na prepojenie podsystémov.
	<i>Convert from Rotation Matrix to Virtual Reality Toolbox</i> – slúži na prevod rotačnej matice na formát používaný Virtual Reality Toolbox-u za účelom 3D vizualizácie objektu.
	<i>Continuous Angle</i> – slúži na zistenie celkového uhla natočenia (väčšie ako 360°), na čo potrebuje na vstupe signál uhla natočenia (Angle) a uhlovej rýchlosti (Rate).
	<i>Mechanical Branching Bar</i> – spája signály z viacerých snímačov a akčných členov.

12.2 Riešenie modelov mechanických systémov v SimMechanics

V nasledujúcej kapitole si ukážeme príklady modelov niektorých jednoduchých mechanických systémov pre vytvorenie uceleného pohľadu z predchádzajúcich poznatkov.

12.2.1 Dvojité matematické kyvadlo

Model dvojitého matematického kyvadla (Obr. 12.23a), pozostáva z dvoch jednoduchých kyvadiel, pričom prvé je ukotvené kĺbom v pevnej základni, druhé kyvadlo je k nemu pohyblivo pripojené v mieste ťažiska, ktoré je vzdialené od počiatku prvého kyvadla vo vzdialenosti l_1 . Ťažisko druhého kyvadla je umiestnené vo vzdialenosti l_2 od miesta pripojenia. Ťažiská uvažujeme ako hmotné body o hmotnosti m_1 a m_2 . Osi pôsobenia jednotlivých kĺbov sú v smere osi z. V jednotlivých kĺboch pôsobí tlmenie b_1 a b_2 . [13].



Obr. 12.23 Dvojité matematického kyvadlo: a) kinematická schéma, b) model v SimMechanics

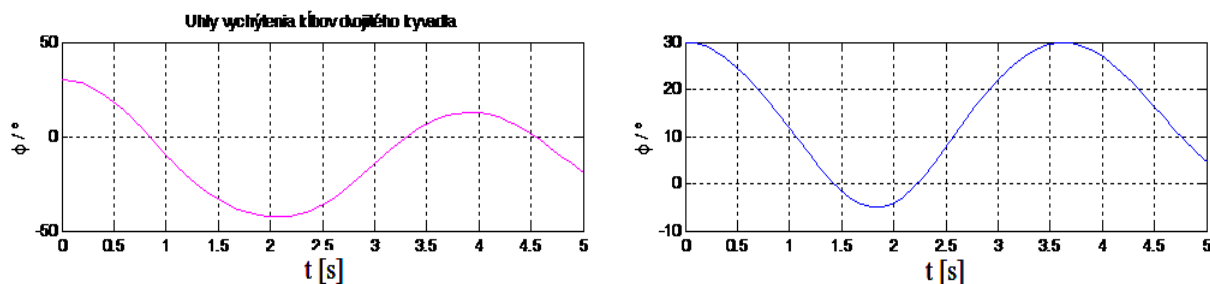
Kyvadlo uvedieme do pohybu vychýlením jednotlivých častí o uhol φ_1 a φ_2 . Zároveň pôsobíme silou na hmotný bod m_2 , čím pôsobíme na sústavu aj inou silou ako gravitačnou.

Fyzikálny model z Obr- 13.23a namodelujeme v SimMechanics (Obr. 12.23b).

Parametre simulácie: **m1; m2: mass** = 1 kg, **inertia tensor** = [2 0 0; 0 0 0; 0 0 2] kgm². **Position: CS1:** [0 0 0] m, Translated from origin of Adjoinig; **CG:** [0 -1 0] m, Translated from origin of CS1; **CS2:** [0 -1 0] m, Translated from origin of CG.

fi1; fi2: position: 30 deg., **b1; b2:** 0.02 Nsm⁻¹, **F:** [5 0 0] N

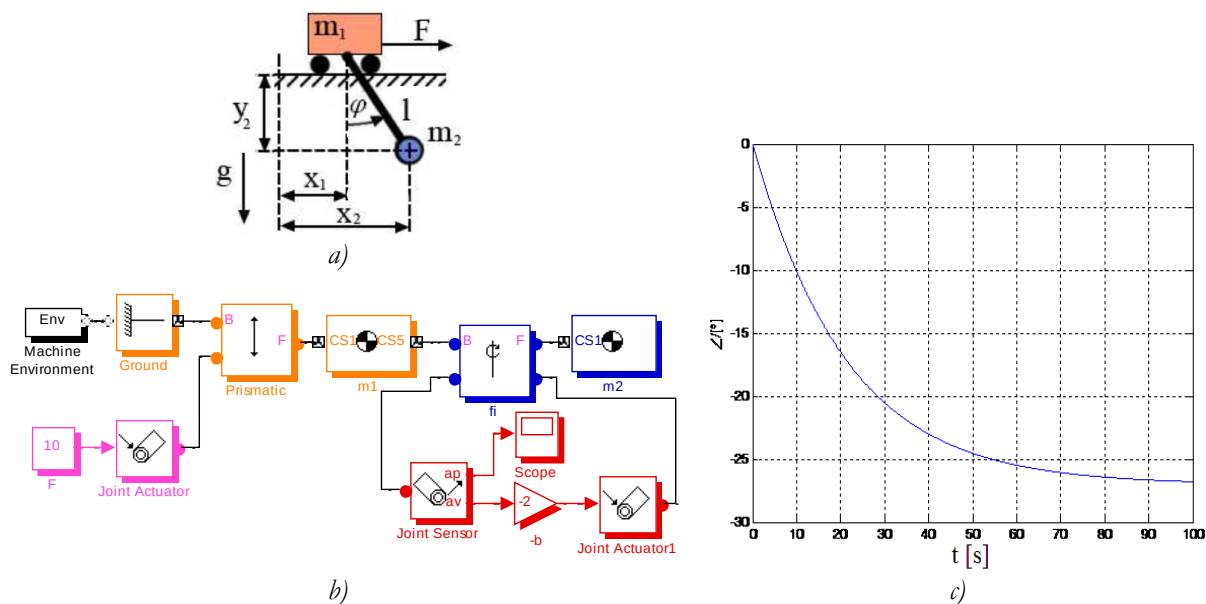
Ako vidíme na Obr. 12.23b, schému jednoduchého kyvadla sme rozšírili o ďalší blok *Body* pripojený kĺbom s identickou osou pôsobenia. Kĺbom nastavíme počiatkové podmienky, čiže uhly φ_1 a φ_2 , ďalej namodelujeme pomocou spätných väzieb viskózne tlmenie b_1 , b_2 . Silové pôsobenie F privádzame na CS3 bloku *Body*-m2 (nemôžeme privádzať na Revolute1, lebo by sa tam vytváral moment). Časové priebehy jednotlivých uhlov vychýlenia dvojitého kyvadla sú uvedené na Obr. 12.24.



Obr. 12.24 Výsledky simulácie systému dvojitého kyvadla

12.2.2 Kyvadlo na vozíku

Model kyvadla na vozíku pozostáva z vozíka, pohybujúceho sa po horizontálnej x-ovej osi a má hmotnosť m_1 . Nad jeho ťažiskom je pripojené jednoduché kyvadlo kĺbom, ktorý má os pôsobenia v osi z. Kyvadlo má umiestnené ťažisko vo vzdialenosti l od pripojenia k vozíku a má hmotnosť m_2 . V mieste pripojenia naňho pôsobí tlmenie b . Takýto systém je reprezentovaný napr. modelom žeriavu (Obr. 12.25a), [13]. Aby sme kyvadlo vychýlili z rovnovážnej polohy, na vozík pôsobíme silou F . Orientácia sily bude v smere voľného pohybu vozíka, t.j. v smere osi x. Silové pôsobenie na vozík vyvolá jeho pohyb a následné vychýlenie kyvadla o uhol φ . Odpovedajúce programové schéma v SimMechanics je na Obr. 12.25b.



Obr. 12.25 Kyvadlo na vozíku: a) Kinematická schéma, b) Programová schéma v SimMechanics; c) Ododzva systému na silové pôsobenie (uhol vychýlenia kyvadla)

Pri modelovaní dodržíme podmienky uvedené v zadaní úlohy o umiestnení ťažísk a mieste pripojenia na vozík. Do kĺbu kyvadla pomocou spätnej väzby pripojíme viskózne tlmenie. Ododzva systému (uhol vychýlenia) pri skokovej zmene vstupnej veličiny (sila $F = 10 \text{ Nm}$) je na Obr. 25c).

Keďže je potrebné nastaviť aj jednotlivé bloky v SimMechanics, uveďme aj parametre simulácie:

m1: mass = 1 kg, inertia tensor = [0 0 0; 0 0 0; 0 0 0] kgm^2 . **Position:** CS1: [0 0 0] m, Translated from origin of Adjoinig; **CG:** [0.2 0.075 0] m, Translated from origin of CS1; **CS5:** [0.2 0.1 0] m, Translated from origin of CS1.

m2: mass = 1 kg, inertia tensor = [0.2 0 0; 0 0 0; 0 0 0.2] kgm^2 . **Position:** CS1: [0 0 0] m, Translated from origin of Adjoinig; **CG:** [0 -0.5 0] m, Translated from origin of CS1; **CS2:** [0 0 0] m, Translated from origin of CG.

F = 10 N; **b** = 2 Nsm^{-1} .

Pri konštantnom silovom pôsobení sa kyvadlo po určitom stave ustáli, bez prekmitu (časová ododzva systému na Obr. 12.25c).

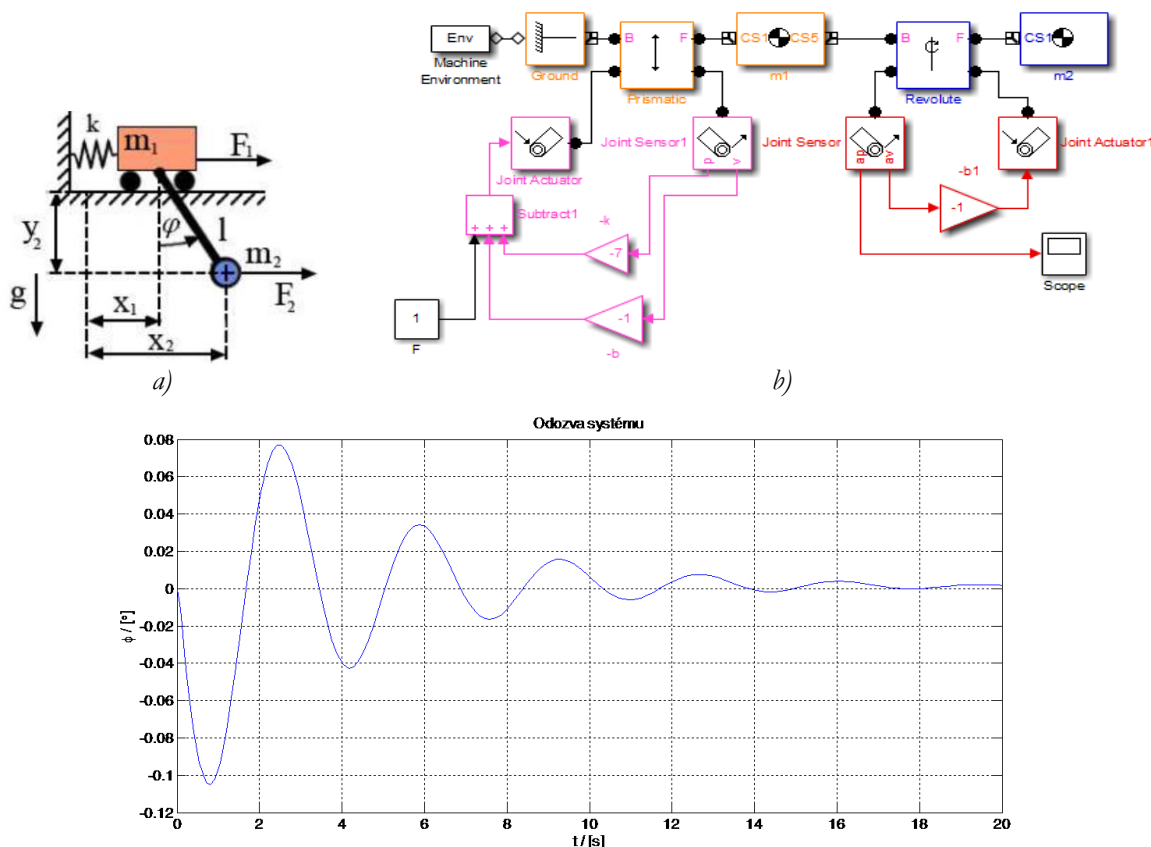
12.2.3 Kyvadlo na vozíku s pružinou

Model kyvadla na vozíku pozostáva z vozíka, pohybujúceho sa po horizontálnej x-ovej osi a má hmotnosť $m1$. Nad jeho ťažiskom je pripojené jednoduché kyvadlo kĺbom, ktorý má os

pôsobenia v z osi. Kyvadlo má umiestnené ťažisko vo vzdialenosti l od pripojenia k vozíku a má hmotnosť m_2 . V mieste pripojenia naňho pôsobí tlmenie b (Obr. 12.26a). Vozík je pomocou pružiny o tuhosti k pevne prichytený k stene. [13]

Kyvadlo uvádzame do pohybu pôsobením sily F_1 na vozík v smere osi voľného pohybu, t.j. osi X. Sila F_2 je sila pôsobiaca na kyvadlo, [13].

Na Obr. 12.26b vidíme schému kyvadla na vozíku z predchádzajúceho príkladu rozšíreného o záporné spätné väzby v bloku Prismatic, ktoré modelujú pružinu s konštantou pružnosti k , k pružine sme pridali aj malé tlmenie b , ktoré zlepšuje vierohodnosť modelu.



Obr. 12.26 Kyvadlo na vozíku s pružinou: a) kinematická schéma; b) Programová schéma modelu v SimMechanics; c) Ododzva systému na silové pôsobenie (uhol vychýlenia kyvadla)

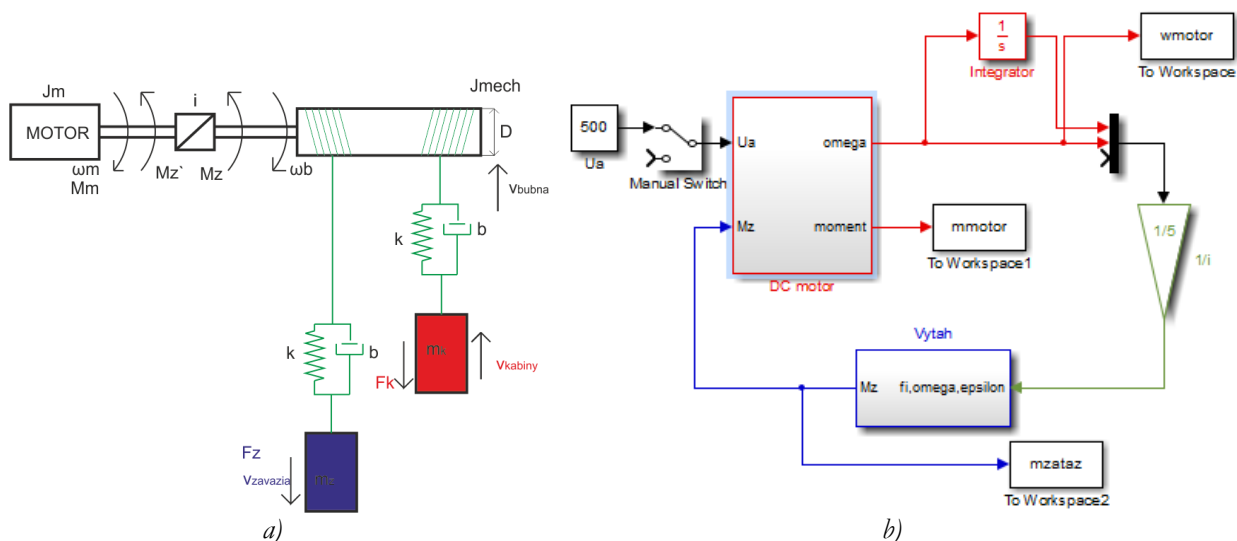
Simuláciu sme uskutočnili s nasledujúcimi parametrami: $k = 7 \text{ Nm}^{-1}$, $b = 0,02 \text{ Nsm}^{-1}$, $b1 = 0,1 \text{ Nsm}^{-1}$. Ostatné parametre sú rovnaké ako v predchádzajúcom príklade.

Časová ododzva systému na skok sily F_2 je na Obr. 12.33c. Systém sa po doznení prechodového deja ustáli na určitej hodnote ktoré závisí od silového pôsobenia a tuhosti pružiny.

12.3 Príklady modelov zložitejších mechanických systémov

12.3.1 Výt'ah, poháňaný elektromotorom, s prevodovkou, pružným lanom a protizávažím

Model výt'ahu s protizávažím, ktorý je poháňaný cez prevodovku jednosmerným cudzobudeným motorom. Budeme uvažovať aj s predlžovaním lana v dôsledku ťahu (pružina + tlmenie). Na Obr. 12.27a vidíme blokovú schému výt'ahu. Nakoľko sa skladá z množstva blokov, rozdelíme ju na podsystémy a to na podsystém motora a samotného výt'ahu (Obr. 12.27b).



Obr. 12.27 Výt'ah s protizávažím a prevodovkou: a) kinematická schéma, b) bloková schéma

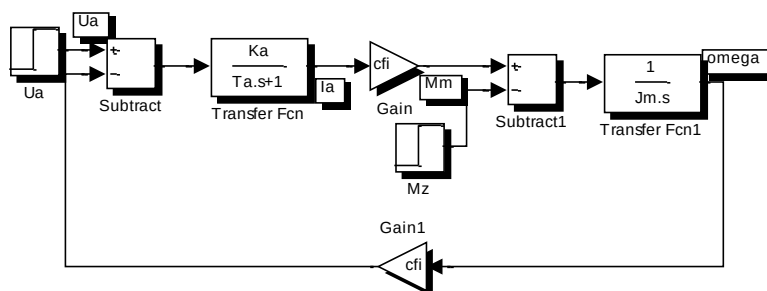
Privedením napätia na kotvu motora sa na hriadieli motora vytvára moment M_m , ktorý sa cez prevod prenesie na bubon. Na bubon je pomocou pružného lana zavesená kabína (bremeno), kde pridáme aj záťaž protizávažia. Pohybujú sa vertikálne vo vzájomne opačnom smere (ich laná sa navíjajú na bubon opačne). Protizávažím pôsobíme proti tiažovej sile pôsojacej na kabínu, výsledná sila sa rovná:

$$F_{výsl} = F_k - F_z \quad 12.4$$

takže zvýšením závažia sa výsledná sila pôsojaca na bubon znižuje. Zväčšovaním závažia však narastá dynamický moment.

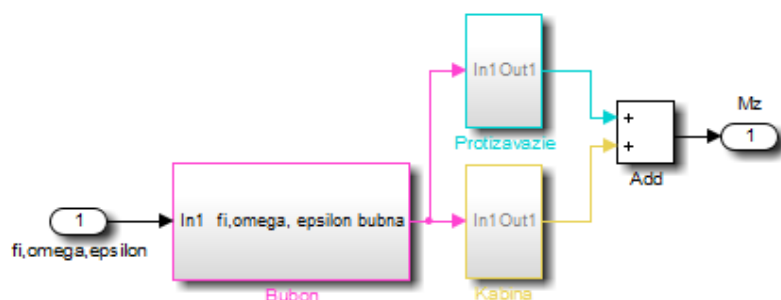
Na kotvu motora privádzame napätie, jeho výstupnou veličinou a zároveň vstupnou veličinou prevodu je uhlová rýchlosť a uhol natočenia hriadeľa motora. Výstup z prevodovky je takisto uhol a uhlová rýchlosť, ale už po prevode. Výstupom z výt'ahu je zaťažovací moment, ktorý spätnou väzbou privádzame na motor.

Simulačný model jednosmerného cudzobudeného motora je na Obr. 12.28. Za jeho vstupy si zvolíme U_a a M_z a ako výstup volíme uhlovú rýchlosť a vytvoríme podsystém. Parametre motora: $K_a = 0,1916 \Omega^{-1}$, $T_a = 0,0095$ s, $c\dot{f}i = 2,6$ Vs, $J_m = 0,32$ kgm².



Obr. 12.28 Matematický model jednosmerného cudzobudeného motora

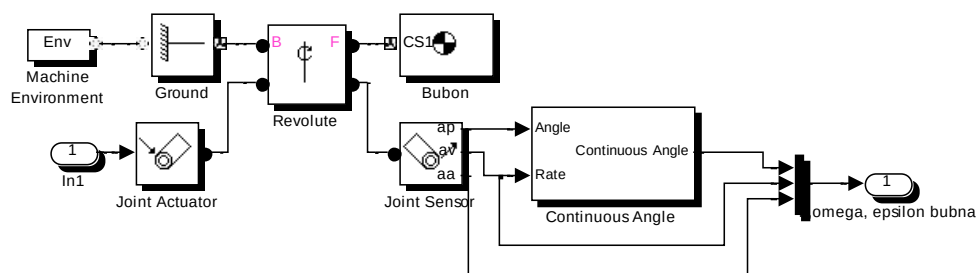
Uhlovú rýchlosť integrujeme, čím získame polohu - uhol natočenia rotora. Signály multiplexujeme a privádzame cez násobenie prevodom do mechanického modelu výt'ahu, ktorý je schématicky nakreslený na Obr. 12.29.



Obr. 12.29 Bloková schéma mechanickej časti výťahu v prostredí SimMechanics

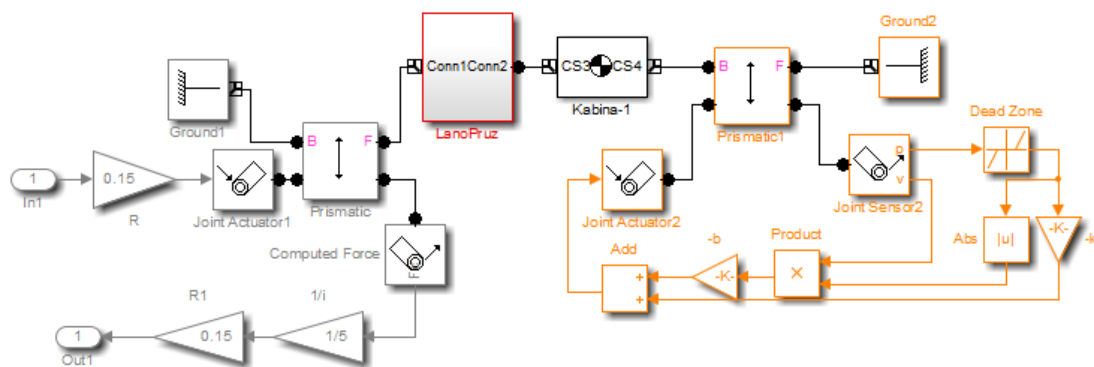
Táto informácia o otáčaní sa bubna vstupuje do bloku bubna a vystupujúci signál odtiaľ je privedený do bloku kabíny a protizávažia. Súčet ich momentov vytvára záťažný moment.

V podsysteme bubna (Obr. 12.30) je modelovaný bubon, na ktorý sa navíja a odvíja lano pri dvíhaní/spúšťaní bremena. Na vstupe je aktuátor v režime kinematického budenia, ktorým privádzame signál z prevodu. Bubon bude rotovať okolo bodu Ground. Ďalej budeme snímať φ , ω a ε bubna. Nakoľko však senzor dokáže snímať uhol φ iba v rozmedzí od -180° do 180° , čiže jednu otáčku, nevieme určiť koľkokrát sa bubon otočil, čiže ani koľko lana navinulo/odvinulo. Tento nedostatok eliminujeme pomocou bloku Continuous Angle, ktorý na základe φ a ω vypočíta uhol φ_c , ktorý už predstavuje absolútny uhol.



Obr. 12.30 Model bubna v SimMechanics

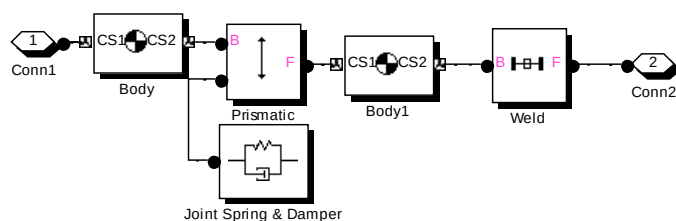
Sivé bloky na Obr. 12.31 modelujú pohyb kabíny. Vstupný uhol sa prepočíta na translačný posuv vynásobením s polomerom bubna $r_{bubna} = 0,15$ m, cez ktorý sa pohyb vykonáva. Signál sa privádza na kĺb *Prismatic*, ktorý pôsobí v osi y sveta. Kabína predstavuje dvíhanú hmotnosť a jej počiatočná poloha je 50 m od bubna vertikálne. Medzi blok kabíny a kĺb pridáme pružný člen s vhodnými parametrami (Obr. 12.31), t.j. zanedbateľné hmotnosti. Konštanty pruženia a tlmenia zvolíme $k = 7000 \text{ Nm}^{-1}$, $b = 1200 \text{ Nsm}^{-1}$. Sily meriame senzorom v móde *Computed Force* a ramenom násobíme aj prevrátenou hodnotou prevodu, čím získame moment, ktorý po sčítaní momentu z protizávažia privádzame zápornou spätnou väzbou na motor.



Obr. 12.31 Model kabíny v SimMechanics

Program SimMechanics nepočíta s kolíziami, ale v skutočnosti je pohyb kabíny aj závažia obmedzený hĺbkou výtahovej šachty. Toto obmedzenie namodelujeme pružinou s vysokou tuhosťou a veľkým tlmením, pôsobiacej vo väzbe, ktorá začne pôsobiť po prekročení stanovených hodnôt, čo je sledované blokom Dead zone. V tomto prípade sme uvažovali šachtu o hĺbke 50 metrov a preto *Dead Zone* nastavíme na rozsah od -50 do 0. Týmto opatrením zabránime pohybu kabíny mimo zvolený rozsah. V prípade nárazu kabíny v koncových bodoch sa vyvolaná sila dostane spätnou väzbou ako záťažový moment naspäť do motora, čím sa motor zabrzdí. Samozrejme, že toto opatrenie nie je nutné opakovať pre protizávažie.

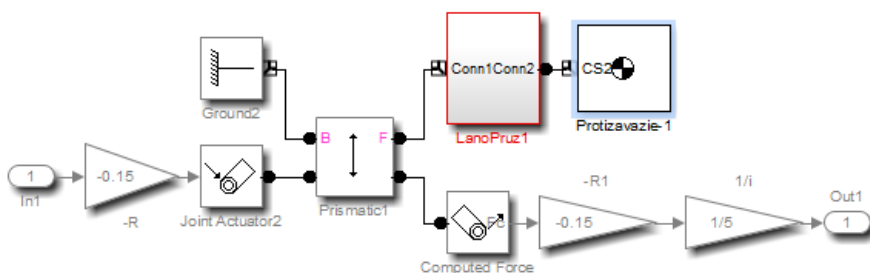
Model pružného lana (blok LanoPruz v Obr. 12.31) je rozkreslený na Obr. 12.32



Obr. 12.32 Model pružného lana

Protizávažie modelujeme podobne ako kabínu, len s tým rozdielom, že počiatočná poloha je opačná, ako poloha kabíny (Obr. 12.33). Preto vstupný a výstupný signál násobíme číslom -1, t.j. smer pohybu a pôsobiace sily majú opačný smer, ako v prípade kabíny.

Po spustení modelu, prepínačom Manual Switch zapíname a vypíname motor. Tento model demonštruje spoluprácu a možnosti všestranného využitia Simulinku spoločne so SimMechanics.



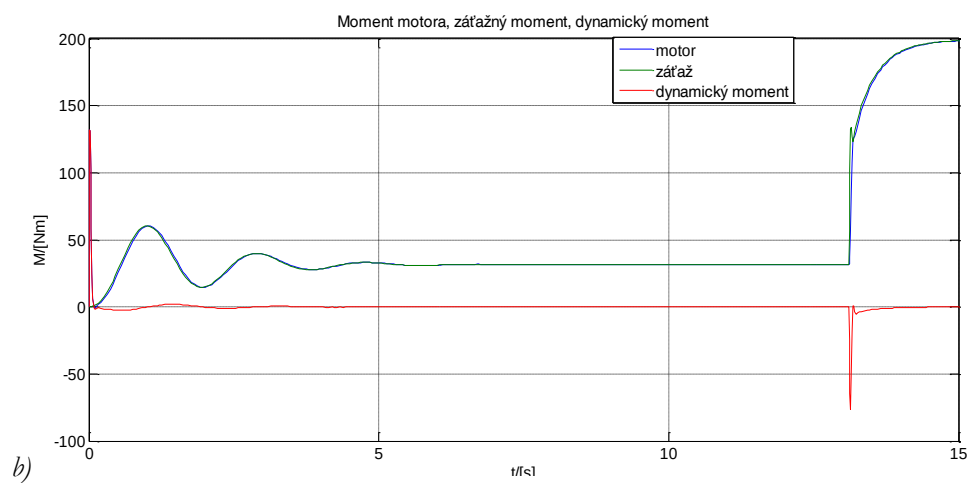
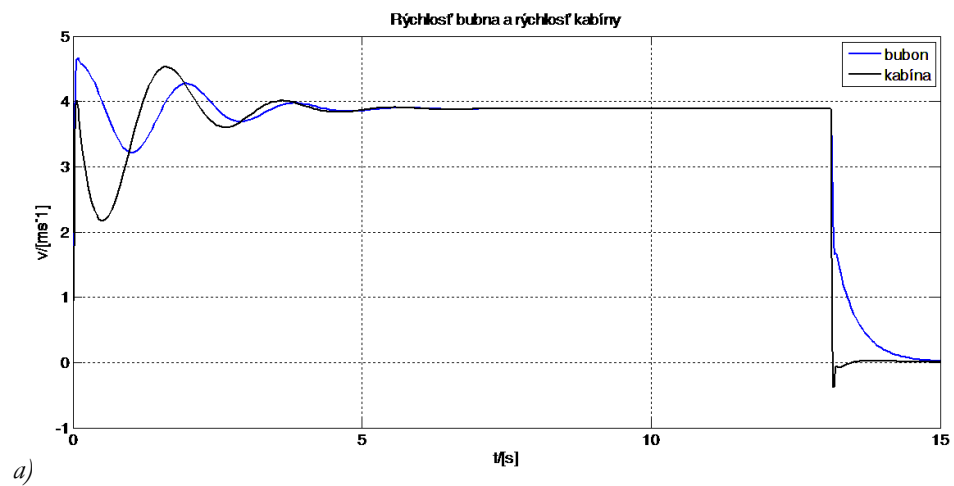
Obr. 12.33 Model protizávažia

Na výstupe zo simulácie môžeme sledovať mechanické deje v systéme (Obr 12.34).

Rýchlosť kabíny a uhlová rýchlosť bubna, prepočítaná na priamočiary pohyb lana, sa po rozbehu motora nerovnajú, čo je dané pružnosťou lana. Po zaniknutí prechodného deja sa rýchlosti vyrovnajú. Pri náraze kabíny na obmedzenie jej pohyb zastane, ale bubon sa ešte naďalej otočí v dôsledku predlžovania sa lana.

Z priebehu momentu motora a záťaže môžeme sledovať, že v ustálenom stave sa tieto momenty rovnajú. Pri rozbehu a prudkom zastavení (napr. pri náraze na šachtu) vzniká medzi nimi rozdiel – nenulový dynamický moment, čím sa vytvárajú značné momentové špičky.

Parametre simulácie: $U_a = 500 \text{ V}$, $K_a = 0.1916$, $T_a = 0,0095\text{s}$, $c\dot{f}i = 2,6 \text{ Vs}$, $J_m = 0,32 \text{ kgm}^2$ i = 5
 $J_{mechaniky} = 1,125 \text{ kgm}^2$ $D = 0,3 \text{ m}$, $k_{lano} = 7000 \text{ Nm}^{-1}$ $b_{lano} = 1200 \text{ Nsm}^{-1}$ $m_{kabina} = 607 \text{ kg}$, $m_{zavazie} = 500 \text{ kg}$, *Dead zone* pre obmedzenie pohybu: min: -50, max: 0, $k_{obmedzenie} = 100000 \text{ Nm}^{-1}$ $b_{obmedzenie} = 1000000 \text{ Nsm}^{-1}$



Obr. 12.34 Rýchlosť bubna a kabíny (a) a momenty pôsobiace v systéme (b)

13 ŠPECIÁLNE NÁSTROJE SIMULINKU A CONTROL TOOLBOXU PRE ANALÝZU DYNAMICKÝCH SYSTÉMOV A SYNTÉZU REGULÁTOROV

13.1 Určenie prenosu systému zo schémy v Simulinku

<http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=Suspension§ion=SimulinkControl>

Simulink poskytuje výbornú možnosť linearizácie nelineárneho modelu, ktorý je zadaný svojou programovou schémou. Miesto generátora vstupného signálu a zapojíma vstupný port (In) a ku výstupu (napr.. blok Scope) pripojíme výstupný port (Out). Poznamenajme, že na vstupe môže byť pripojený buď generátor vstupného signálu alebo vstupný port; výstup je možné súčasne poslať aj na zobrazovaciu jednotku aj na výstupný port. Schému uložíme (napr. pod menom sys.mdl) a podľa potreby použijeme jednu z inštrukcií:

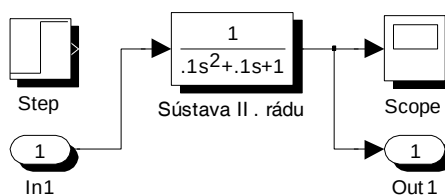
[A,B,C,D] = linmod('sys') - linearizovaný stavový model v okolí pracovného bodu

[num,den] = linmod('sys') – dostávame prenosovú funkciu v okolí pracovného bodu

Pracovný bod vieme nastaviť pomocou počiatočných podmienok v schéme (napr. počiatočné podmienky integrátorov, príp. pridané ďalšie signály).

Funkcia **linmod** pri výpočte lineárneho modelu vychýľuje stavy a vstup modelu z nastaveného pracovného bodu o malú hodnotu (defaultne o hodnotu $1e-5$), aby zistila rýchlosť zmien derivácií stavov a výstupov. Existuje niekoľko ďalších doplnkov tejto inštrukcie, ktoré možno naštudovať z pomocníka. V prípade MIMO systému možno pripojiť viac vstupných a výstupných portov.

Príklad: Overme zostavenie modelu systému v prípade lineárnej sústavy II. rádu s prenosom $F(s) = \frac{1}{0.1s^2 + 0.1s + 1}$. Zostavíme schému v Simulinku, odpojíme vstup, pripojíme vstupný port, uložíme pod menom System.mdl a v poli MATLABu napíšeme vyššie uvedené inštrukcie.



Obr. 13.1 Schéma systému v Simulinku doplnená vstupným a výstupným portom

Dostaneme tým matice stavového modelu, po prepise:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 10], D = 0$$

resp. polynóm čitateľa a menovateľa prenosovej funkcie, ktorá zodpovedá zadenaj funkcii.

num =

0 0.0000 10.0000

den =

1.0000 1.0000 10.0000

13.2 LTI viewer pre analýzu modelov systémov

13.2.1 Prehľad aplikácie

Vstavaný grafický **LTI Viewer** (LTI – Linear Time Invariant = lineárny časovo nezávislý) poskytuje nástroje na analýzu ododzvy systému, ako je prechodová charakteristika, frekvenčné charakteristiky v logaritmických súradniciach a v komplexnej rovine, zobrazenie pólov a núl a ďalšie. Umožňuje prechádzať z časovej do frekvenčnej oblasti, zvoliť množinu pozorovaných vstupov a výstupov, atď. LTI Viewer je v podstate grafický používateľský interfejs (GUI – Graphical User Interface), ktorý zjednodušuje analýzu lineárnych časovo invariantných systémov.

LTI Viewer možno použiť pre zobrazenie a porovnanie grafov ododziev niekoľkých lineárnych modelov naraz. Možno vytvárať časové a frekvenčné ododzvy systémov na kontrolu hlavných parametrov ododziev, ako je doba nábehu, maximálny prechod a hranice stability. V prípade MIMO systémov možno pomocou myši vybrať zobrazenie časových a frekvenčných ododziev medzi zvolenými vstupmi a výstupmi. LTI Viewer môže zobrazit až šesť rôznych grafov súčasne, vrátane prechodovej a impulzovej charakteristiky, Bodeho logaritmických frekvenčných charakteristík (amplitúdové a fázové alebo iba amplitúdové), Nyquistove komplexné frekvenčné charakteristiky, Nicholsove a rozmiestnenie pólov a núl vyšetrovaného prenosu.

Syntax príkazu je (zadaním do príkazového riadku, alebo zapísaním inštrukcie do m-súboru):

ltiview('plot type', sys, extra)

kde **sys** je meno prenosovej funkcie a **'plot type'** je jedna z nasledovných časových ododziev:

step	bode
impulse	nyquist
initial	nichols
lsim	sigma

Zvlášť sa zadáva voliteľný argument určujúci dobu riešenia (final time). Po otvorení programu, pravým tlačidlom myši možno zmeniť typ ododzvy a získať stavový popis v časovej oblasti a špecifikácie grafu vo frekvenčnej oblasti, vrátane:

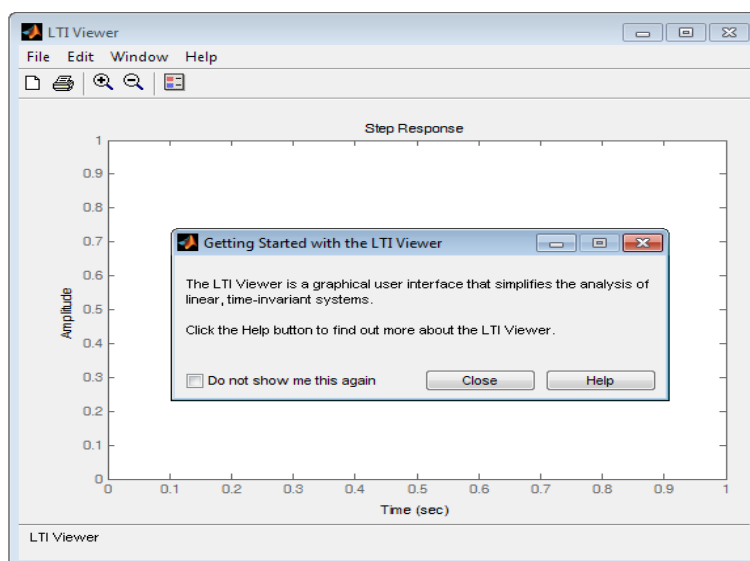
Plot Type	zmení typ grafu
Systems	vyberie model, ktorý bol nahraný do LTI Viewera
Characteristics	zobrazí charakteristiky a parametre
Zoom	zväčší, resp. zmenší označenú plochu
Grid	pridá mriežku do grafu
Properties	Editor, where you can customize plot attributes

Tab. 13.1 zobrazuje prehľadne, aké parametre systému možno získať v jednotlivých grafoch.

Tab. 13.1 Prehľad možností získania numerických hodnôt pri jednotlivých zobrazeniach charakteristík systému

	Čas max. prechodu	Čas ustálenia	Čas nábehu	Hodnota v ustál. stave	Amplitúda /fáza; v dB	Póly a nuly prenosu
Step	✓	✓	✓	✓	-	-
Impulse	✓	✓	-	-	-	-
Bode	✓	-	-	-	✓	-
Nyquist	✓	-	-	-	✓	-
Nichols	✓	-	-	-	✓	-
Pole-zero	-	-	-	-	-	✓

Základné okno po zadání inštrukcie **ltiview** je zobrazené na Obr. 13.2.



Obr. 13.2 Základné okno LTI Viewer

Vytvorenie LTI pre prenosové funkcie:

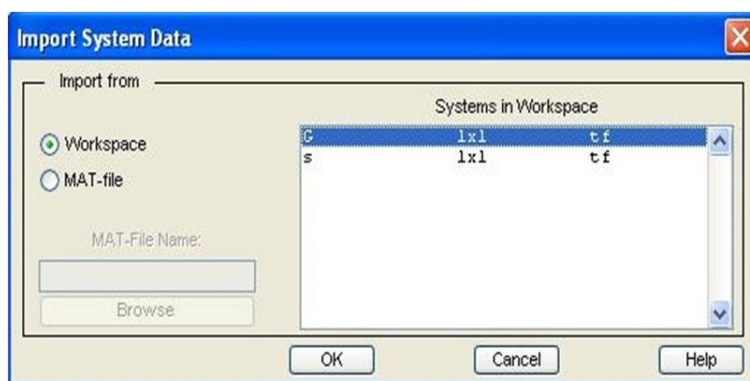
Prenosové funkcie, ktorých charakteristiky chceme zobraziť, môžu byť vytvorené v M-súbore alebo v pracovnom priestore (workspace) MATLABu. Spustíme M-súbor alebo zadáme inštrukcie pre vytvorenie prenosovej funkcie vo príkazovom okne v MATLABE (Command Window). Všetky objekty LTI v pracovnom priestore MATLABu je možné exportovať do LTI Viewer.

Príklad 1: prenosovú funkciu $G(s) = \frac{1}{s+1}$ vytvoríme jednoduchým spôsobom nasledovne:

```
>> s = tf('s');
```

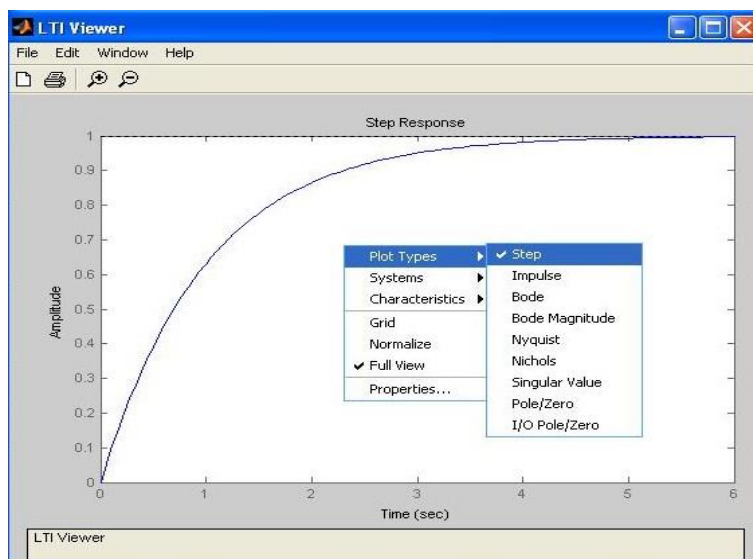
```
>> G = 1/(s+1);
```

Výber prenosovej funkcie pre LTI Viewer: Zvolíme **Import...** vo **File** menu okna **LTI Viewera** a tu zvolíme všetky LTI objekty, pre ktoré sa počas daného riešenia budú zobrazovať charakteristiky na obrazovke. Napr. výber **G** je zobrazený na Obr. 13.3.



Obr. 13.3 Okno importovania údajov zvoleného systému

Výber LTI objektov nakreslenie chartakteristík: pravým tlačidlom myši klikneme do oblasti pre kreslenie charakteristík, čím vyvoláme rozbaľovacie menu. V časti **Systems** vyberieme alebo zrušíme objekty, ktoré chceme/nechceme, aby sa zobrazili v **LTI Viewer**. Znova klikneme pravou myšou na plochu grafu, čím vyvolám rozbaľovacie menu. V časti **Plot Types** vyberieme zvolený druh grafu (Obr. 13.4).



Obr. 13.4 Rozbaľovacie menu po kliknutí do priestoru grafu pravým tlačidlom myši

Príklad: v LTI Viewer zobrazme grafy prenosovej funkcie typickej podtlmenej sústavy druhého rádu. Prítom máme nasledovné možnosti:

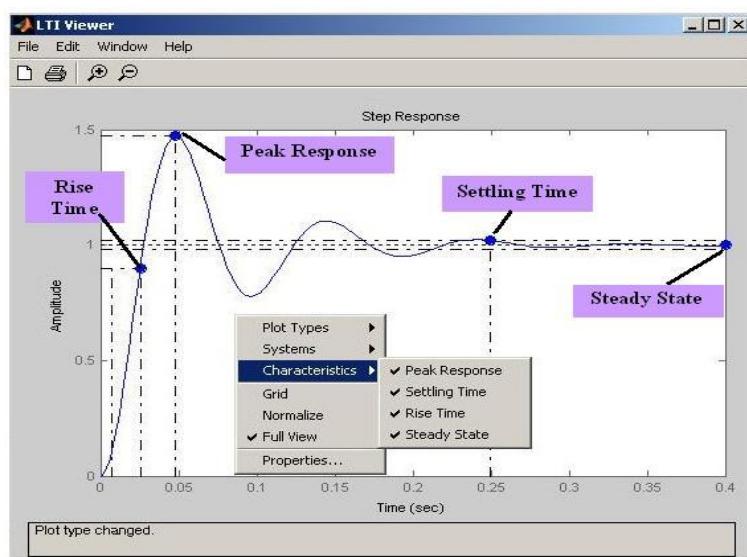
Výber charakteristík:

Klikneme pravou myšou do plochy grafu LTI Viewera, čím vyvoláme rozbaľovacie menu. v podmenu **Characteristics** vyberieme zvolenú charakteristiku (možno zvolit' niekoľko charakteristík). For each characteristic selected, a point will be placed on the plot at the appropriate location. Obr. 13.5 zobrazuje rozbalené Menu a submenu.

Úprava grafov (Interact with the plot):

Príbliženie/oddialenie grafu (Zoom In/Zoom Out): Zvolíme tlačidlo (+), resp. (-) na nástrojovej lište a klikneme do oblasti grafu, ktorú chceme zväčšiť/zmenšiť.

Pôvodný graf (Original View): Ak sa chceme vrátiť k pôvodnej veľkosti grafu, v rozbaľovacom menu po kliknutí pravou myšou do grafu zvolíme **Reset to Original View**.



Obr. 13.5 Prechodová charakteristiky sústavy II. rádu v LTI viewer a zobrazenie menu

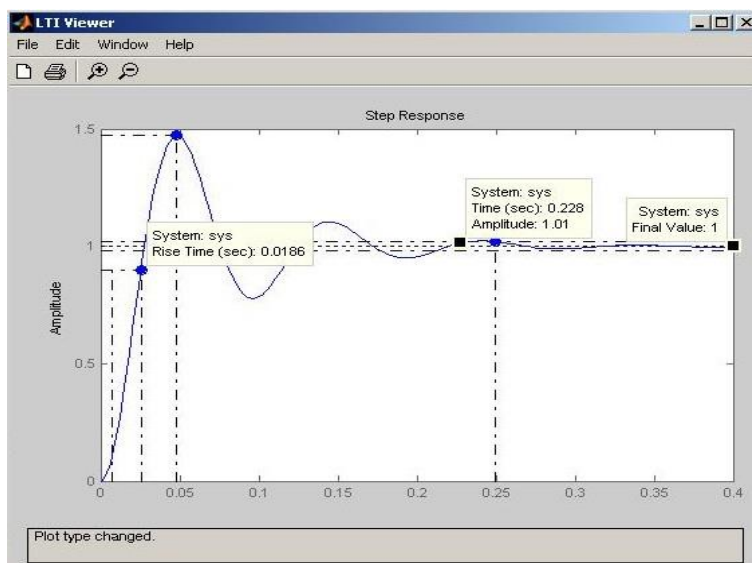
Mriežka (Grid): Po nakreslení grafu po kliknutí pravou myšou do oblasti grafu zvolíme **Grid**, čím zapínami/vypíname mriežku. Toto nefunguje po zvolení zväčšenie/zmenšenie/veľkosti pôvodného grafu – v tom prípade najprv treba zvolit' mriežku.

Normovanie (Normalize): slúži pre zakreslenie zobrazovaných grafov do rozsahu $<0; 1>$.

Charakteristiky (Characteristics): Hodnoty súradníc charakteristiky v danom bode získame položením myši na daný bod a kliknutím pravého tlačidla myši.

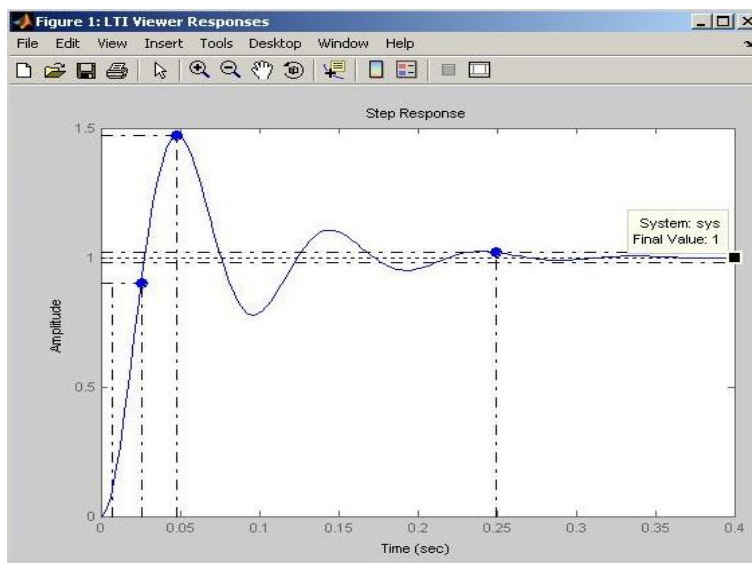
Vlastnosti (Properties): Pre zmenu vlastností grafu klikneme pravou myšou, alebo dvojitém kliknutím hocikde do priestoru grafu (nie na krivku). Možno zmenit' označenie osí, hranice x_0 a y_0 , fonty a veľkosť písma popisu, farby a popis charakteristík.

Súradnice a krivka (Coordinates and curve): Kliknutím ľavou myšou na zvolený bod grafu možno získat' (odčítat') jeho súradnice (viď štvorcový blok vyznačený na Obr. 13.6).



Obr. 13.6 Vypísanie hodnôt na grafe

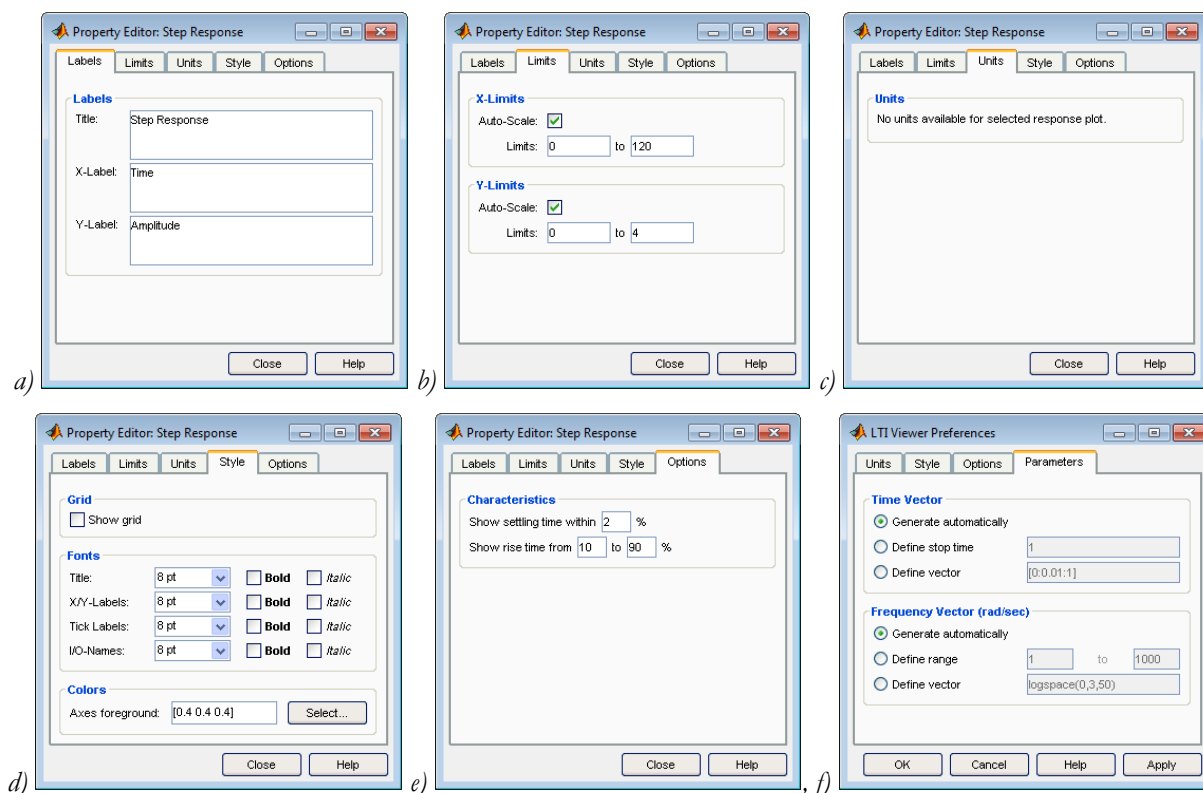
Pridanie textu a grafiky (Add text and graphics): V menu **File** menu zvolíme **Print to Figure**. Otvorí sa prídavný panel s nástrojmi (Obr. 13.7). Panel v tomto obrázku obsahuje prídavné nástroje pre predanie textu, šípiek, čiar, legend a na otáčanie obrázku.



Obr. 13.7 Panel grafického editora

Pridavné možnosti editovania grafu (Additional plot-edit capabilities): Menu **Edit LTI** a **Print to Figure** poskytujú ďalšie možnosti editácie grafu.

Editor vlastností (Property editor): LTIviewer umožňuje upraviť niektoré parametre grafu (Obr. 13.8). Kliknutím pravým tlačidlom myši do grafu z menu zvolíme **Properties**. Otvorí sa okno prednastavení, ktoré umožňuje používateľovi nastaviť parametre a označenia grafu ako sú: návestia (**Style** - nadpis grafu a označenie osí), mierky osí (**Limits**), jednotky (**Units**), veľkosť a štýl popisu osí a mriežka (**Style**) a parametre pre vyznačenie doby regulácie a doby nárastu (**Options**).



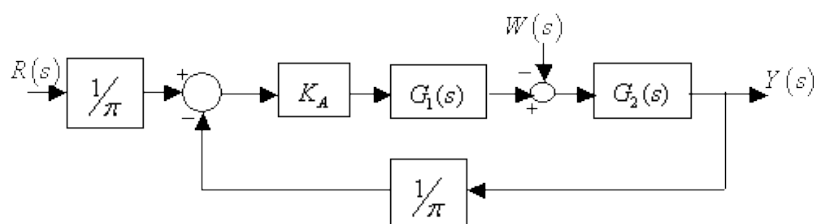
Obr. 13.8 Úprava parametrov grafu

Prednastavenie LTI Viewera (Viewer Preferences). V menu **Edit** zvolíme **Viewer preferences...** a podobne sa otvorí okno prednastavení **Units**, **Style**, **Options**, **Parameters**. Po výbere karty **Parameters** (Obr. 13.8.f) možno nastaviť parametre výpočtu (mierky, krok) pre časovú odozvu a pre frekvenčnú charakteristiku.

13.2.2 Aplikačné príklady na LTI Viewer

http://nptel.ac.in/courses/108102044//matlab/module5/module5-2_middle.htm

Príklad 1: Porovnajme náhradu sústavy tretieho rádu sústavou druhého rádu pre polohový servosystém na Obr. 13.9.



Obr. 13.9 Polohový servosystém

Prenosová funkcia motora, prevodovky a zát'aže:

$$G_2(s) = \frac{0.283}{s(s+1.71)}$$

Prenosová funkcia výkonového meniča:

$$G_1(s) = \frac{100}{s+100}$$

Proporcionálny regulátor:

$$K_A$$

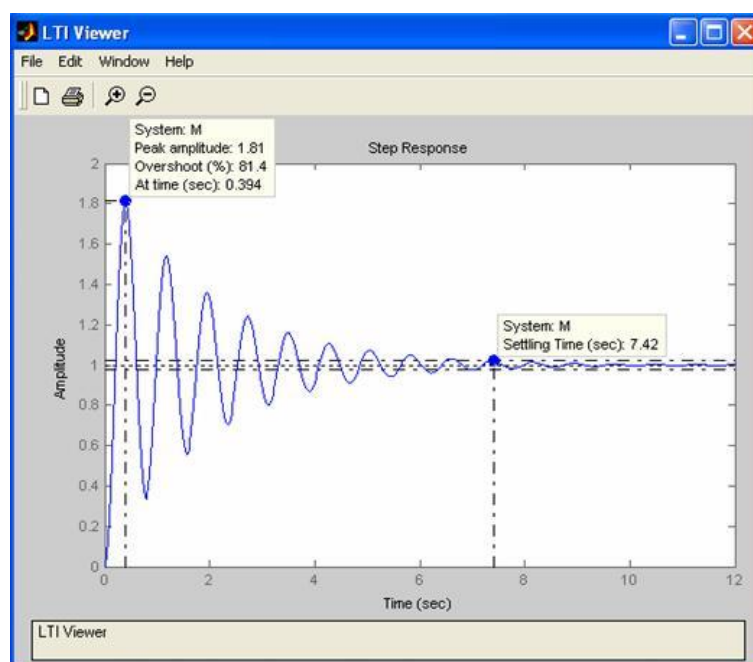
Číťlivosť vstupného a výstupného snímača potenciometra

$$1/\pi$$

Časovú odozvu systému dostaneme pomocou m-súboru v MATLABe:

```
s = tf('s');  
G1 = 100/(s+100);  
G2 = 0.2083/(s*(s+1.71));  
K = 1000;  
G = series(K*G1,G2);  
H = 1/pi;  
M = series(feedback(G,H),H);  
ltiview(M);
```

Časová ododozva pôvodného systému ne ja Obr. 13.10.



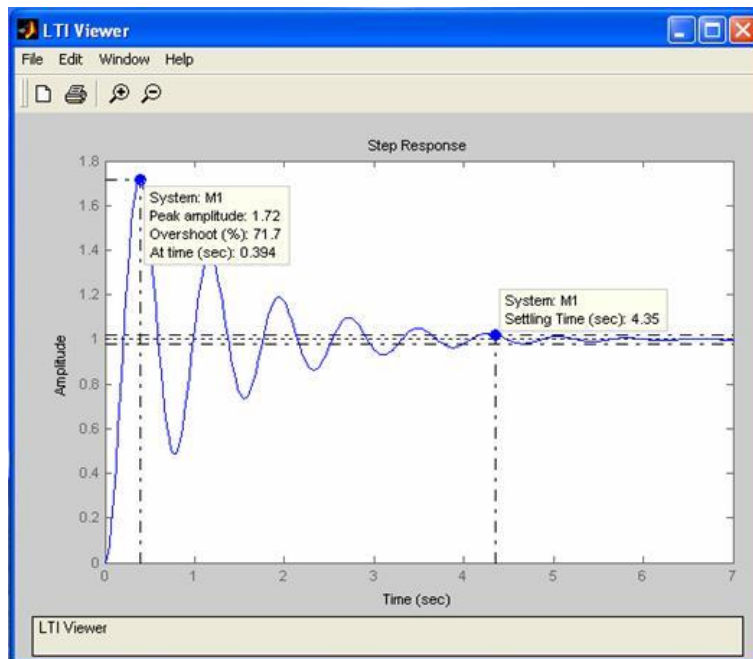
Obr. 13.10 Časová ododozva systému z Obr. 13.9

V ďalšom porovnáme časovú odozvu tohto systému s náhradným prenosom (Obr. 13.11).

```
s = tf('s');  
G1 = 1; G2 = 0.2083/(s*(s+1.71));  
K = 1000;  
G = series(K*G1,G2);  
H = 1/pi;
```

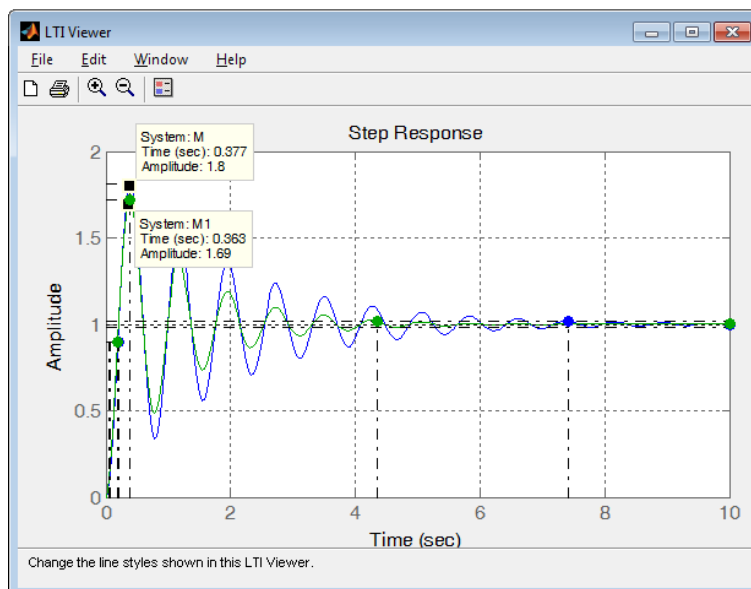


```
M1 = series(feedback(G,H),H);
ltiview(M1);
```



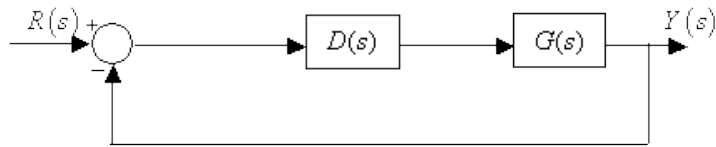
Obr. 13.11 Prechodová charakteristika aproximovanej sústavy II. rádu

Aproximácia danej sústavy III. rádu sústavou II. rádu v tomto prípade je vcelkom vyhovujúcou. Obe ododzvy z Obr. 13.10 a 13.11 možno dať do jedného grafu pomocou inštrukcie **ltiview(M,M1)**. Alternatívne možno použiť **Import...** vo **File** menu a zvoliť **M**. Na Obr. 13.12 je graf po doplnení: **Peak time**, **Settling time**, **Rise time**, **Steady state**.



Obr. 13.12 Časové ododzvy obch sústav: pôvodnúú sústava III. rádu a jej náhrada sústavou II. rádu

Príklad 2: Je daný regulačný obvod na Obr. 13.13



Obr. 13.13 Uzavretý regulačný obvod

Prenosová funkcia sústavy je: $G(s) = \frac{59.292}{s^2 + 6.9779s + 15.1239}$

Prenosová funkcia regulátora: $C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$

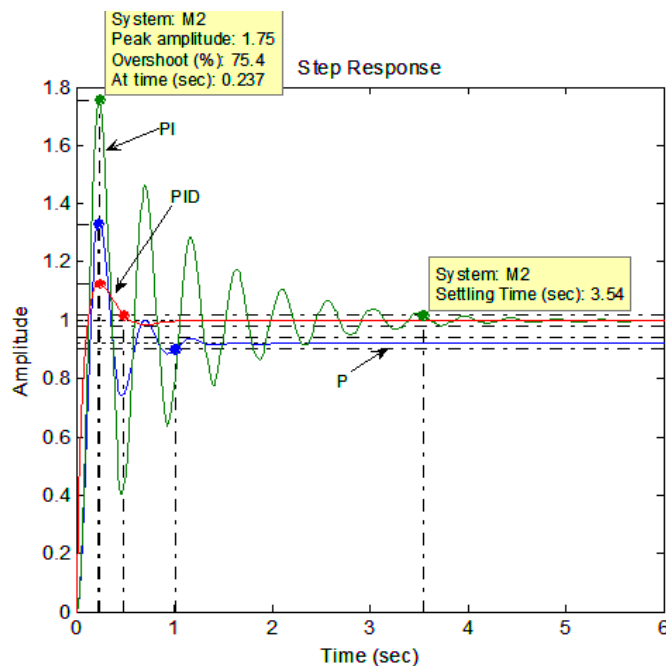
Uvažujme s nasledovnými tromi regulátormi typu:

P: $C_1(s) = 3$; **PI:** $C_2(s) = 3 + (15/s)$; **PID:** $C_3(s) = 3 + (15/s) + 0.3s$

V MATLABe zostavíme nasledovný m-súbor:

```
s = tf('s');
G = 59.292/(s^2+6.9779*s+15.12);
D1 = 3;
D2 = 3 + 15/s;
D3 = 3 + 15/s + 0.3*s;
M1 = feedback(D1*G,1);
M2 = feedback(D2*G,1);
M3 = feedback(D3*G,1);
step(M1); hold; step(M2); step(M3);
```

Časové ododzvy systému s rôznym typom regulátora sú sobrazené na Obr. 13.14.



Obr. 13.14 Ododzvy systému s tromi typmi regulátorov, nakreslené v jednom grafe.

Ak chceme zobrazit' naraz ododzvy všetkých troch systémov, nemusíme použiť LTI viewer, ale stačí použiť inštrukcie **hold on a step**.

Poznamenajme, že pridanie integračného regulátora zvyšuje oscilácie prechodovaj charakteristiky, ale eliminuje ustálenú odchýlku. Pridanie derivčnej zložky znižuje prekmity, ale pri zaťažení zostáva ustálená regulačná odchýlka. http://nptel.ac.in/courses/108102044//matlab/module5/module5-3_middle.htm

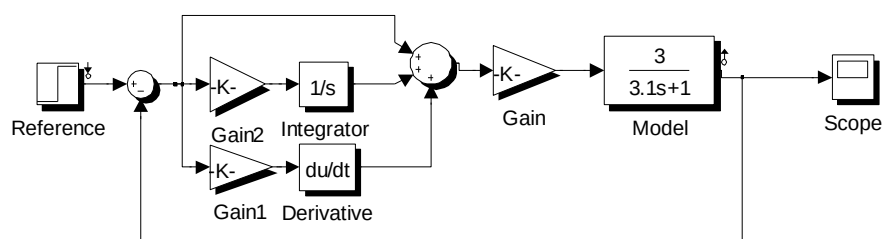
Príklad 3: Je daný systém a PID regulátor s nasledovnými parametrami:

Prenosová funkcia sústavy: $G(s) = \frac{3}{3.1s+1}$

Prenos PID regulátora: $C(s) = 3.37(1 + \frac{1}{1.2s} + 0.06s)$

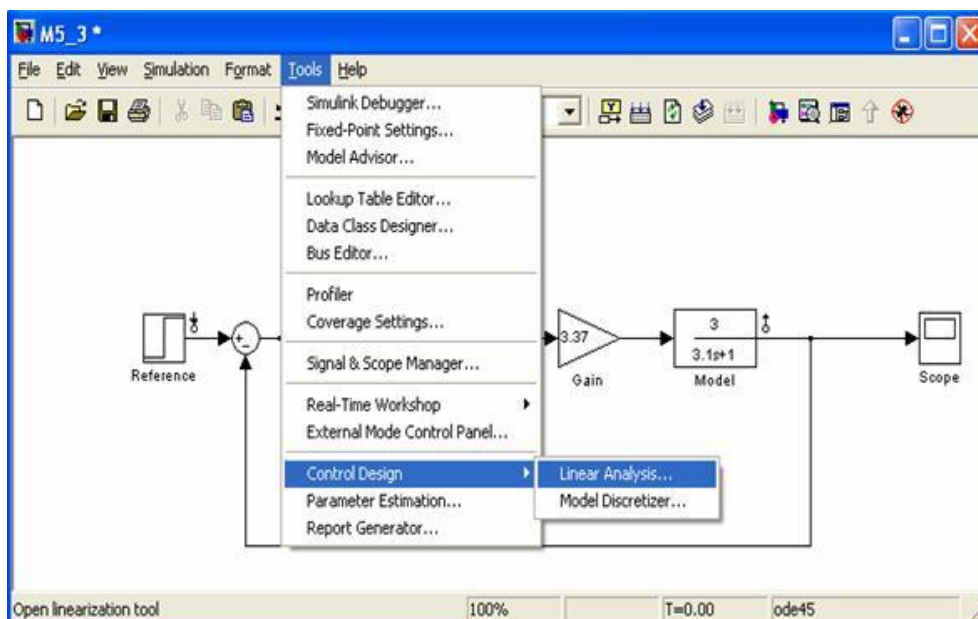
Jednotkový skok: $U(s) = \frac{1}{s}$

Programová schéma regulačného obvodu je na Obr. 13.15.

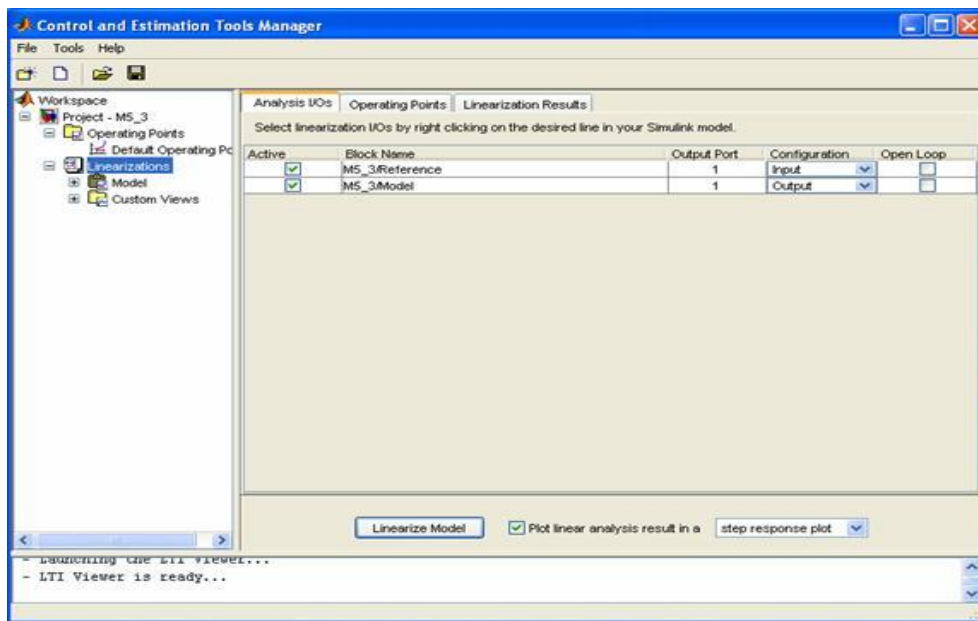


Obr. 13.15 Regulačný obvod s PID regulátorom

Časové ododzvy modelu naprogramovaného v Simulinku možno získať pomocou nástroja LTI viewerTime priamo z prostredia Simulinku. Aktivujeme ho nasledovne **Tools - Control Design - Linear Analysis** (Obr. 13.16), čím sa otvorí **Control and Estimation Tools Manager** (Obr. 13.17).

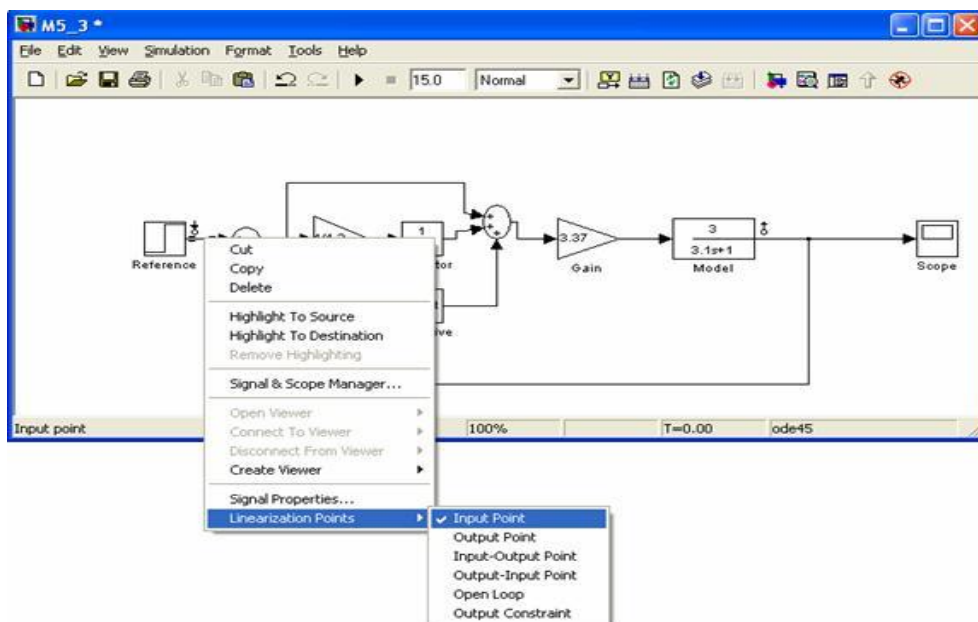


Obr. 13.16 Aktivovanie LTI viewer z prostredia Simulinku



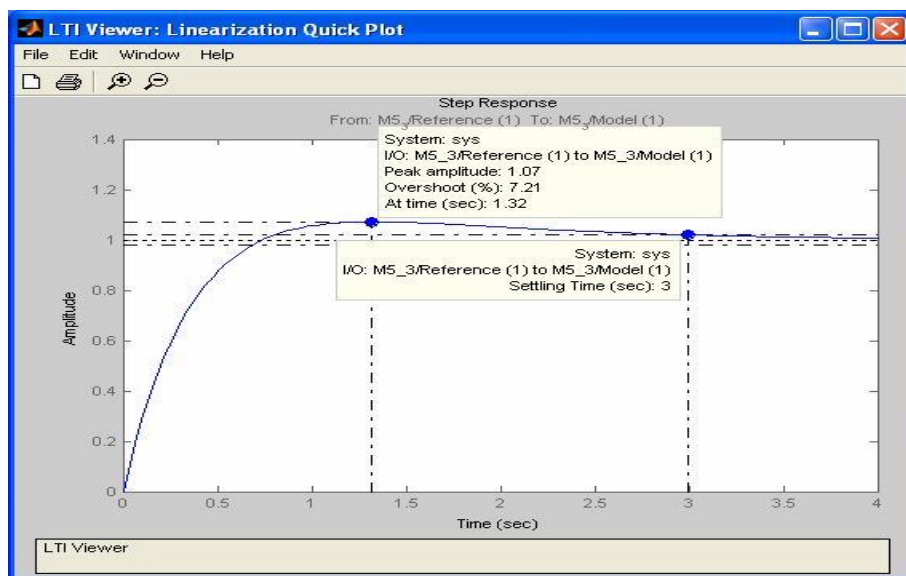
Obr. 13.17 Control and Estimation Tools Manager

Na karte **Analysis I/Os** zvolíme linearizáciu vstupno-výstupných charakteristík kliknutím a vyberieme vstupný a výstupný bod, medzi ktorými cheme linearizovať systém. Výber vstupného bodu je vysvetlený na Obr. 13.18. Pravým tlačidlom tlačidlom myši klikneme na požadovaný spoj v Simulinkovej schéme a zo zobrazeného menu vyberieme posledný údaj **Linearization Points/Input Point**. Podobným spôsobom zvolíme tiež výstupný bod (**Linearization Points/Output Point**).



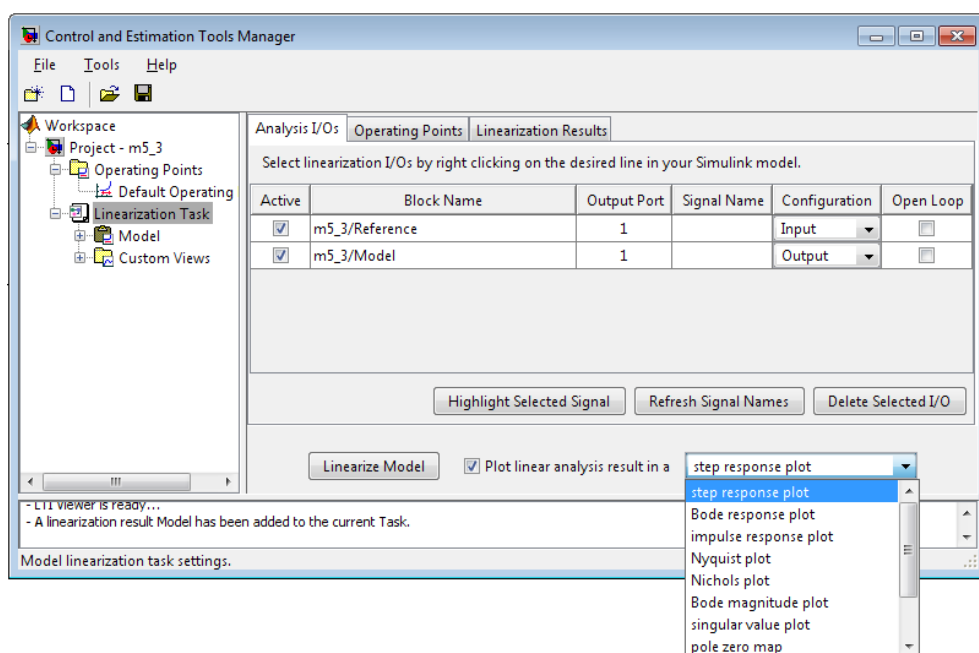
Obr. 13.18 Voľba vstupného bodu v Simulinkovej schéme pre linearizáciu systému M5.16

Ak sa vstupný a výstupný bod zobrazia v okne **Control and Estimation Tools Manager**, klikneme na tlačidlo **Linearize Model** (vľavo dole na okne), čím sa zobrazí LTI viewer a ňom prechodová charakteristika linearizovaného systému (Obr. 13.19).



Obr. 13.19 Prechodová charakteristika linearizovaného systému

Typ ododzvy možno zvoliť pomocou rozbaľovacieho menu: **Bode**, **Impulse**, **Nyquist**, **Nichols**, **Bode magnitude plot**, a **Pole-zero map** (Obr. 13.20).



Obr. 13.20 Výber možností zobrazenia charakteristík sústavy

Príklad 4

Je daný uzavretý regulačný obvod s jednotkovou spätnou väzbou a PI regulátorom:

Prenosová funcia sústavy: $G(s) = \frac{8.55}{0.5s+1}$

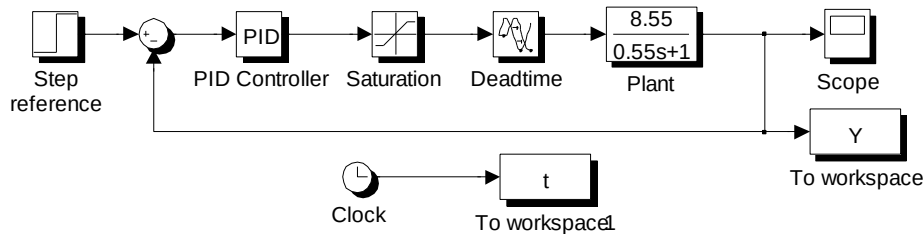
Dopravné oneskorenie sústavy: $\tau_d = 0.15$ min.

Prenos regulátora typu PI: $C(s) = 0.09 + \frac{0.95}{s}$

Charakteristika nasýtenia: jednotkový nárast, obmedzenie na hodnote =1.7.

Skok na vstupe: $U(s) = \frac{10}{s}$

Programová schéma v Simulinku je na Obr. 13.21 (PID regulátor nájdeme medzi blokmi v knižnici Simulink Extras pod Additional Linear block set). Parametre PID regulátora sú nastavené nasledovne: $P = 0.09$, $I = 0.95$ a $D = 0$.



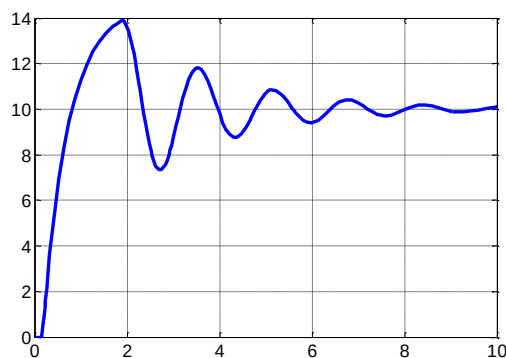
Obr. 13.21 Uzavretý regulačný obvod s PID regulátorom

Ak by sme pre zobrazenie časovej odozvy použili LTI Viewer, tento linearizuje systém a potom nakreslí odozvu linearizovaného systému. Alternatívou je preniesť výstupné údaje do pracovnej oblasti MATLABu pomocou bloku To Workspace a potom nakresliť časovú odozvu pomocou inštrukcie **plot**. Napíšme program v MATLABe pre určenie požadovaných charakteristík systému: dobu regulácie (settling time), prekmit (peak overshoot) a dobu prekmitu (peak time):

```
time = t.signals.values;
y = Y.signals.values;
plot(time,y 'LineWidth',2);
title('Step response'); xlabel('Time (min)'); ylabel('Output');
ymax = max(y);
step_size = 10;
peak_overshoot = ((ymax-step_size)/step_size)*100
index_peak = find(y == ymax);
peak_time = time(index_peak)
s = length(time);
while((y(s)>=0.95*step_size) & (y(s)<=1.05*step_size))
    s = s-1;
end
settling_time = time(s)
```

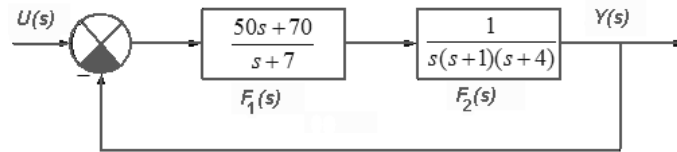
V MATLABe dostávame nasledovný výstup:

```
peak_overshoot =
    39.0058
peak_time =
    1.9339
settling_time =
    5.9739
```



Obr. 13.22 Prechodová charakteristika regulačného obvodu z Obr. 13.21

Príklad 5: Použite LTI viewer pre získanie a popis časej ododzvy a logaritmických frekvenčných charakteristík systému spolu s popisom príslušných parametrov pre uzavretý obvod na Obr. 13.23.



Obr. 13.23 Bloková schéma ku príkladu 5

Zapíšeme nasledovné inštrukcie:

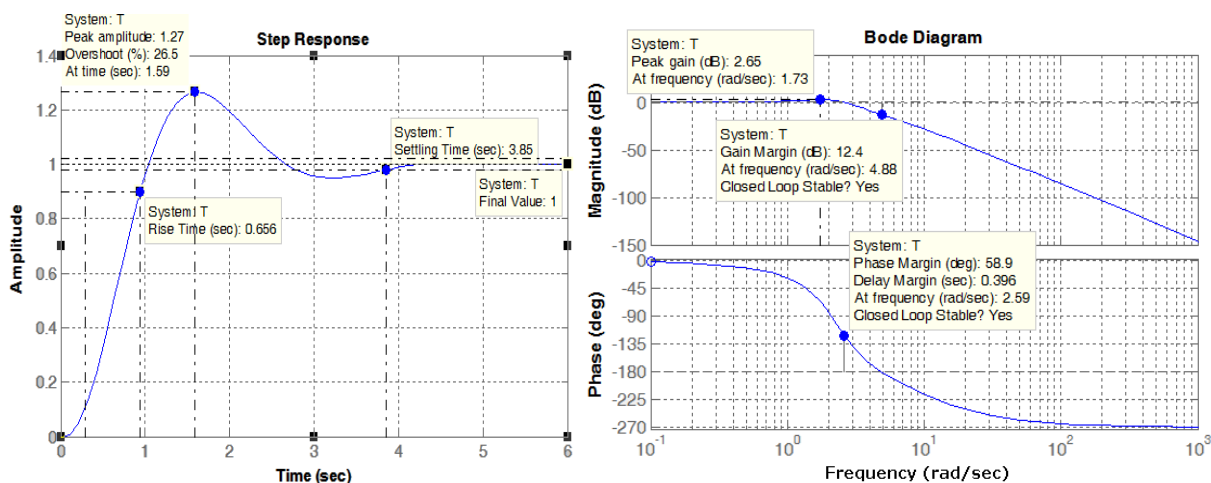
```
F1 = tf([50 70], [1 7]);
F2 = tf([1], [1 5 4 0]);
H = 1;
G = series(F1, F2);
F = feedback(G, 1)
ltiview('step', T)
```

čím dostaneme nasledovný výstup:

Transfer function:

$$\frac{50s + 70}{s^4 + 12s^3 + 39s^2 + 78s + 70}$$

Prechodová charakteristika je zobrazená na Obr. 13.24a a Bodeho charakteristiky sú na Obr. 13.24b. Pomocou tlačidla pravej myši určím požadované špecifikácie v každom grafe (mriežku, zobrazenie parametrov a pod.). Kliknutím pravou priamo na body vieme meniť umiestnenie popisu jednotlivých parametrov voči danému bodu (vpravo-vľavo, hore-dolu) a veľkosť fontu popisu.



Obr. 13.24 Analýza uzavretého regulačného obvodu z Obr. 13.23 pomocou LTI viewer spolu s popisom parametrov charakteristík: a) Časová ododzva – prechodová charakteristika; b) .

Záver: pre analýzu systémov v časovej oblasti je použitie LTI viewera veľmi výhodné – požadovaný graf v časovej alebo frekvenčnej oblasti možno jednoducho zvoliť pomocou pravého tlačidla myši. Okrem toho po kliknutí na daný bod vieme meniť zobrazenie popiskov a taktiž kliknutím do oblasti popisu osí vieme meniť veľkosť popisu grafu, označenie osí i samotného grafu.

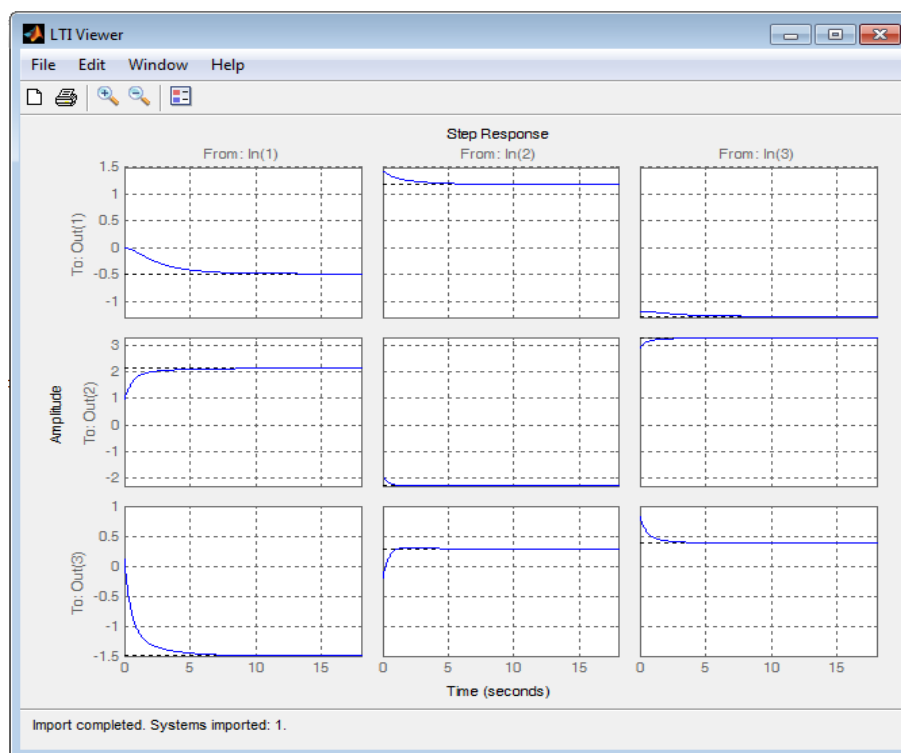
13.2.3 Analýza modelov MIMO systémov pomocou LTI viewer

Prehľad analýzy MIMO systémov (Multi-Input/Multi-Output – systémy s viacerými vstupmi a výstupmi). If you import a MIMO system, or an LTI array containing multiple linear models, you can use special features of the right-click menu to group the response plots by input/output (I/O) pairs or select individual plots for display.

Napríklad pre náhodne generované prenosy MIMO systému s 3-vstupmi a 3-výstupmi otvoríme **LTI Viewer** z priradeného riadka nasledovne:

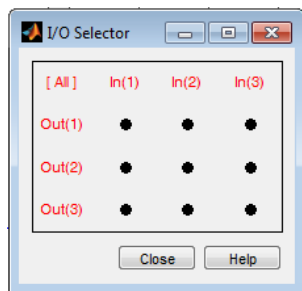
```
>> sys_mimo=rss(3,3,3);
>> ltiview(sys_mimo);
```

Dostávame maticu prenosových funkcií, kde jednotlivé prenosové funkcie sú prehľadne usporiadané v matici 3x3. Prechodové charakteristiky sú zobrazené na Obr. 13.25 (po voľbe **grid** – voľba kliknutím pravým tlačidlom myši do grafu), kde jednotlivé riadky platia pre príslušný výstup a jednotlivé stĺpce platia pre daný vstup.

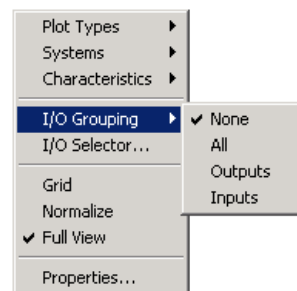


Obr. 13.25 Základné okno LTI viewera pre MIMO systémy

I/O Selector. Po importovaní matice prenosových funkcií klikneme do oblasti grafu a zvolíme I/O Selector (Obr. 13.26). Okno umožňuje po kliknutí na tlačidlo zvoliť zobrazenie (Obr. 13.27):



Obr. 13.26 I/O Selector – výber grafov pre zobrazenie

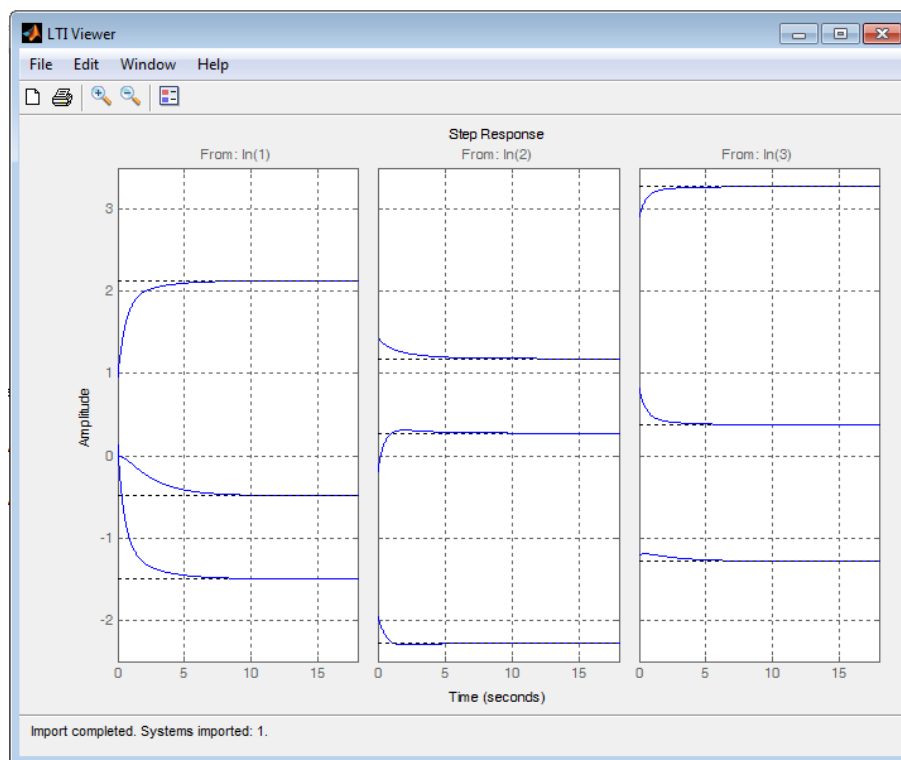


Obr. 13.27 Voľba zobrazenia MIMO systémov

- jeden zvolený graf (only one at a time) by clicking on a button
- výber grafu edzi vstupom a výstupom – kliknutím v okne na zvolený vstup a výstup
- všetky grafy

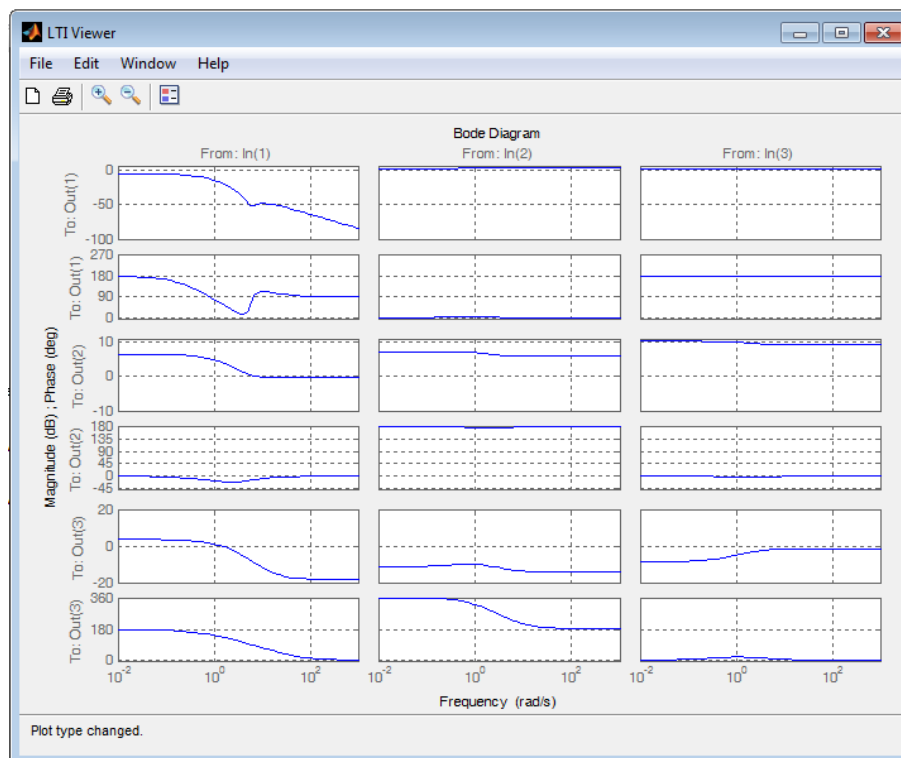
Grouping for MIMO Models. Podobne možno zoskupiť grafy podľa vstupov, výstupov alebo oboch po kliknutí pravým tlačidlom myši do oblasti grafu, výberom **I/O Grouping** a potom **Inputs**, **Outputs**, alebo **All** (Obr. 13.44).

Ak napríklad zvolíme **Outputs**, LTI Viewer rekonfiguruje grafy do 3 vstupov – každý pre jeden výstup (Obr. 13.28). Ak sa chceme vrátiť ku pôvodnej matici prechodových charakteristík, zvolíme „None“.



Obr. 13.28 Výber grafov pre jednotlivé vstupy – zľava: všetky výstupy pre prvý vstup, atď.

Ostatné prvky pre ovládanie režimov a popis grafov platia tie isté, ako boli uvedené pri popise LTI viewer. Napr. je možné zobraziť Bodeho frekvenčné charakteristiky (Obr. 13.29).



Obr. 13.29 Zobrazenie matice Bodeho charakteristík pre MIMO systém 3x3

13.3 Návrh regulátorov pomocou SISO Design Tool

<http://www.nptel.ac.in/courses/108102044//>

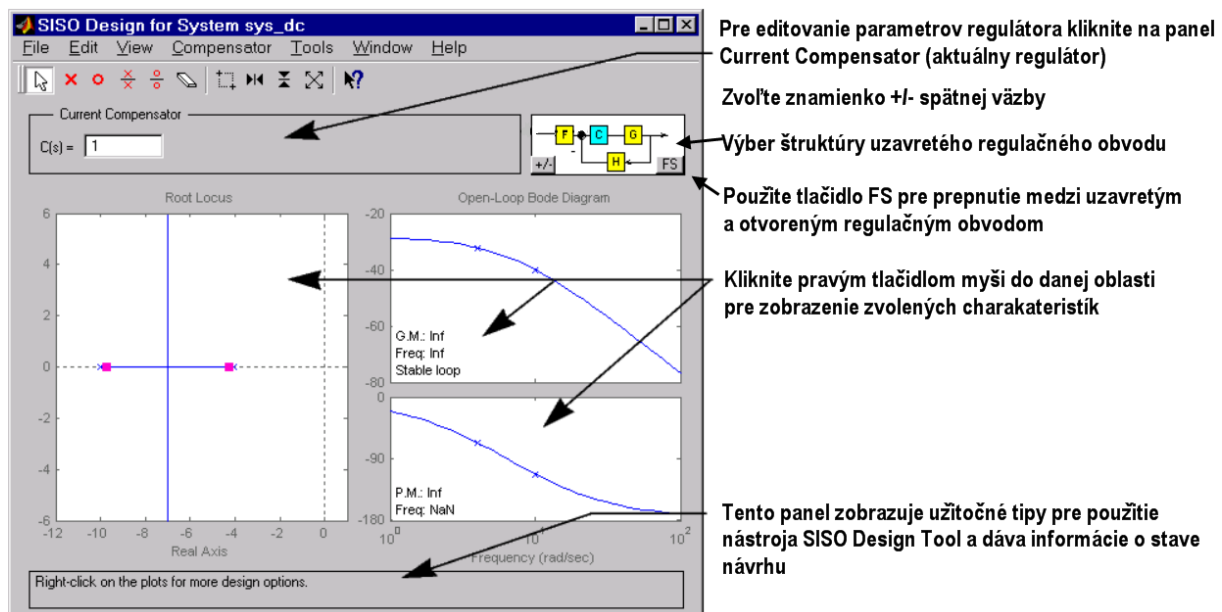
<http://radio.feld.cvut.cz/matlab/toolbox/control/getstart/design2.html>

SISO (Single-Input/Single-Output – jeden vstup/jeden výstup) **Design Tool** je grafické používateľské rozhranie, ktoré umožňuje navrhovať SISO regulátory na základe koreňových trajektórií a Bodeho logaritmických frekvenčných charakteristík (LAFCH) v uzavretom a otvorenom regulačnom obvode. Je možné rozmiestniť póly systému pozdĺž geometrického miesta koreňov a odčítat' zosilnenie, útlm a vlastnú frekvenciu a rozmiestnenie pólov. Tieto zmeny sa okamžite premietnu do LAFCH a súčasne sa zobrazí časová ododzva systému. Pri zobrazení v Bodeho charakteristikách možno posúvať logaritmickú amplitúdovú charakteristiku v horizontálnom smere a tak meniť zosilnenie obvodu, frekvenciu rezu, fázovú bezpečnosť a posúdiť stabilitu obvodu. Používateľ môže pridávať póly, nuly a regulátory, ktoré možno interaktívne meniť a tak pozorovať vplyv polohy týchto 'pólov a núl na koreňové trajektórie, časové a frekvenčné charakteristiky.

1. Odštartovanie SISO Design Tool (Obr. 13.30) - pomocou napísania inštrukcie v oken MTLABU, alebo jeho vyvolaním z m-súboru:

```
>> sisotool
```

V blokovej schéme zobrazenej v pravom hornom rohu obrazovky **F** predstavuje predkompenzátor/filter, **C** je regulátor, **G** je prenos regulovanej sústavy a **H** je prenos v spätnej väzby (prenos prevodníka a filtra).



Obr. 13.30 SISO Design Tool window

Pozn.: pre naučenie sa práce so SISO Design Tool je vhodné preštudovať naprogramovaný príklad jednosmerného servomotora, ktorý vyvoláme pomocou inštrukcií:

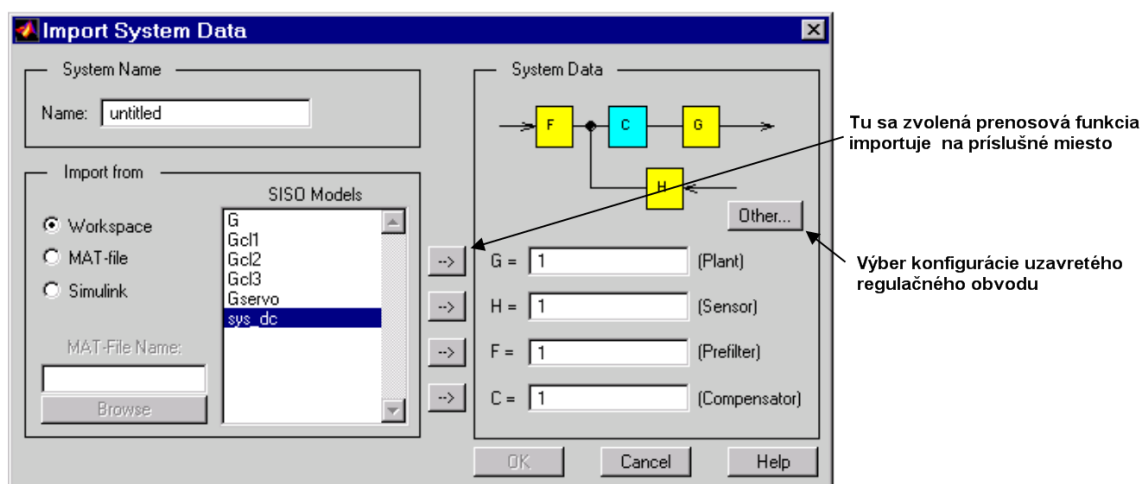
```
load ltiexamples
sisotool(sys_dc)
```

Interaktívny návod na použitie tohto nástroja možno získať v menu **Help** zvolením **SISO Design Tool Help**.

2. Vytvorenie časovo-invariantných prenosových funkcií: Prenosové funkcie otvoreného obvodu vytvoríme buď priamo v pracovnom priestore MATLABu, alebo pomocou m-súboru.

V tomto príklade uvažujeme s prenosom otvoreného systému v tvare: $G(s) = \frac{4500}{s^2 + 361.2s}$

3. Vytvorenie uzavretého obvodu pre SISO Design Tool: Zvolíme **Import...** vo **File** menu, čím sa zobrazí okno **Import System Data** (Obr. 13.31).

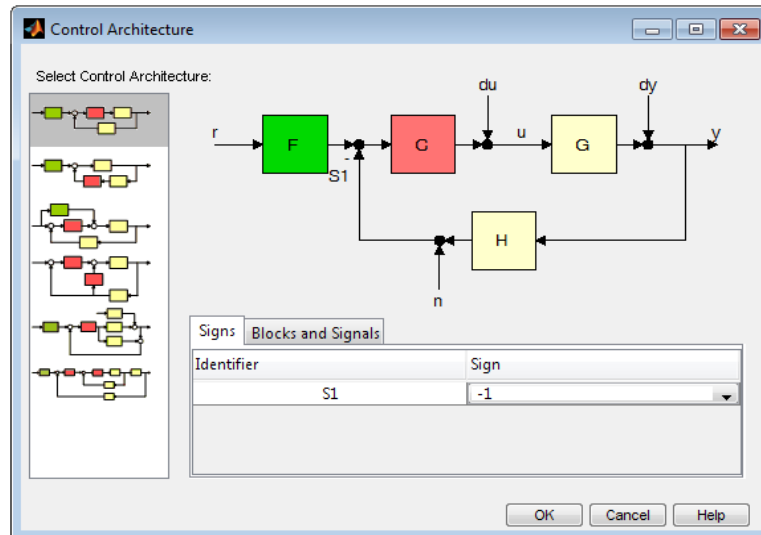


Obr. 13.31 Okno SISO Design Tool

LTI objekty zvolíme zo zoznamu **SISO Models**, ktoré môžu byť importované do jedného z blokov systému (**G**, **H**, **F**, alebo **C**) nachádzajúcich sa v časti okna **System Data**.

Priamo do okien pre zadávanie presnosových funkcií na Obr. 13.26Aj možno zahrnúť samotnú inštrukciu **tf(num, den)** pre generovanie čitateľa a menovateľa presnosovej funkcie.

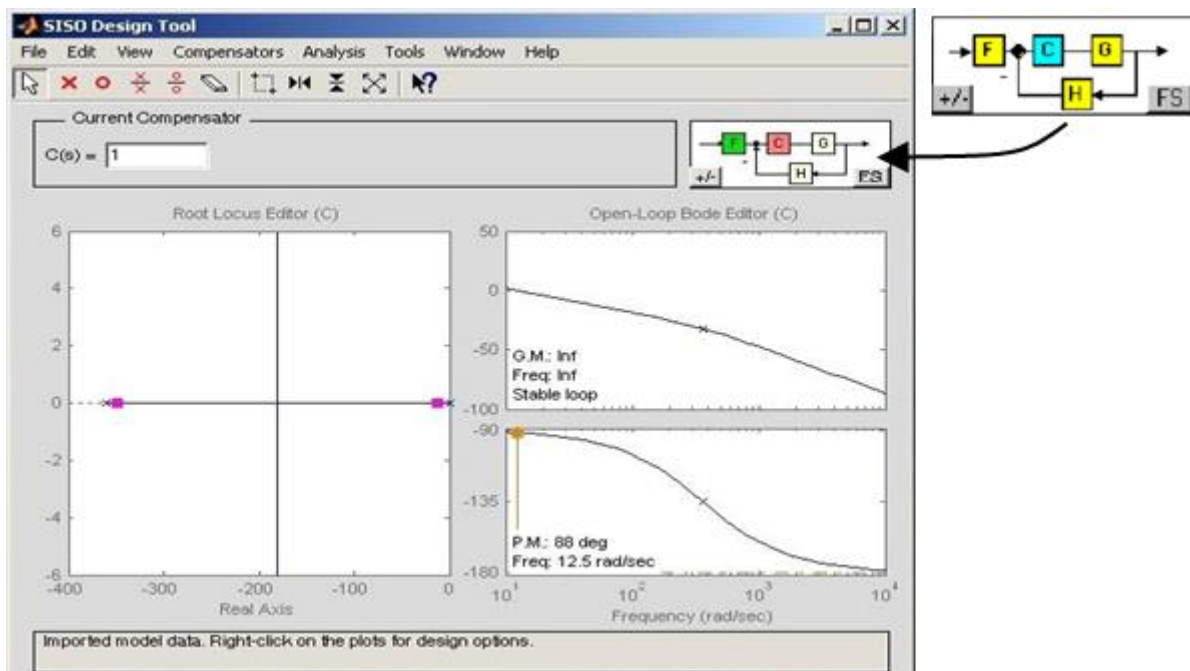
Stlačíme tlačidlo the **Other...** pre rotovanie výberom spätnoväzobných štruktúr a takto zvolíme požadovanú konfiguráciu. Alternatívne je to možné vykonať pootčením tlačidla **FS** (vpravo dole od schémy uzavretého obvodu v okne **SISO Design Tool** window (Obr. 13.23). Tieto možnosti sú zobrazené na Obr. 13.32.



Obr. 13.32 Možnosti voľby konfigurácie uzavretého obvodu

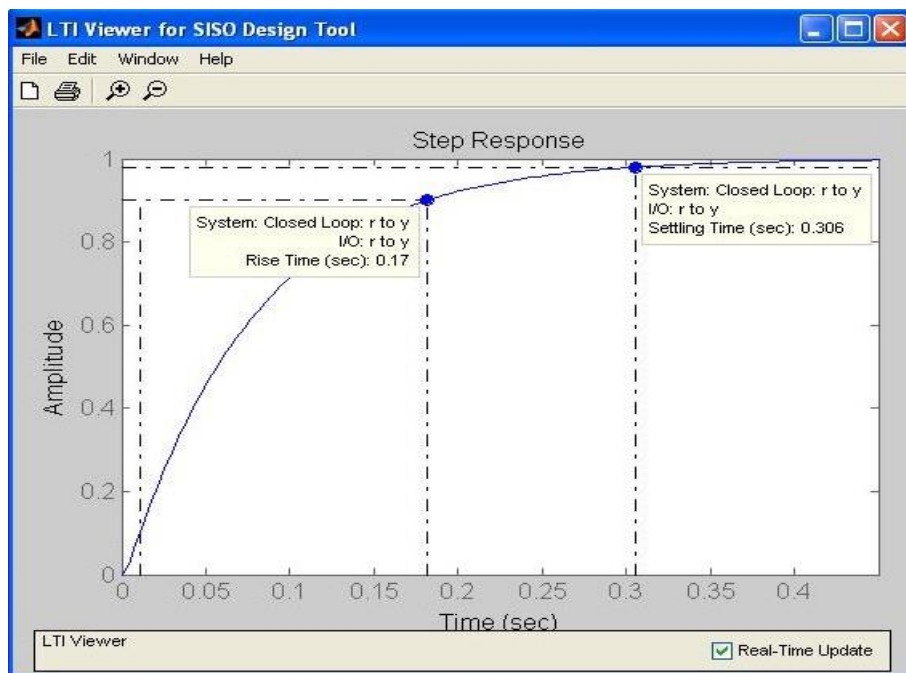
V závislosti od zvolenej spätnoväzobnej štruktúry sa budú zobrazovať tiež okoreňové trajektórie a Bodeho logaritmické frekvenčné charakteristiky (LAFCH) (Obr. 13.28).

4. Práca so SISO Design Tool: Po uzavretí okna **Import System Data**, okno **SISO Design Tool** teraz zobrazuje koreňové charakteristiky a LAFCH (Obr. 13.33).



Obr. 13.33 Koreňové trajektórie a logaritmické frekvenčné charakteristiky v okne SISO Design Tool

Požadovaný typ grafu a charakteristiku systému zvolíme v menu **Analysis** okna **LTI Viewer for SISO Design Tool** (Obr. 13.34) pomocou kliknutí pravdou myšou do oblasti grafu.



Obr. 13.34 Časová ododzva systému v okne SISO Design Tool

Zosilnenie regulačnej slučky možno zmeniť tromi spôsobmi:

1. V okne **Root Locus Editor**: pomocou myši môžeme posúvať póly systému (červené štvorčeky) pozdĺž koreňovej trajektórie. Súčasne sa interaktívne mení aj Bodeho charakteristika a časová ododzva uzavretého obvodu. Hodnota zosilnenia sa zobrazí v časti **Current Compensator**.
2. V okne **Open-Loop Bode Editor**: na Bodeho amplitúdovú charakteristiku položíme kurzor myši položíme, čím zmení svoj tvar. Po uchytení charakteristiky myšou možno ju posúvať vo zvislom smere. Súčasne sa interaktívne mení poloha pólov a časová ododzva uzavretého systému.
3. V okne nastavenia regulátora (**Current Editor**). Požadované zosilnenie sa napíše do okna označeného **C(s)=**.

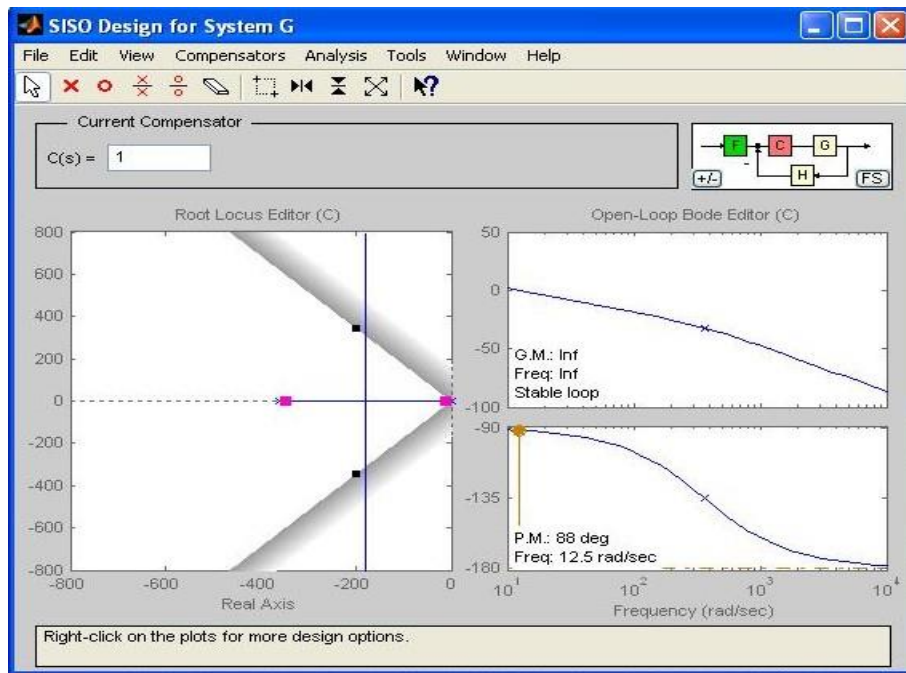
V ľavom dolnom okne Bodeho charakteristík možno odčítať hodnotu zosilnenia a fazu v danom bode a z charakteristík súčasne odčítať frekvenciu rezu a fázovú bezpečnosť. Súčasne zobrazuje nápis, či uzavretý systém je stabilný, alebo nestabilný.

5. Obmedzenie návrhu: pri návrhu možno pridať do návrhu aj určité obmedzenia. Klikneme pravou myšou na koreňovú trajektóriu a v zobrazenom menu zvolíme **Design Requirements / New...** (pri úprave existujúcich obmedzení zvolíme **Edit...**). Napr. na Obr. 13.35 je zobrazené obmedzenie návrhu: pre tlmenie systému (damping ratio) =0.5.



Obr. 13.35 Adding design constraints

Po stlačení OK sa v oblasti koreňov zobrazí oblasť v ktorej majú ležať korene systému, aby spĺňovali danú podmienku, kde tlmenie systému je menšie ako 0,5 (vytieňovaná oblasť), kde je rovné 0,5 (čiara tlmenia), a kde je väčšie, hodnota 0,5 (Obr. 13.36).



Obr. 13.36 Pridanie obmedzení (podmienok) návrhu (tlmenie systému > 0,5)

Požadované vlastnosti systému možno zadať tiež do frekvenčných charakteristík. Zobrazia sa dva štvorce, ktoré možno posúvať myšou.

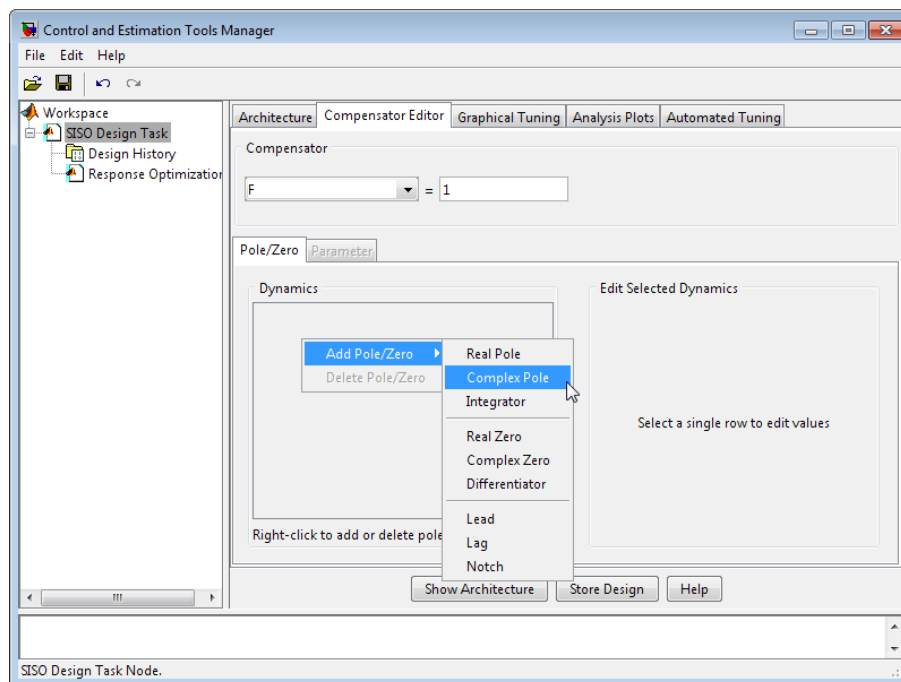
6. Vlastnosti grafu: Kliknutím pravou myšou do okna Bodeho charakteristík a výberom **Properties...** sa zobrazí okno **Property Editor**. Pomocou údajov v tomto okne možno riadiť niektoré vlastnosti grafu ako označenie osí grafu a mierku zobrazenia (limity osí).

7. Pridanie núl, pólov a regulátorov. Tieto možno pridať po kliknutí pravou myšou na charakteristiku a zvolením položky z menu **Add real pole; Add real zero; Add complex pole; Add complex zero; Delete pole/zero;** atď. Týmto možno meniť vlastnosti výsledného systému. Ak chceme pridať pól (alebo komplexne združenú dvojicu pólov, po voľbe z menu klikneme ľavou myšou do priestoru koreňov (alebo na Bodeho amplitúdovú charakteristiku), kde chceme pridať pól/póly. Podobne môžeme pridať/vymazať póly zvolením vhodnej ikony na paneli, ktorý sa zobrazuje nad grafom.

Súčasne sa odpovedajúcim spôsobom mení regulátor (viď **Compensator Editor** v **Control and Estimation Tools Manager**). Zmenu polohy pólu dosiahneme jeho posúvaním po oblasti, alebo prepísaním hodnoty v **Control and Estimation Tools Manager**.

8. Editovanie regulátorov a vstupných filtrov: hodnoty núl a pólov regulátora a vstupného filtra možno editovať niekoľkými spôsobmi; napr. pomocou **Compensator Editor**, kde pred editovaním zvolíme buď regulátor (zvoliť **C**) alebo vstupný filter (**F**) - Obr. 13.37.

Kliknutím pravou myšou do oblasti **Dynamics** sa otvorí menu, kde môžeme pridať alebo uberať póly a tak získať požadovanú dynamiku systému.



Obr. 13.37 Editovanie regulátora a vstupného filtra

Príklad: Uvažujte zjednodušenú prenosovú funkciu pohonu $G(s) = \frac{4500}{s^2 + 361.2s}$, ktorú zapíšeme:

`num=4500; den=[1 361.2 0]; G=tf(num,den)`

Navrhnite kaskádny regulátor pomocou SISO Design Tool v interaktívnom móde tak, aby regulačný obvod s jednotkovou spätnou väzbou splňoval nasledovné kritériá:

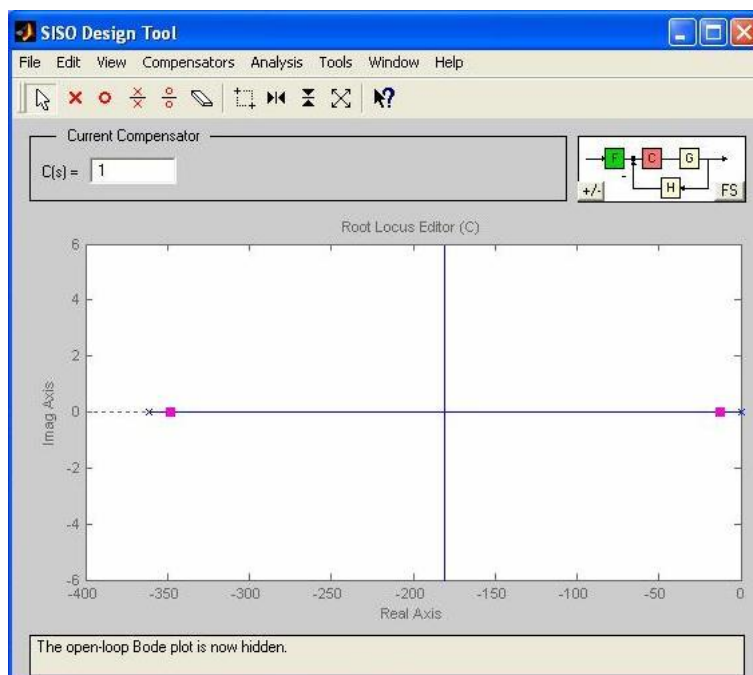
- chyba v ustálenom stave (pri odozve systému na jednotkový skok ≤ 0.000443)
- maximálny prekmit $\leq 5\%$
- doba nárastu $t_n \leq 0.002$ s

Riešenie začíname vytvorením prenosovej funkcie **G**:

```
>> num=4500;
>> den=[1 361.2 0];
>> G=tf(num,den);
```

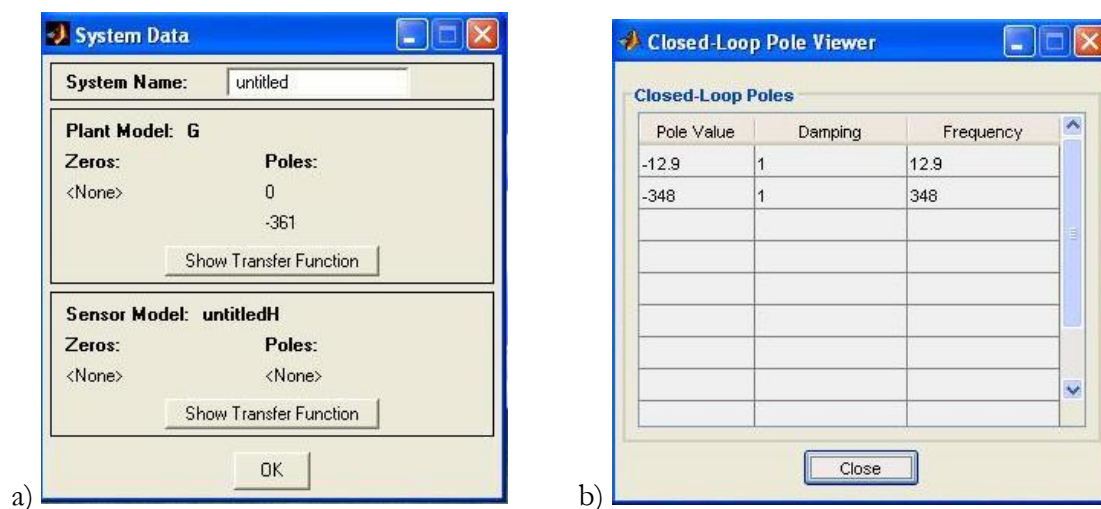
Model importujeme do **SISO Design Tool** kliknutím na **File** a potom **Import...**

Najprv navrhujeme proporcionálny regulátor. Koreňové trajektórie systému zistíme kliknutím na **View** v hlavnom menu, kde zvolíme **Root Locus** (Obr. 13.38). Graf platí pre $K=1$.



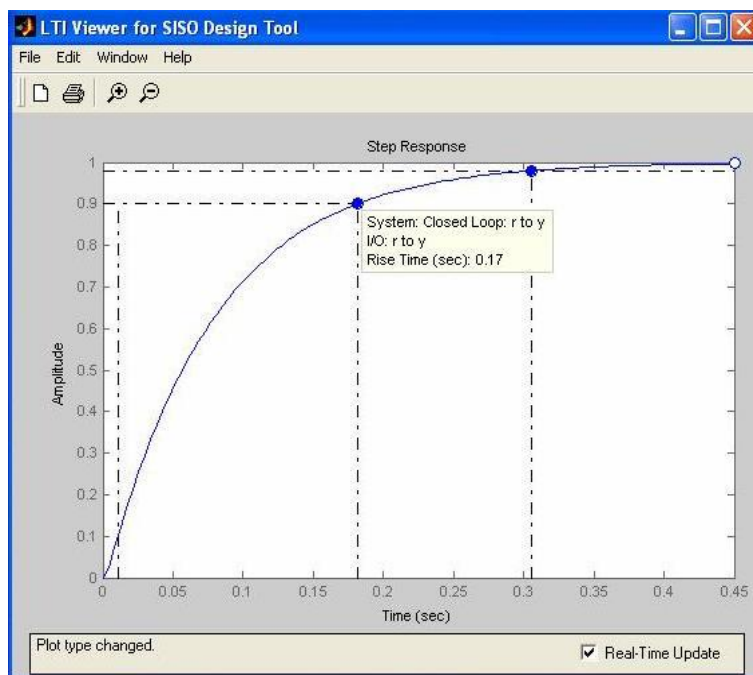
Obr. 13.38 Koreňové trajektórie pôvodného systému pre $K = 1$

Zobrazenie numerických hodnôt núl a pólov funkcií **G** a **H** dostaneme z menu **View**, kde zvolíme **System Data**, (Obr. 13.39a) alebo, dvojklikom na blok **G** or **H** v pravom hornom rohu blokovej schémy v okne **SISO Design Tool**. Údaje sa zobrazia v okne **System Data** (Obr. 13.39a). Hodnoty pólov systému získame a menu **View** voľbou **Closed-Loop Poles** (Obr. 13.39b).



Obr. 13.39 Postup pri zisťovaní numerických hodnôt núl a pólov uzavretého systému

Prechodovú charakteristiku uzavretého systému pre $K = 1$ dostaneme z hlavného menu **Analysis** voľbou **Response to Step Command**. Výberom zo submenu **Systems** a **Characteristics** získame prechodovú charakteristiku (Obr. 13.40).

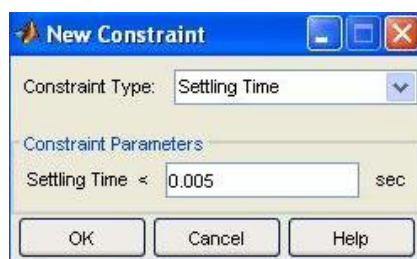


Obr. 13.40 Prechodová charakteristika uzavretého systému s proporcionálnym regulátorom pre $K=1$

V prvom kroku návrhu regulátora použijeme kritériá návrhu zabudované v **SISO Design Tool** aby sme určili oblasti polohy pólov uzavretého systému na koreňových trajektoriách. Pre pridanie obmedzení návrhu v **Edit** menu zvolíme **Root Locus**. Pre návrh obmedzení vyberieme **New**. Táto voľba **Design Constraints** umožňuje návrhateľovi použiť nasledovné kritériá návrhu:

- dobu regulácie (*Settling time*)
- veľkosť prekmitu (*Percent overshoot*)
- tlmenie systému (*Damping ratio*)
- prirodzenú frekvenciu systému (*Natural frequency*)

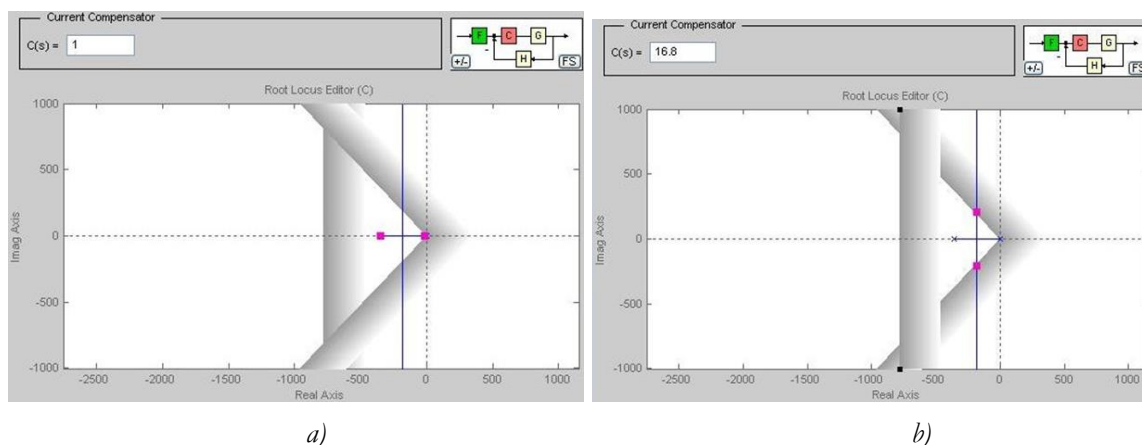
Ako hlavné kritériá návrhu použijeme dobu regulácie a veľkosť prekmitu. Po návrhu regulátora vyhovujúceho týmto kritériám určíme, či systém spĺňa zadané kritériá a príp. ďalšie doplnkové kritériá. Obr. 13.41 ukazuje nastavenie doby regulácie. Podobným spôsobom sa zadá veľkosť prekmitu..



Obr. 13.41 Nastavenie doby regulácie (Settling Time)

Obr. 13.42 zobrazuje oblasti požadovanej polohy pólov na koreňových trajektoriách s uvažovaním obmedzení návrhu (poznamenajme, že mierka bola modifikovaná kliknutím pravým tlačidlom myši na **Properties** a voľbou **Limits**). Po kliknutí ľavým tlačidlom myši do oblasti grafu odstránime čierne štvorce na charakteristike. Samozrejme, póly uzavretého systému pre $K=1$ neležia v požadovanej oblasti. Sivé pásma určujú hranice oblasti v ktorých poloha pólov už neumožňuje splniť zadané podmienky regulácie. Vertikálne pásmo označuje hranicu oblasti, kde už nie je možné splniť dobu regulácie. Vpravo od pásma a sivé pásma na priamkach

tlmenia (šikmé); označujú hranice oblasti, kde poloha pólov nedovoľuje splniť zadanú veľkosť prekmitu.

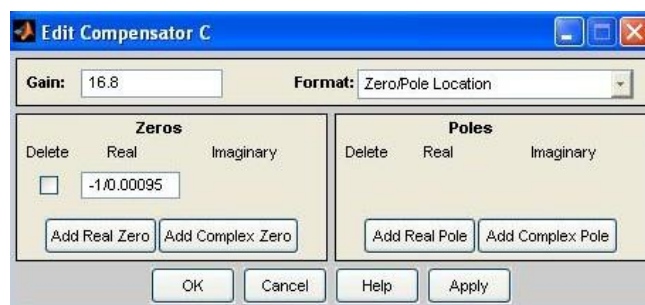


Obr. 13.42 Hranice oblasti polohy pólov pre splnenie podmienok regulačného pochodu – doby regulácie a veľkosti prekmitu

Zmena zosilnenia K ovplyvňuje polohu pólov. V okne **Root Locus, C(s)** predstavuje prenosovú funkciu regulátora. Obr. 13.37a odpovedá stave, kedy $C(s) = K = 1$. Ak $C(s)$ sa zväčšuje, zväčšuje sa aj hodnota zosilnenia K , vplyvom ktorého pľy sa približujú k sebe na reálnej osi, stertnú sa a ďalším zvyšovaním zosilnenia dostávame komplexnú dvojicu združených pólov, ktoré sa ďalším zvyšovaním szosilnenia od seba vzdľalujú (na Obr. 13.42b pre $K = 16.8$ dostávame polohu pólov uzavretého systému na hranici tlmenia. Veľkosť prekmitu je splnená, nie je však splnená podmienka doby regulácie.

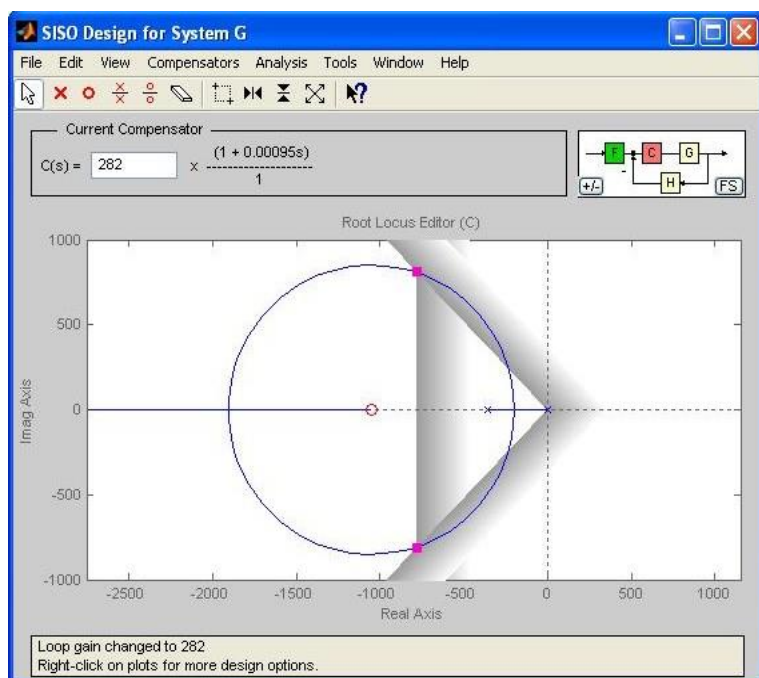
Pre jej splnenia póly uzavretého systému musia ležať vľavo od hranice vyznačujúcej dobu regulácie a na priamke tlmenia. Pre splnenie tejto podmienky nie je možné použiť proporcionálny regulátor – požadovanú polohu pólov nedostaneme pri žiadnej hodnote zosilnenia K . Pre splnenie tejto podmienky použijeme PD regulátor $C(s) = K(1 + sT_D)$. Pridanú nulu pre $s = -1/T_D$ treba posunúť čonajviac doľava, čím sa posunú koreňové trajaktórie doľava.. Vyskúšame rôzne hodnoty: $s = -1/0.0005$; $-1/0.001$; $-1/0.0015$; $-1/0.002$,... Vyhovujúce výsledky dostávame pri $s = -1/0.00095$.

Pre pridanie nuly prenosu do regulátora klikneme na blok **C** v **blokovvej schéme v pravom hornom rohu** na Obr. 13.43. Obr. 13.38 zobrazuje zadanie PD regulátora v okne **Edit Compensator C**.

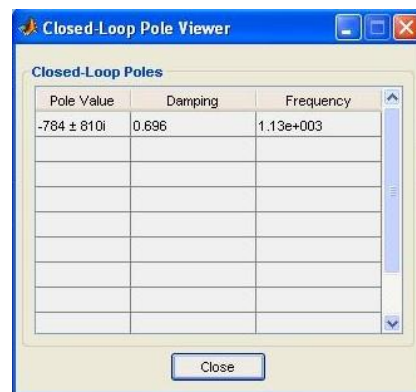


Obr. 13.43 Okno Edit Compensator C

Obr. 13.44 zobrazuje graf koreňových trajektórií pre $s = -1/0.00095$. Poznamenajme, že póly uzavretého systému na požadované miesta rozmiestnime pomocou myši. Hodnota zosilnenia K , pomocou ktorej dostaneme dominantné póly uzavretého systému na požadované miesto (Obr. 13.44), je 282. Poloha pólov uzavretého systému je uvedená na Obr. 13.45.

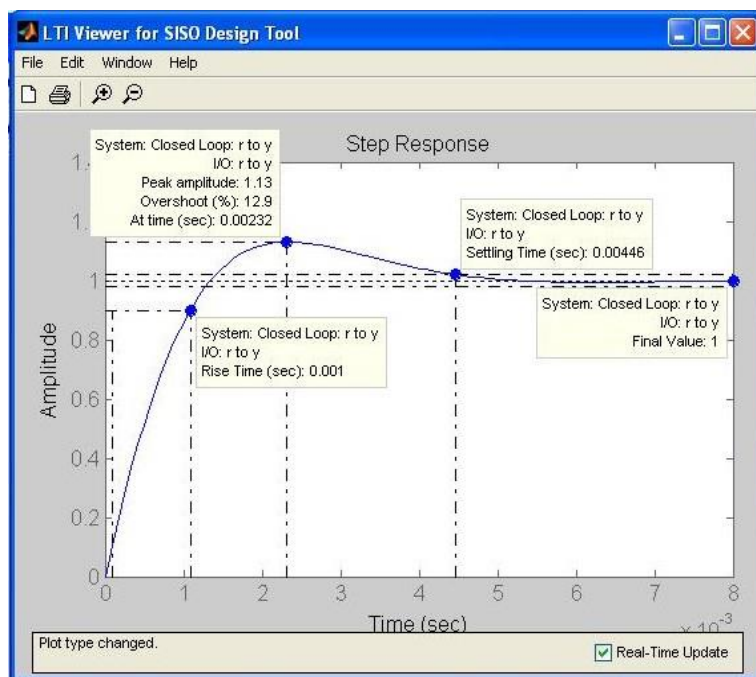


Obr. 13.44 Poloha domiantných pólov systému pri $K = 282$



Obr. 13.45 Póly systému

Prechodová charakteristika regulovaného systému je na Obr. 13.46. Navrhnutý systém spĺňa všetky zadané kritériá, o čom sa môžeme presvedčiť kliknutím na charakteristické body charakteristiky, čím získame požadovanú informáciu v danom bode.



Obr. 13.46 Prechodová charakteristika systému

13.4 Návrh grafického používateľského interfejsu v MATLABe

V tejto podkapitole sa budeme zaoberať rozšírením programu MATLAB; konkrétne grafickým užívateľským rozhraním (Graphical User Interface - GUI), ktoré predstavuje rozhranie medzi používateľom a programovou časťou. Slúži na zjednodušenie ovládania popri prípade sledovanie parametrov, rôznych charakteristík a pod., pričom využíva základné prvky ako sú tlačidlá, posúvače, menu, zobrazovacie prvky a mnoho iných ktoré sa pre správnu funkčnosť prispôbia v programovej časti (tzv. callback). GUI takto dovoľuje používateľovi vykonávať interaktívne úlohy. GUI takto poskytuje používateľovi možnosť riadenia, príp. zásah do riadiaceho procesu a vizuálnu spätnú väzbu zobrazením dôležitých informácií z daného procesu. Veľkou výhodou je, že používateľ nemusí vytvárať programy alebo zadávať príkazy do príkazového riadku a teda ani nepotrebuje poznať podrobnosti o samotnej realizácii úlohy. Poznamenajme, že GUI sa navyžíva iba v tu uvedenom prípade riešenia rôznych úloh z analýzy a syntézy dynamických systémov, ale aj pri riadení externých zariadení a zobrazovaní ich charakteristík, v prípade, že počítač je cez I/O rozhranie spojený s externým zariadením.

13.4.1 Základy dizajnu grafických používateľských rozhraní

Grafické používateľské rozhranie (angl. Graphical User Interface), skratka GUI je používateľské rozhranie, ktoré umožňuje ovládať elektronické zariadenie pomocou súboru interaktívnych obrazových prvkov. Tie spúšťajú príkazy a umožňujú priamu interakciu so zariadením. Dizajn a architektúra používateľského rozhrania rozhoduje o jednoduchosti a pohodlí používania aplikácií.

V súčasnosti je navrhovanie grafického rozhrania samostatná profesná disciplína vyžadujúca odborné znalosti z ergonómie, psychológie a dizajnu vizuálnych komunikácií.

Proces tvorby teda zahŕňa tieto kroky [68]:

- používateľská analýza (ako bude používateľ používať aplikáciu, ako doplní aplikácia zaužívaný workflow, ako technicky skúsený je používateľ, aké zobrazenie bude najvhodnejšie)
- definovanie informačnej architektúry (architektúry aplikácie)
- tvorba prototypu (návrh jednoduchých modelov aplikácie)
- grafický dizajn rozhrania (návrh vizuálneho spracovania aplikácie)
- testovanie používateľmi (overenie a testovanie aplikácie pri jej používaní)

Pri návrhu dizajnu GUI je potrebné dodržať nasledujúce základné princípy:

- princíp definovania používateľa (aké sú jeho potreby, skúsenosti a vedomosti),
- princíp skúsenosti (využitie správania sa a vzhľadu zo systémov, s ktorými má používateľ skúsenosť),
- princíp viditeľnosti funkcií (jednoduchosť a jednoznačnosť zobrazenia funkcií, ktoré má používateľ k dispozícii),
- princíp konzistencie (funkcie a správanie sa aplikácie musí byť konzistentné v každej jej časti),
- princíp zobrazenia stavu (GUI musí odrážať zmenu stavu aplikácie),
- princíp zamerania (dôležité súčasti GUI musia byť pre používateľa jednoducho viditeľné),
- princíp pomoci (pochopenie pomoci, ktorú používateľ pri práci s aplikáciou potrebuje),
- princíp bezpečnosti (rozhranie aplikácie musí používateľovi poskytovať pocit bezpečia pri jej používaní, napr. dvojitým potvrdzovaním niektorých funkcií),

- princíp kontextu (rozhranie a funkcie musia reflektovať kontext, v ktorom sa používajú)
- princíp estetiky (rozhranie musí pôsobiť esteticky a príjemne),
- princíp používateľského testovania (treba nechať užívateľov vyjadriť svoje názory na aplikáciu).

13.4.2 Vizuálne usporiadanie prvkov v GUI

Pri rozmiestňovaní ovládacích prvkov v GUI je potrebné brať do úvahy nasledujúce fakty:

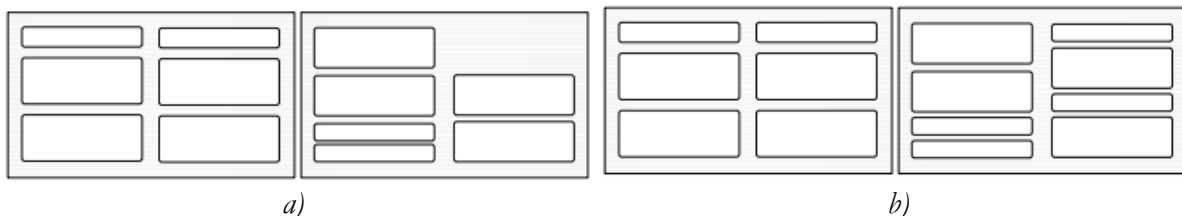
- Používateľ prezerá obsah obrazovky z ľavého horného rohu a ďalej v smere hodinových ručičiek.
- V euro-americkom prostredí čítame texty zľava doprava a zhora nadol.

Vzhľadom na to umiestňujeme najdôležitejšie prvky do ľavého horného rohu a ďalej uprednostníme smer zhora nadol, pred smerom zľava doprava, s výnimkou súvislých textov.

Cieľom je usporiadať ovládacie prvky tak, aby sme minimalizovali pohyb očí a kurzora pri ovládaní. Dobrej orientácii napomáha, ak je logické usporiadanie a zoskupovanie prvkov v GUI, ktoré by zároveň malo rešpektovať tok informácií.

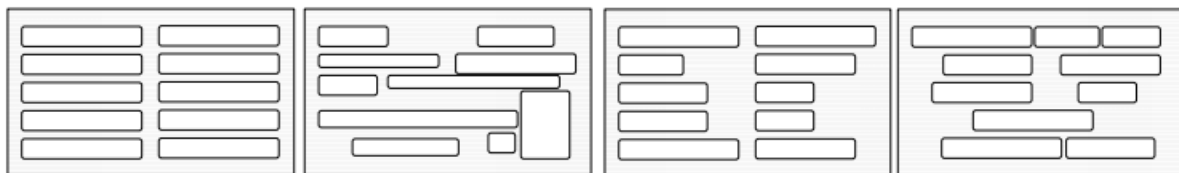
Vnímanie človeka uprednostňuje usporiadanosť, systém a jednoduchosť, z čoho vychádzajú nasledujúce zásady pre rozmiestnenie prvkov v GUI [72]:

- Zásada vyváženosti – okno má byť rovnomerne vyplnené ovládacími prvkami vo zvislom aj vodorovnom smere (Obr. 13.47a).
- Zásada súmernosti – členenie skupín ovládacích prvkov má byť rovnaké alebo podobné v pravej aj ľavej časti okna (Obr. 13.47b).



Obr. 13.47 Rozloženie prvkov GUI: a) vyvážené a nevyvážené; b) súmerné a nesúmerné

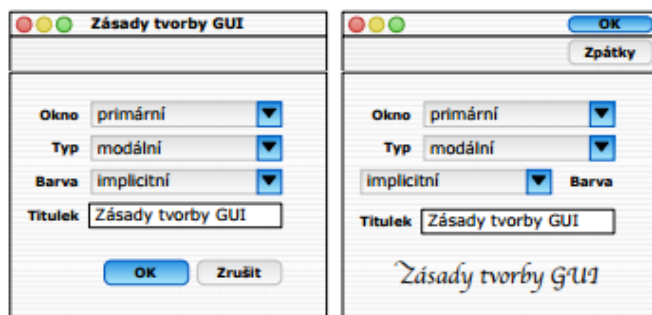
- Zásada pravidelnosti – rozmery rovnakých ovládacích prvkov, ich tvar, farba a vzdialenosť medzi nimi by mali byť jednotné všade tam, kde je to vhodné (Obr. 13.48).
- Zásada predvídateľnosti – štýl a logika usporiadania prvkov v oknách má byť totožná v celom GUI.



Obr. 13.48 Vľavo pravidelné a vpravo nepravidelné rozmiestnenie prvkov v GUI;
b) predvídateľné a atypické rozmiestnenie prvkov v GUI

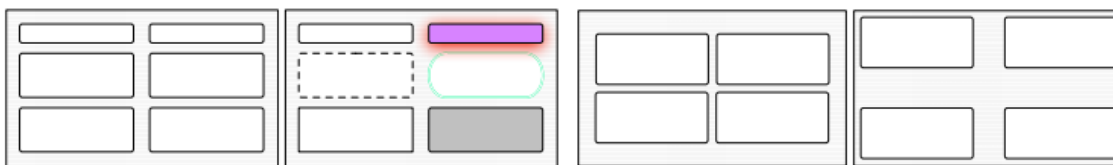
- Zásada následnosti (Obr. 13.49) – ovládacie prvky majú byť rozmiestnené podľa logiky problému, dôležité ovládacie prvky podľa zásad pre tok ovládacích prvkov (zhora-dole, zľava-doprava). Následnosť môže byť podporená aj:

- farbami – oko preferuje svetlejšie objekty pred tmavšími, farebné pred čiernobielymi, syté farby pred jemnými),
- zoskupením – oko preferuje oddelené ovládacie prvky pred zoskupenými prvkami,
- prezentáciou – oko preferuje symbol pred textom,
- rozmermi – oko preferuje veľké objekty pred malými,
- tvarom – oko preferuje jednoduché a obvyklé tvary.



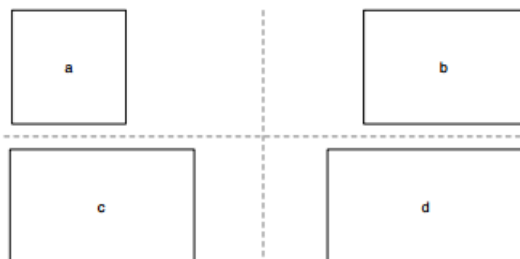
Obr. 13.49 Vľavo následnosť a vpravo náhodnosť usporiadanie prvkov GUI

- **Zásada účelnosti** – forma slúži na zvýraznenie funkcie, preto používame jednotný a jednoduchý štýl, striedame farby, tvary, atď. (Obr. 13.50).
- **Zásada jednotnosti** – ovládacie prvky by mali tvoriť jeden vizuálny celok. Ovládacie prvky s rovnakým významom majú mať rovnaké rozmery, tvary, farby, atď. (Obr. 13.50.)



Obr. 13.50 Vľavo účelnosť, vpravo spletnosť prvkov GUI jednotnosť a vpravo fragmentácia prvkov GUI

- **Zásada proporcie** (Obr. 13.51) – pri rozmiest'ovaní ovládacích prvkov dbáme na celok, na súlad jednotlivých častí, rozmery a ich vzájomné pomery. Existuje niekoľko pomerov strán, ktoré sú všeobecne považované za estetické:
 - štvorec (1 : 1) - tento základný pomer priťahuje pozornosť používateľa,
 - zlatý rez ($1 : (1 + \frac{\sqrt{5}}{2})$) je pomer, ktorý má hlbokú tradíciu vo výtvarnom umení a architektúre. Je považovaný za ideálny pomer medzi dĺžkami strán.
 - odmocnina z troch ($1 : \sqrt{3}$)



Obr. 13.51 Vhodné pomery strán a) štvorec, b) ($1 : \sqrt{2}$), c) zlatý rez, d) ($1 : \sqrt{3}$)

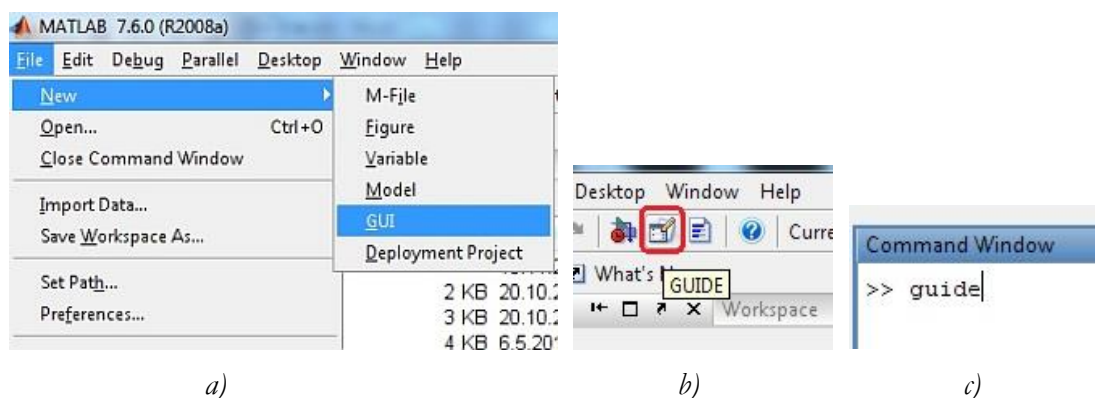
- **Zásada zoskupovania** – pre zachovanie prehľadnosti je vhodné prvky logicky zoskupovať podľa významu a účelu.

13.4.3 Popis GUIDE

GUIDE (Graphical User Interface Development Environment) je vývojárskym prostredím grafického užívateľského rozhrania programu MATLAB. Jeho nástroje zjednodušujú proces kreslenia a programovania GUI.

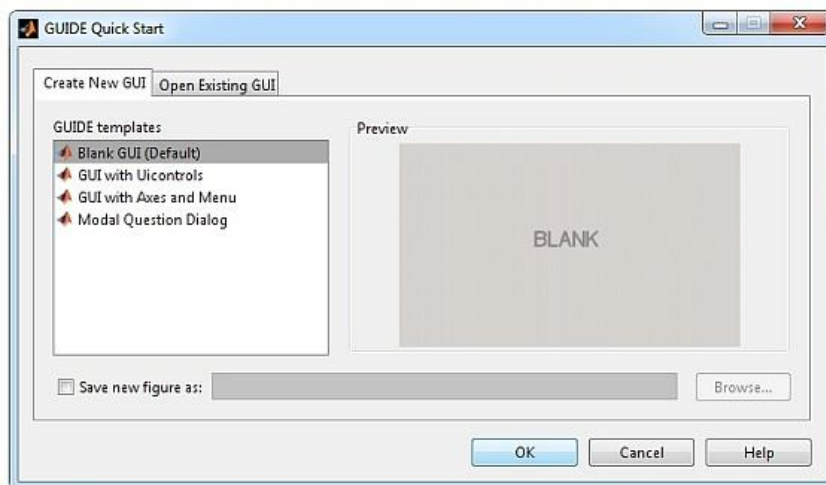
Komponentami GUI sú rôzne druhy menu, tlačidiel, textových polí, posuvných panelov, tabuliek, grafov a obrázkov. Každá táto zložka, ako aj celé GUI pracuje s jedným alebo viacerými, programátorom napísanými podprogramami, ktoré sa označujú pojmom *callbacks*. Vykonanie každého *callback* podprogramu je inicializované konkrétnou činnosťou používateľa. Tou môže byť napríklad stlačenie tlačidla, kliknutie myši, vybratie zložky menu alebo jednoduchým presunutím myši nad komponent.

GUIDE *Layout Editor* je grafický editor programu MATLAB. Spustenie GUIDE - rozhrania pre návrh GUI v MATLABe - môžeme urobiť tromi spôsobmi (Obr. 13.52).



Obr. 13.52 Spustenie GUI: a) cez nový súbor – GUI, b) cez ikonku GUIDE, c) cez príkazový riadok (guide)

Po spustení sa zobrazí okno (Obr. 13.53), kde si môžeme zvoliť, či chceme vytvoriť nové GUI alebo otvoriť už existujúce GUI s preddefinovaným rozmiestnením.



Obr. 13.53 Okno Quick start pre zvolenie predlohy GUI

Uvedený typ programovania sa často označuje ako *objektové programovanie* (pracuje sa nie s jednotlivými inštrukciami, ale s celými objektmi a program vytvára príslušnú postupnosť inštrukcií, ktorú treba editovať, či vhodným spôsobom doplniť).

Použitím GUIDE *Layout Editor* je možné zostaviť GUI jednoduchým systémom *click and drag* (klikni a ťahaj). Takto možno jednoducho pridať a rozostaviť na pracovnej vrstve GUI

komponenty – panely, grafy, textové polia, tlačidlá a pod. Taktiež je tu možnosť vytvorenia rôznych menu a záložiek pre GUI. Z *Layout Editor*-a je tiež možná zmena veľkosti celého GUI a modifikácia komponentov, ako ich vzhľad, natočenie, hierarchia a pod.

GUIDE automaticky generuje M-súbor, ktorý ovláda správanie sa GUI. Tento M-súbor obsahuje zdrojový kód potrebný na inicializáciu GUI a obsahuje štruktúru GUI *callback* podprogramov vykonávajúcich sa pri interakcii užívateľa s GUI komponentami. Použitím editora M-súborov je potom dodatočne možné pridávať alebo meniť zdrojový kód, aby každý *callback* podprogram vykonával presne požadovanú funkciu.

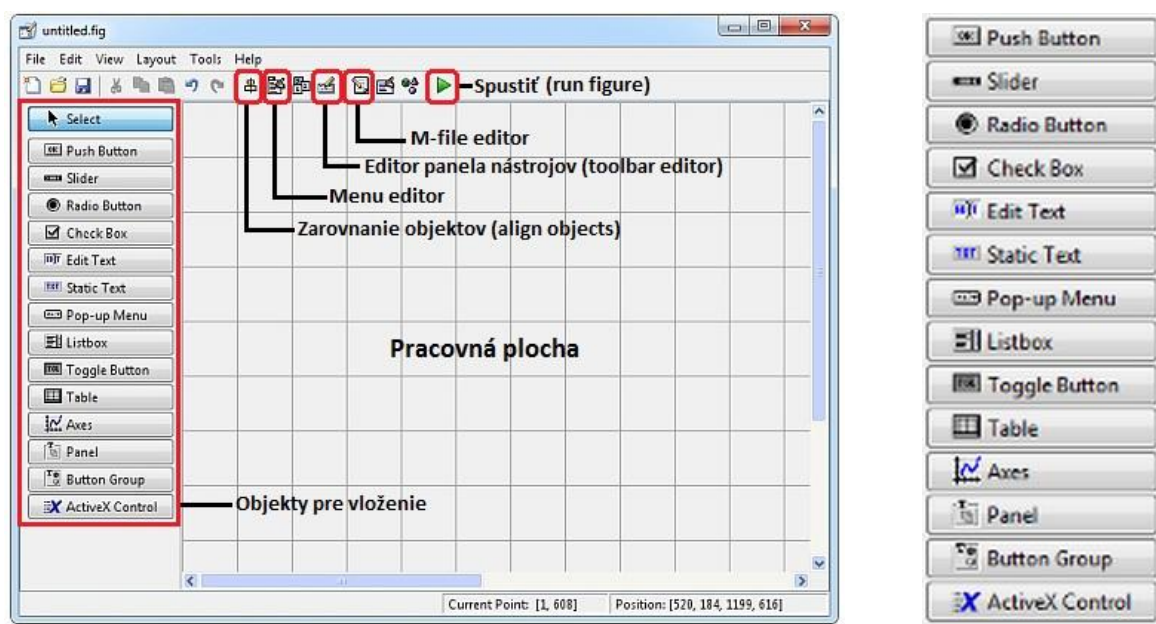
Samotné GUI je uložené v dvoch súboroch, ktoré sú generované automaticky pri uložení alebo spustení GUI:

- fig-súbor s príponou *.fig*, ktorý obsahuje kompletný popis GUI vrstiev a komponentov, akými sú tlačidlá, grafy, panely, menu a podobne. Jedná sa o binárny súbor a nie je ho možné modifikovať inak ako cez GUIDE.
- m-súbor s príponou *.m*, ktorý obsahuje zdrojový kód ovládajúci GUI, vrátane *callback* podprogramov. Je možná jeho dodatočná úprava.

Tieto dva súbory musia mať rovnaké meno, ktoré je totožné s menom GUI. Takže ak napríklad majú súbory názvy *priklad.fig* a *priklad.m*, názov GUI bude *priklad* a bude spustiteľný cez príkazový riadok zadáním príkazu *priklad* (pri nastavení sa do správneho adresára).

Pre vlastný návrh a rozmiestnenie panelov a volíme predlohu čistú (*Blank*). Ak chceme uložiť GUI v inom priečinku popri prípade pod iným názvom, zaškrtneme políčko **Save figure as** a zadáme cestu a názov súboru. V opačnom prípade bude názov GUI preddefinovaný (*untitled.fig*). Zmenu názvu alebo cieľovej adresy je možné urobiť aj dodatočne v menu návrhu GUI.

V pracovnom prostredí pre návrh GUI obrazovky sa stretneme s dvoma hlavnými časťami, a to *Pracovná plocha* a *Objekty pre vloženie*. Na pracovnú plochu je možné vložiť a vhodne usporiadať panely, samostatné prvky, prvky v paneli a rôzne iné kombinácie podľa našich požiadaviek. V hornej časti sa nachádza menu a rýchly prístup k zarovnaniu prvkov, menu editora, editora panela nástrojov, m-file editora pre naprogramovanie funkcií prvkov a spustenie GUI obrazovky. Obrazovka návrhu je zobrazená na obrázku (Obr. 13.54).



Obr. 13.54 Pracovné prostredie pre návrh GUI s vyznačenými dôležitými prvkami

13.4.4 Vytvorenie GUI

Základné prvky ponuky GUIDE (Obr. 15.57), ktoré môžeme využiť pri návrhu GUI, sú:

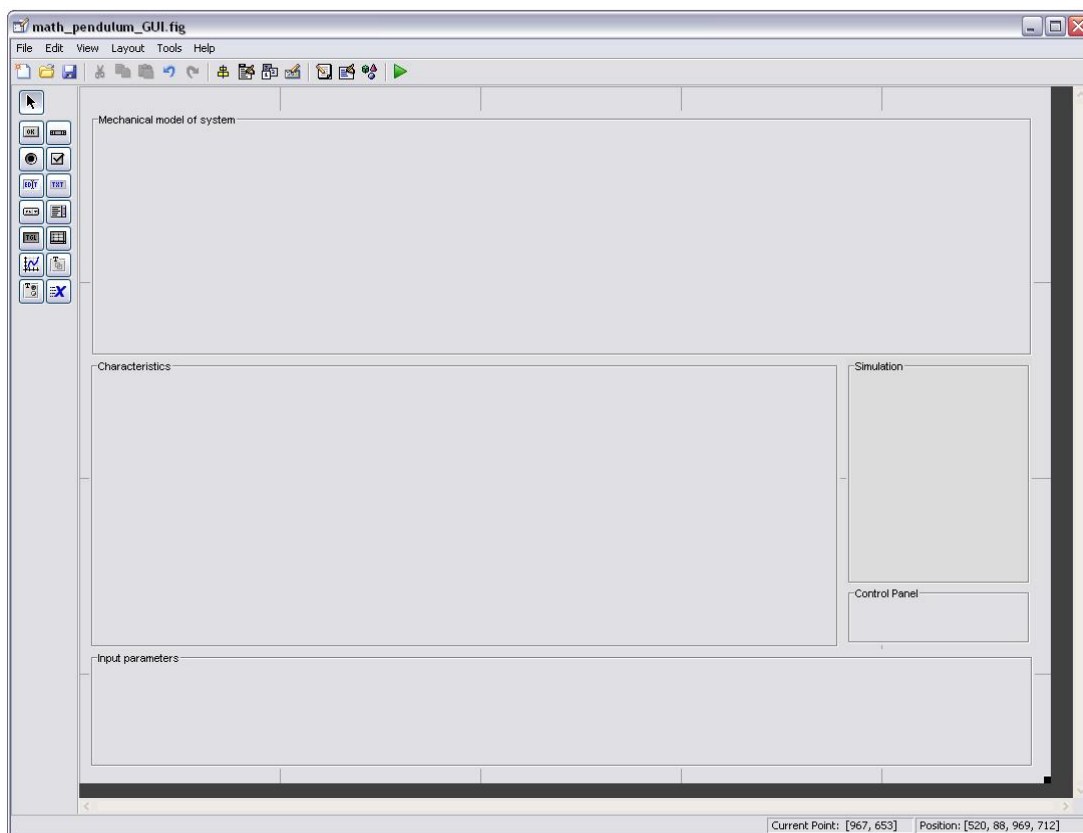
- **tlačidlá** (Push Button),
- **editovateľné polia** (Edit Text) a statické polia (Static Text),
- **pole so zoznamom** (Pop-up menu),
- **panely** (Panel)
- **plocha**, do ktorej je možné vykresľovať grafy alebo vkladať obrázky (Axes).

GUIDE umožňuje zarovnávať a rozmiestňovať vložené prvky GUI, čím efektívne umožňuje pri dizajne vytváraného GUI dodržiavať zásady pre vizuálne usporiadanie prvkov v GUI.

Rozmiestnenie panelov

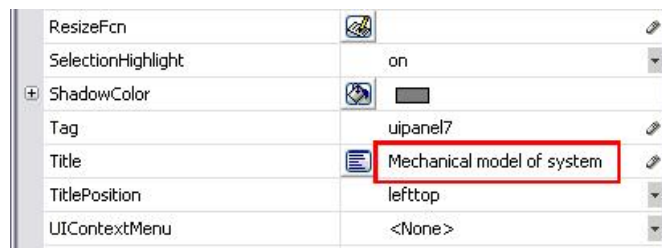
Vhodné rozmiestnenie panelov je dôležité pre ergonómiu ovládania, to znamená musí byť prehľadné, jednoduché na ovládanie a zobrazovanie požadovaných informácií. Popis tvorby GUI bude prezentovaný na príklade jednoduchého matematického kyvadla popísaného v podkapitole 9.2. Tu je uvedený iba ideový návrh. Podrobné riešenie návrhu a úprava podprogramov pre jednotlivé tlačidlá a grafy je náplňou príslušného cvičenia.

Dôležitou súčasťou tvorby je návrh rozmiestnenia jednotlivých komponentov obrazovky (Obr. 13.55). V prípade jednoduchého matematického kyvadla je plocha GUI rozdelená na 5 hlavných častí, ktoré sa vytvoria pomocou ovládacieho tlačidla *Panel* v ľavej časti pracovnej plochy a to jednoduchým kliknutím naň a následným držaním ľavého tlačidla myši nad pracovnou plochou, kde pohybom myši bude definovaná veľkosť tohto panela.



Obr. 13.55 Rozloženie panelov na obrazovke vytváraného GUI

Dvojklikom na vytvorený panel sa otvorí okno *Inspector* s možnosťami nastavenia panela. Tu v položke *Title* zmeníme prednastavený text *Button Group* na *Mechanical model of system* (Obr. 13.56).



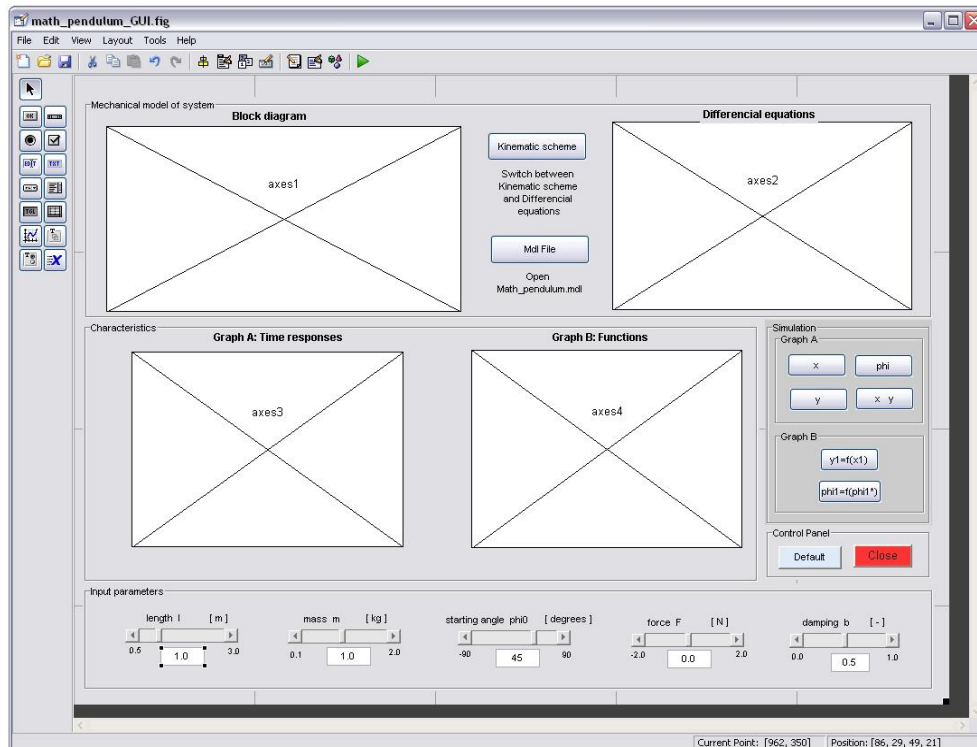
Obr. 13.56 Zmena názvu panela

Rovnakým spôsobom sa vytvoria a upravujú aj ostatné 4 panely. Výsledný vzhľad obrazovky, ku ktorému máme dospieť, je zobrazený na Obr. 13.52.

Panel 1 – Mechanical model of system

Na vytvorený návrh obrazovky *Mechanical model of system*, sa cez ovládacie tlačidlá vloží 2x *Axes*, 4x *Static Text* a 2x *Push Button* (Obr. 13.52). *Axes1* bude slúžiť na zobrazenie blokovej schémy obvodu na 9.6, čo treba zabezpečiť neskorším pridaním zdrojového kódu do M-súboru samotného GUI, keďže má byť obrázok viditeľný hneď po spustení GUI a nie až po stlačení niektorého tlačidla. *Axes2* bude slúžiť na striedavé zobrazenie kinematickej schémy (Obr. 9.3) a obrázku so vzťahmi popisujúcich jednoduché matematické kyvadlo.

Ich prepínanie zabezpečí *PushButton1*, ktorému sa položke *String* zmení na *Kinematic scheme*. V M-súbore GUI sa pridá k tomuto tlačidlu podprogram, ktorý po jeho stlačení bude striedavo meniť názov tohto tlačidla, *StaticText1* zobrazovaný nad *Axes2* ako aj obrázok zobrazovaný v *Axes2*.



Obr. 13.57 Výsledný vzhľad obrazovky GUI po doplnení výstupmi a ovládacími prvkami

Pre *PushButton2* sa zmení položka *String* na *Mdl File* a v položke *Callback* sa zadá *p_mdfile*. Týmto sa zabezpečí, že stlačením tlačidla sa bude hľadať podprogram *p_mdfile*, ktorý môže byť

popísaný priamo v M-súbore GUI alebo v samostatnom M-súbore s názvom *p_mdfile.m*, ktorý je potrebné vytvoriť. Ostaným komponentom *StaticText* sa nastaví položka *String*.

Panel 2 – Characteristics

Na panel 2 s názvom Characteristics sa vloží 2x *Axes* a 2x *StaticText*. *Axes3* bude slúžiť na zobrazovanie časových priebehov a *Axes4* na zobrazovanie priebehov funkcií. Prvému komponentu *StaticText* sa zadá do položky *String* text *Graph A: Time responses* a druhému komponentu *Graph B: Functions*.

Panel 3 – Simulation

Tento panel sa najprv rozdelí na 2 samostatné sekcie a to pomocou 2 vložených panelov. Prvá sekcia s názvom *Graph A* bude slúžiť na spúšťanie simulácií časových priebehov, ktoré sa zobrazia v *Axes3* a druhá sekcia s názvom *Graph B* bude slúžiť na spúšťanie simulácií funkcií, ktoré sa následne zobrazia v *Axes4*. Do sekcie *Graph A* vložíme 4x *Push Button* pre 4 rôzne simulácie výstupných veličín. Každému tlačidlu sa musí nastaviť položka *String* na názov simulovanej veličiny a položka *Callback* na názov M-súboru, ktorý sa stlačením daného tlačidla vykoná. Prvému tlačidlu spúšťajúcemu priebeh veličiny x je teda potrebné nastaviť položku *String* na x a položku *Callback* na *p_x_button*. Rovnako sa nastaví položky aj ostatným tlačidlám.

Do sekcie *Graph B* sa úplne rovnako vloží 2x *Push Button* a rovnako sa im upraví položka *String* na $y1=f(x1)$ resp. $\phi=f(\phi^*)$ a položka *Callback* na *p_fun_y1x1_button* resp. *p_fun_phiphi1_button*. Samozrejme opäť vzniká potreba vytvorenia M-súborov s príslušnými menami.

Panel 4 – Control panel

Tento panel bude obsahovať 2x *Push Button*. Prvému sa nastaví položka *String* na *Default* a položka *Callback* na *p_default_button*. Bude slúžiť na nastavenie východziech hodnôt vstupných veličín zadávaných na paneli 5. V odpovedajúcom M-súbore *p_default_button.m*, bude uskutočnené toto nastavenie východziech veličín na posuvných paneloch i v blokoch editovateľného textu.

Druhé tlačidlo bude slúžiť na ukončenie práce s GUI a po jeho stlačení sa GUI vypne. Položka *String* sa nastaví na *Close* a položka *Callback* sa nevyplní, čím sa stratí potreba vytvárania M-súboru pre jeden riadok kódu, ktorý sa dopíše do M-súboru samotného GUI a to v podobe: *close all*.

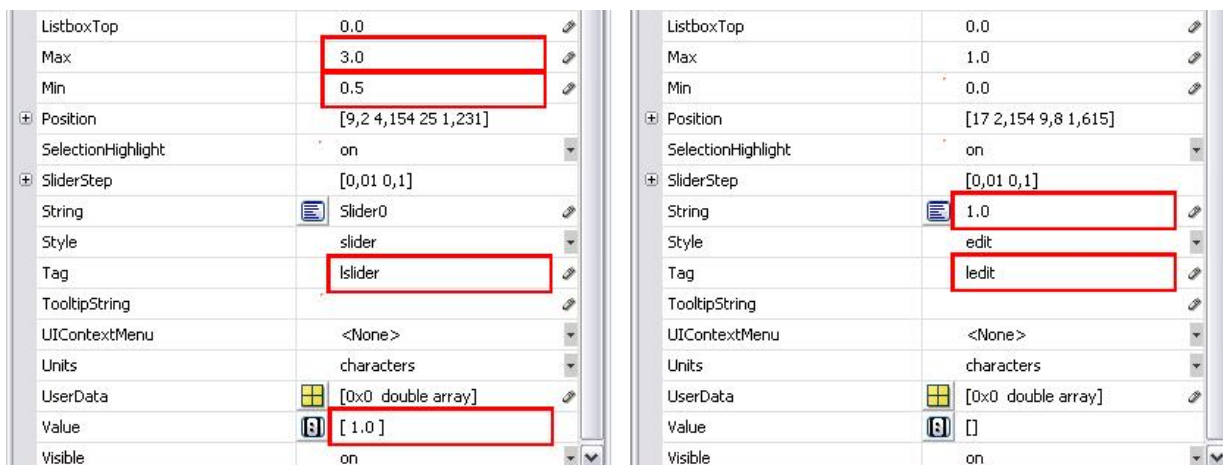
Pre lepšiu rozpoznateľnosť týchto dôležitých tlačidiel môžeme ešte zmeniť ich položku *BackgroundColor* a zmeniť tak farbu tlačidiel.

Panel 5 – Input parameters

Na paneli 5 sa nachádza päť podobných menších podsystémov, z ktorých každý nastavuje hodnotu jednej vstupnej veličiny. Postup tvorby bude popísaný pre veličinu l . U ostatných štyroch vstupných veličín je postup rovnaký.

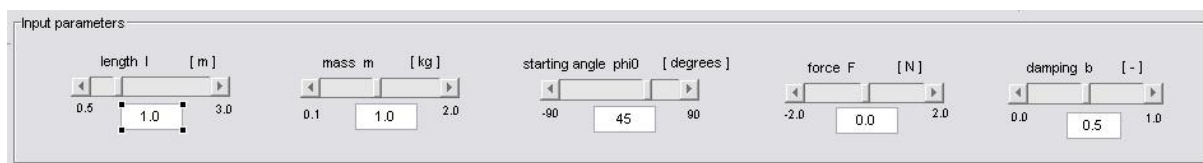
Na ovládanie vstupnej veličiny sú potrebné 2 komponenty, a to jeden *Slider* a jeden *Edit text*. V nastaveniach pre *Slider* sa nastaví položka *Tag* na *lslider*, položka *Max* na 3.0, položka *Min* na 0.5 a položka *Value* na 1.0 (Obr. 13.58a). Tým bude zabezpečené že posúvaním pohyblivého panelu sa budú hodnoty pohybovať v rozmedzí 0,5 až 3 a že východzia hodnota pohyblivého panelu bude 1. Komponentu *EditText* sa nastaví položka *Tag* na *ledit* a položka *String* na 1.0 (Obr. 13.58b). Tým bude zabezpečené že sa na začiatku po spustení GUI zobrazí v poli editovateľného textu hodnota 1.0.

V základnom M-súbore (*math_pendulum_GUI*) sa ešte doplní podmienka, ktorá zabráni vloženie inej hodnoty ako je rozmedzie 0,5 až 3. Taktiež sa tu upraví interaktivita medzi posuvným panelom a blokom editovateľného textu, a to tak, že posunutím posuvného panelu sa aktuálna hodnota ihneď zobrazí v poli editovateľného textu a naopak, zadáním inej ako zobrazenej hodnoty do poľa editovateľného textu sa táto zadaná hodnota ihneď prejaví posunutím pohyblivého panelu do odpovedajúcej polohy.

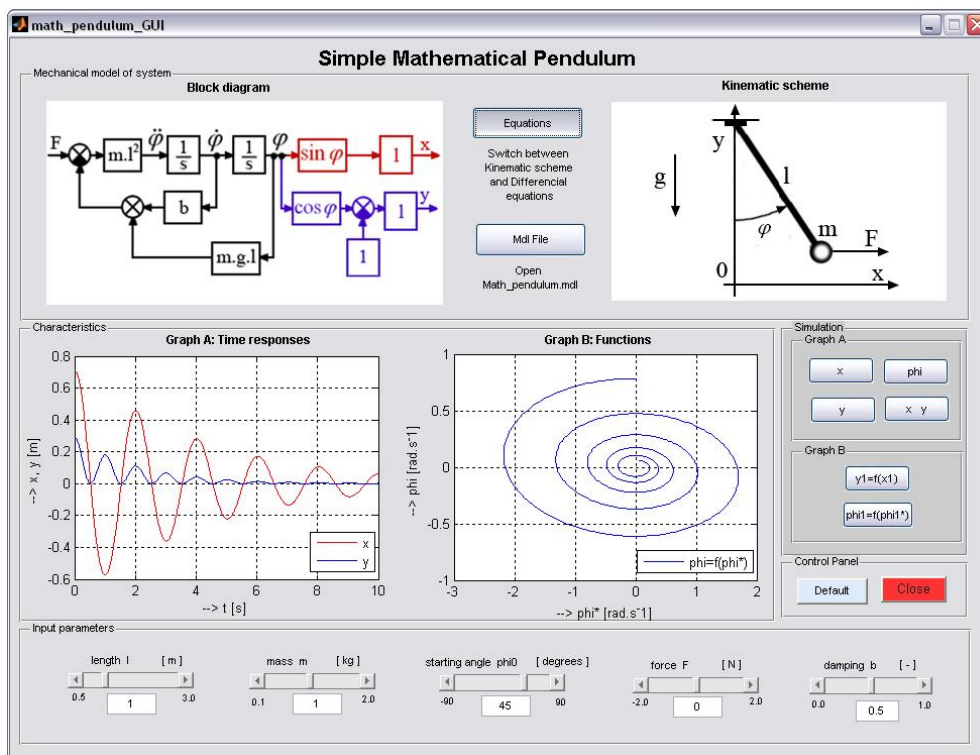


Obr. 13.58 a) Nastavenie komponentu Slider, b) nastavenie komponentu Edit Text

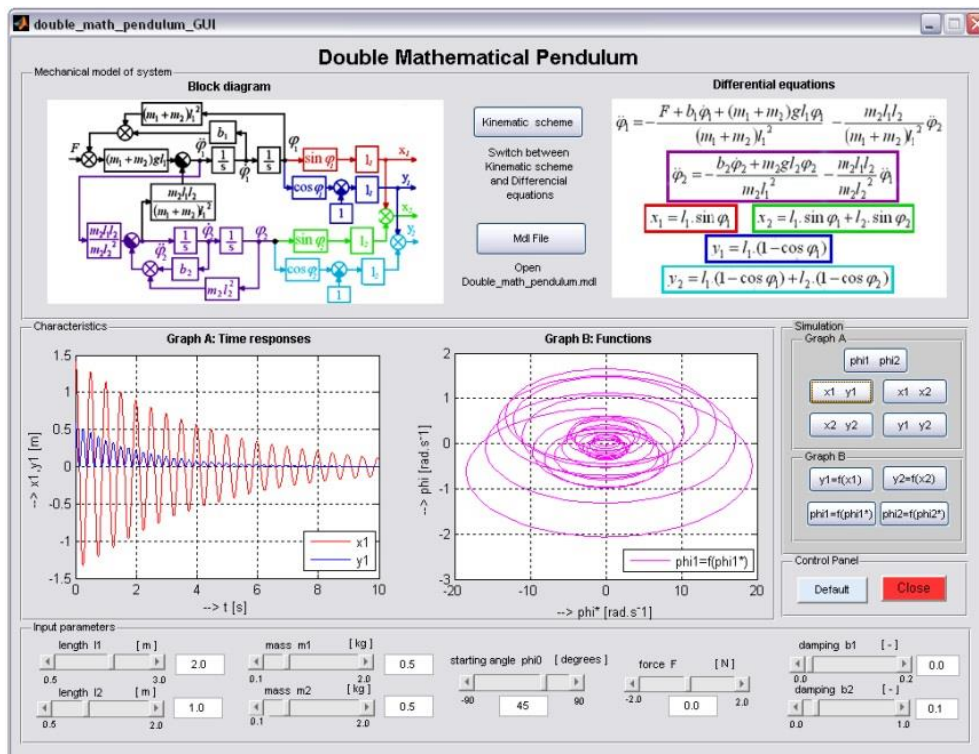
Nakoniec sa ešte pridá 4x *Static Text*, ktorými sa pre názornosť doplní názov ovládanej vstupnej veličiny, jej fyzikálna jednotka a možný rozsah hodnôt. Po pridaní všetkých komponentov pre ovládanie všetkých piatich vstupných veličín je výsledný panel zobrazený na Obr. 13.54. Výsledná obrazovka daného GUI je zobrazená na Obr. 13.55. Pri návrhu GUI sa snažíme o efektívne zjednotenie návrhov, aby boli využiteľné pre podobné systémy. Na Obr. 13.56 sú uvedené dva ďalšie príklady, pri ktorých bolo využité efektívne usporiadania obrazovky GUI: dvojité kyvadlo a kyvadlo na vozíku (mačka žeriava).



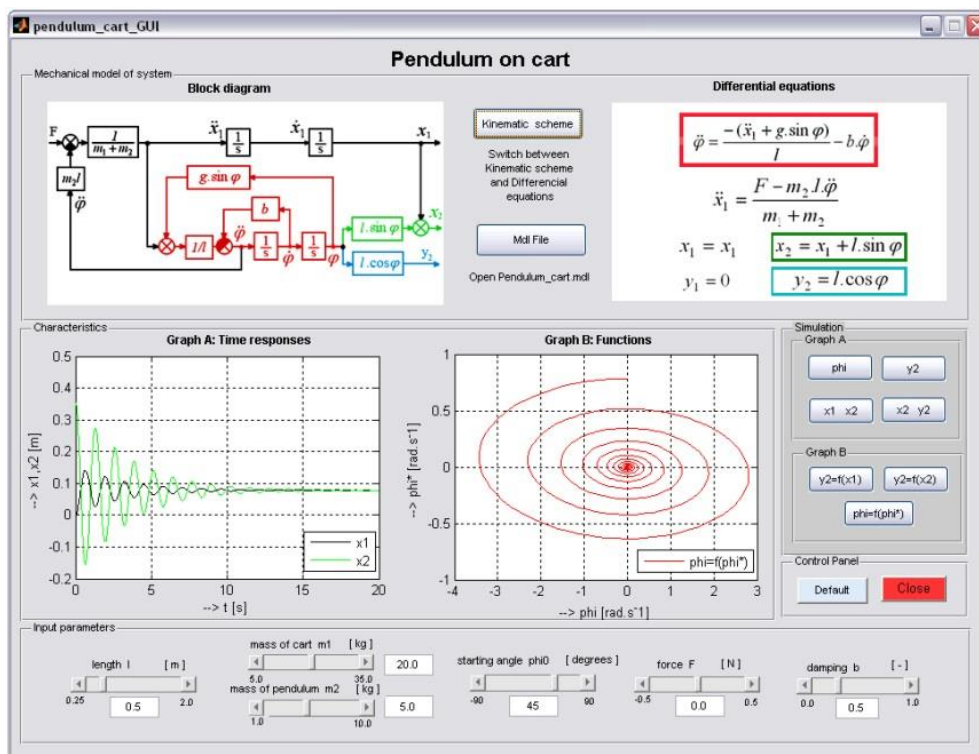
Obr. 13.59 Panel Input parameters



Obr. 13.60 Výsledná podoba GUI pre jednoduché matematické kyvadlo



a)



b)

Obr. 13.61 GUI obrazovky podobných usporiadaní kyvadiel: a) Dvojité kyvadlo; b) Kyvadlo na vozíku

13.5 Vytvorenie exe súboru zo súboru v MATLABe

Súbor s koncovkou .exe predstavuje označenie samostatne spustiteľného súboru (skratka vznikla z angličtiny, executable - spustiteľný). Táto práca pre zjednodušenie spustenia na ľubovoľnom počítači sa zaoberá aj vytvorením takéhoto súboru. Pri používaní .exe súboru užívateľ nepotrebuje mať nainštalovaný program MATLAB, dokonca ani nepotrebuje mať zručnosti s jeho ovládaním.

13.5.1 Postup pri vytvorení exe súboru

Pred prvým použitím prekladača je potrebné odštartovať program pre nastavenie (setup) ktorý umožňuje MATLABu zvoliť správne nastavenie prekladača pre danú verziu MATLABu:

```
>> mbuild
```

You may have to respond to one or two questions before the setup is completed.

Select a compiler:

```
[1] Lcc-win32 C 2.4.1 in C:\PROGRA~1\MATLAB\R2007b\sys\lcc
```

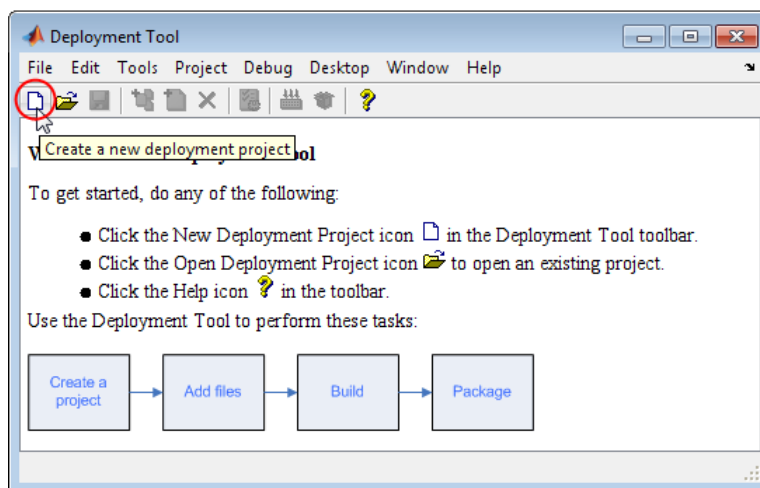
```
[0] None
```

Zadáme hodnotu 1 a ďalej postupujeme podľa informácií, ktoré sa zobrazujú na počítači.

Na vytvorenie .exe súboru je potrebné použiť nástroj *deploytool* v programe MATLAB. Spustíme ho jednoducho zadáním príkazu

```
>> deploytool
```

Po spustení sa otvorí uvítacie okno popisujúce vytvorenie .exe súboru slovné aj jednoduchou blokovou schémou (Obr. 13.62). Ako prvé je potrebné vytvoriť nový projekt kliknutím na ikonku *Create a new deployment project* v ovládacom paneli.



Obr. 13.62 Vytvorenie nového projektu v Deployment tool

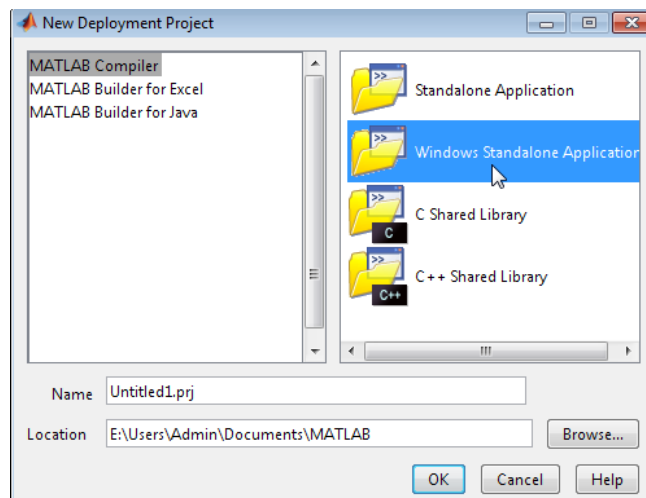
Poznamenajme, že ikona “?” na paneli ikon celkom vpravo otvára pomocníka s položkami:

Deployment Help – návod na použitie Deployment Tool.

Getting Started – návod pre použitie prekladača, obsahujúcim nasledovné menu (v angličtine):

How To – ďalšie možnosti použitia prekladača

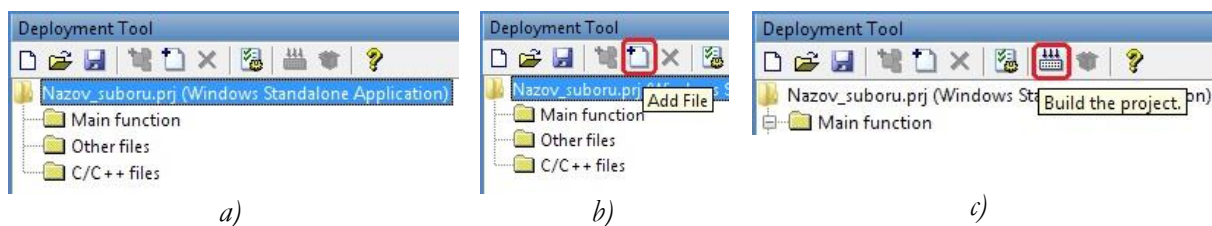
Kedže Deployment tool slúži na viaceré účely, pre naše potreby je potrebné zvolit' *Windows Standalone Application* (Obr. 13.63). Tento program dokáže skompilovať *GUI* a programy napísané v MATLABe do rôznych formátov (napr. Java, Excel a pod.).



Obr. 13.63 Voľba Windows Standalone Application pri vytváraní nového projektu

Po vytvorení projektu s požadovaným názvom (názov projektu zodpovedá názvu vytvoreného .exe súboru) je potrebné pridať súbory. Ak pracujeme s *GUI*, súbory s príponou .fig (MATLAB figure) sa nepridávajú. Pracujeme iba s m-file súbormi (s príponou .m), grafické rozhranie si *deployment tool* skompiluje samo z hlavného m-file súboru. Pod pojmom hlavný m-file súbor rozumieme súbor s názvom pod ktorým je uložená hlavná obrazovka *GUI* (každá obrazovka s príponou .fig má svoj m-file súbor).

Na štruktúre projektu (Obr. 13.64a) môžeme vidieť, že je rozdelený do troch základných zložiek. Pre naše potreby budeme používať len prvé dva priečinky, a to *Main function* kde pridáme hlavný m-file súbor spomenutý vyššie, a *Other files* kde sa pridávajú všetky ostatné m-file súbory, obrázky a podobne (okrem .fig súborov).



Obr. 13.64 a) Štruktúra projektu v Deployment tool; b) Pridanie súboru(-ov) do projektu; c) Kompilácia programu

Na pridanie súboru, alebo viacerých súborov slúži ikona *Add file* (Obr. 13.64b). Po pridaní všetkých potrebných súborov sa program musí skompilovať kliknutím na ikonku *Build the project* (Obr. 13.64c).

Skompilovaný program v priečinku so všetkými súbormi projektu vytvorí priečinok s názvom projektu, v ktorom sa nachádzajú dva priečinky. Prvý priečinok s názvom *distrib* sa nachádza vytvorený spustiteľný .exe súbor. V druhom priečinku s názvom *src* sa nachádzajú všetky zdrojové kompilačné súbory ktoré nás nemusia zaujímať. V oboch priečinkoch sa nachádza ešte *readme* súbor kde sa nachádzajú informácie o použití *MATLAB Compiler Runtime (MCR)*.

13.5.2 Spustenie .exe súboru

MATLAB Compiler Runtime je program potrebný pre spustenie vytvoreného .exe súboru. Ak používateľ nemá nainštalovaný MATLAB, alebo jeho MATLAB neobsahuje tento program je potrebné ho nainštalovať pre správnu funkčnosť. Z tohto dôvodu po skompilovaní, kliknutím na ikonku *Open project settings window* (Obr. 13.60a) v záložke *Packaging* zaškrtneme políčko *Include MATLAB Compiler Runtime (MCR)*. To nám vloží inšalačný súbor *MCR* do takzvaného inšalačného balíčka (package), ktorý sa vytvorí kliknutím na ikonku *Package the project* (Obr. 13.65b).



Obr. 13.65 a) Otvorenie vlastností projektu; b) Vytvorenie inšalačného balíčka

Po vytvorení inšalačného balíčka sa v zložke *distrib* vytvorí súbor *názov_saboru_pkg*. Dvojitým kliknutím na tento súbor sa spustí okno podobné príkazovému riadku v systéme Windows. Po prepísaní 3 pôvodných súborov (program sa pýta a ponúka možnosti prepísať, premenovať a podobne) napísaním *y* a potvrdením sa spustí inštalácia *MCR*. Program nainštalujeme ako bežný program používaný v systémoch Windows. Po úspešnom nainštalovaní na ľubovoľnom počítači užívateľ môže začať používať *GUI* pomocou vytvoreného .exe súboru.

13.6 Spolupráca MATLABu s programom Excel

13.6.1 Zápis do súboru v Exceli

Program MATLAB obsahuje inštrukcie pre čítanie a zápis údajov zo/do súboru aplikácie Microsoft Excel :

Pre zápis do excelovského súboru použijeme inštrukciu **xlswrite**:

xlswrite(filename,A)	zápis matice A do súboru filename
xlswrite(filename,A,sheet)	zápis na daný list
xlswrite(filename,A,xlRange)	zápis na prvý hárok do oblasti napr 'A1:C3'
xlswrite(filename,A,sheet,xlRange)	zápis na daný hárok do špecifikovanej oblasti

Príklad 1. Zápis vektora so 7 prvkami do excelovského súboru:

```
filename = 'testdata.xlsx';  
A = [12.7 5.02 -98 63.9 0 -.2 56];  
xlswrite(filename,A)
```

Príklad 2. Je možné tiež zapísať zmiešané údaje nasledovne:

```
filename = 'testdata.xlsx';  
A = {'Time','Temperature'; 12,98; 13,99; 14,97};  
sheet = 2;  
xlRange = 'E1';  
xlswrite(filename,A,sheet,xlRange)
```

Ak meno súboru (filename) neexistuje, potom inštrukcia **xlswrite** vytvorí súbor podľa špecifikácie s príponou xls.alebo xlsx, napríklad:

```
'myFile.xlsx'
```

```
'E:\myFolder\myFile.xlsx'
```

13.6.2 Čítanie zo súboru v Exceli

http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/xlsread.html?searchHighlight=xlsread#responsive_offcanvas

Pre čítanie údajov zo súboru v Exceli do MATLABU použijme inštrukciu **xlsread**:

```
num = xlsread(filename) % cita udaje z prveho harku daného súboru
```

```
num = xlsread(filename,sheet) % udaje zo špecifikovaného hárku
```

```
num = xlsread(filename,xlRange) % udaje zo suboru v danom rozsahu: 'A1:C3'
```

```
num = xlsread(filename,sheet,xlRange) % meno suboru, harok, rozsah
```

Príklad 3. Vytvorte excelovský súbor **myExample.xlsx**, do ktorého zapíšeme údaje z MATLABu:

```
hodnoty = {1, 2, 3 ; 4, 5, 'x' ; 7, 8, 9};
```

```
hlavicka = {'Prvy','Druhy','Treti'};
```

```
xlswrite('myExample.xlsx',[hlavicka; hodnoty]);
```

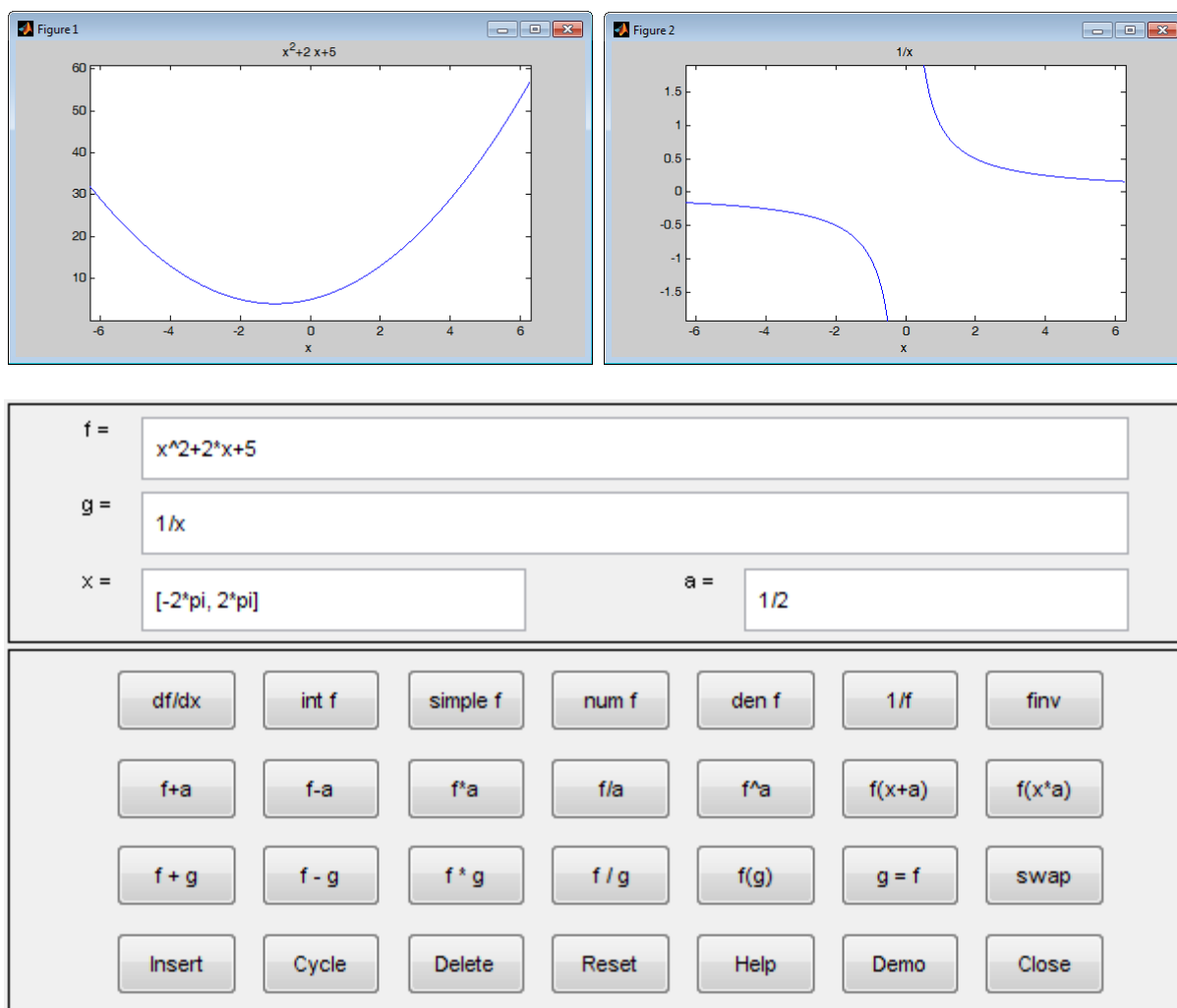
Hárok 1 v zošite myExample.xlsx obsahuje tieto údaje:

Prvy	Druhy	Treti
1	2	3
4	5	x
7	8	9

13.7 Kalkulátor symbolických funkcií

funtool je interaktívny grafický kalkulátor (Obr. 13.61) ktorý pracuje s funkciami jednoduchých premenných. Súčasne je možné zobrazit' dve funkcie: $f(x)$ a $g(x)$. Výsledok väčšiny operácií nahradzuje obsah funkcie $f(x)$.

Okná, označené ako '**f** =' a '**g** =' , sú editovateľné okná, ktoré možno menit' v ľubovoľno okamihu zapísaním novej funkcie. V okne '**x** =' sa špecifikuje rozsah nezávisle premennej. V okne označenom ako '**a** =' sa zadáva číselná hodnota parametra.



Obr. 13.66 Očná kalkulatora symbolických funkcií

V prvom riadku sa nachádzajú tlačidlá pre unárne operátory ktoré obsahujú funkciu $f(x)$:

- **df/dx** - symbolická derivovanie $f(x)$
- **int f** - symbolické integrovanie $f(x)$
- **simple f** - zjednodušuje symbolický výraz (ak je to možné)
- **num f** - vyberá čitateľ racionálnej zlomkovej funkcie v symbolickom tvare
- **den f** - vyberá menovateľ racionálnej zlomkovej funkcie v symbolickom tvare
- **1/f** - nahradí $f(x)$ prevrátenou hodnotou $1/f(x)$.
- **finv** - nahradí $f(x)$ inverznou funkciou

Výpočet operátorov **int(f)** a **finv** môže zlyhať, ak neexistuje ich riešenie v uzavretej forme.

Druhý riadok tlačidiel parametrom 'a' mení mierku funkcie $f(x)$. Sú tu nasledovné operácie:

- **f + a** - nahradí $f(x)$ funkciou $f(x) + a$
- **f - a** - nahradí $f(x)$ funkciou $f(x) - a$
- **f * a** - nahradí $f(x)$ funkciou $f(x) * a$
- **f / a** - nahradí $f(x)$ funkciou $f(x) / a$
- **f ^ a** - nahradí $f(x)$ funkciou $f(x) ^ a$
- **f(x+a)** - nahradí $f(x)$ funkciou $f(x + a)$

- $f(x*a)$ - nahradí $f(x)$ funkciou $f(x * a)$

V tretom riadku sa nachádzajú operátory dvoch funkcií $f(x)$ a $g(x)$. Sã tu nasledovné operácie:

- $f + g$ - nahradí $f(x)$ funkciou $f(x) + g(x)$
- $f - g$ - nahradí $f(x)$ funkciou $f(x) - g(x)$
- $f * g$ - nahradí $f(x)$ funkciou $f(x) * g(x)$
- f / g - nahradí $f(x)$ funkciou $f(x) / g(x)$
- $f(g)$ - nahradí $f(x)$ funkciou $f(g(x))$
- $g = f$ - nahradí $g(x)$ funkciou $f(x)$
- **swap** - zamení $f(x)$ and $g(x)$

Prvé tri tlačidlá v štvrtom riadku riadia zoznam funkcií.

- Tlačidlo **Insert** umiestni danú funkciu do zoznamu.
- Tlačidlo **Cycle** rotuje zoznam funkcií.
- Tlačidlo **Delete** odstraňuje aktívny funkciu zo zoznamu. Zoznam funkcií sa nazýva **fxlist**. Defaultý zoznam **fxlist** obsahuje niekoľko bežných funkcií.
- Tlačidlo **Reset** nastavuje **f**, **g**, **x**, **a** a **fxlist** na ich počiatočné hodnoty.
- Tlačidlo **Help** tlačí text pomocníka.
- Tlačidlo **Demo**.
- Tlačidlo **Close** uzatvára všetky tri okná.

POUŽITÁ LITERATÚRA

Kapitola 1: Úvod do modelovania elektromechanických sústav

- [1] PDONSE, M. – MULLER, V. – CERV, H. S. SCHULZE, S.: Modelling and Dynamic Simulation of Electromechanical Systems of Equipment in the Rolling Mill Field, IEEE AMC '98 – COIMBRA, 1998, pp- 469-374.
- [2] Linear Physical Systems Analysis. Online [cit. 2015-05-17] <http://lpsa.swarthmore.edu/>

Kapitola 2: Prenosové funkcie elektrických a mechanických obvodov

- [3] NISE, N. S.: Control Systems Engineering. Sixth edition. John Wiley & Sons, 2011/ ISBN 978-0-470-64612-0. Príklady a riešenia Online [cit. 2015-05-17] <http://bcs.wiley.com/he-bcs/Books?action=index&itemId=0470646128&bcsId=6360>
- [4] ŠVEC, J. a kol.: Příručka automatizační a výpočetní techniky. SNTL, Praha, 1975.
- [5] CRAIG, E.: Electro-Mechanical Analogy. Rensselaer Polytechnical Institute. Online [cit. 2015-05-17] http://multimechatronics.com/images/uploads/mech_n/Electrical_Mechanical_Analogy.pdf
- [6] CHEEVER, E.: Analogous Electrical and Mechanical Systems. Online [cit. 2015-05-17] <http://lpsa.swarthmore.edu/Analogues/ElectricalMechanicalAnalogues.html>
- [7] Využití elektroanalogie při analýze a modelování dynamických vlastností mechanických soustav. http://www.umt-old.fme.vutbr.cz/~pkrejci/opory/SimDSoust/kapitola_5.html

Kapitola 3: Dynamické vlastnosti základných prenosových sústav

- [8] KLEE, H. – ALLEN, R.: Simulation of Dynamic Systems with MATLAB and Simulink. Second edition, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2011, ISBN 978-1-4398-3673-6.
- [9] CHEEVER, E.: Linear Physical Systems Analysis. Online [cit. 2015-05-17] <http://lpsa.swarthmore.edu>
- [10] Analogous Electrical and Mechanical Systems. Online [cit. 2015-05-17]. <http://lpsa.swarthmore.edu/Analogues/ElectricalMechanicalAnalogues.html>
- [11] DRIELS, M.: Linear Control Systems Engineering. McGraw-Hill Inc., 1996.
- [12] Linearization for Model Analysis and Control Design. MathWorks, Online [cit. 2015-05-17] <http://www.mathworks.com/discovery/linearization.html>
- [13] MathWorks: Simulink Control Design, Linearize models and design control systems, Online [cit. 2015-05-17] http://www.mathworks.com/help/slcontrol/index.html#linearization_1
- [14] OGATA K.: Modern Control Engineering. Prentice-Hall International, Inc., 1990

Kapitola 4: Modelovanie dynamických systémov v stavovom priestore

- [15] ECE311 - Dynamic Systems and Control Linearization of Nonlinear Systems. Online [cit. 2015-05-17]. <http://www.control.utoronto.ca/~broucke/ece311s/Handouts/linearization.pdf>
- [16] Nonlinear Control Systems Online [cit. 2015-05-17] http://users.cs.teilar.gr/gadam/GRCZ/index_soubory/cybernetics/lec7_cyb.pdf
- [17] The Pendulum. Online [cit. 2015-05-17] www.math.duke.edu/education/ccp/materials/diffeq/pendulum/pend1.html
- [18] Octave/Matlab - Differential Equation. Online [cit. 2015-05-17] http://www.sharetechnote.com/html/Octave_Matlab_DifferentialEquation.html#Lsim_2nd_Order_DampedSpring
- [19] State Space Representations of Linear Physical Systems. Online [cit. 2015-05-17] <http://lpsa.swarthmore.edu/Representations/SysRepSS.html>

- [20] Equilibrium Point Analysis: Linearization Technique. Online [cit. 2015-05-17]
<http://www.sosmath.com/diffeq/system/nonlinear/linearization/linearization.html>
- [21] ZBORAY, L.: Vybrané kapitoly z teórie riadenia. Skriptá TU Košice, 1985.
- [22] ZBORAY, L. – ĎUROVSKÝ, F.: Stavové riadenie elektrických pohonov: Vienaľa, 1995. ISBN 80-967 249-1-6.
- [23] DE - State Space Modeling. Online [cit. 2015-05-17]
http://www.sharetechnote.com/html/DE_StateSpaceModel.html
- [24] State Space Models. Online [cit. 2015-05-17]
<http://www.ece.rutgers.edu/~gajic/psfiles/canonicalforms.pdf>
- [25] JO, N.H. – SHIM, H. – SON, Y.I.: State-Space Design. Lecture topics. ADSP Lab.
- [26] ORDYS A.: State Space and Transfer Function Models. Online [cit. 2015-05-17]
<http://homepages.eee.strath.ac.uk/.../L05%20Models%20S>
- [27] Octave/MATLAB - Differential Equation. Online [cit. 2015-05-17]
http://www.sharetechnote.com/html/Octave_MATLAB_DifferentialEquation.html#Lsi
[m_2nd_Order_DampedSpring](http://www.sharetechnote.com/html/Octave_MATLAB_DifferentialEquation.html#Lsi)
- [28] State Space Representations of Linear Physical Systems. Online [cit. 2015-05-17]
<http://lpsa.swarthmore.edu/Representations/SysRepSS.html>

Kapitola 5: Modelovanie nelineárnych systémov

- [29] Creating Discrete-time Models. Mathworks Documentation. Online [cit. 2015-05-17]
<http://www.mathworks.com/help/control/examples/creating-discrete-time-models.html?refresh=true>
- [30] KLEE, H. – RANDAL, A.: Simulation od Dynamic Systems. CRC Press, 2011
- [31] Equilibrium Point Analysis: Linearization Technique. Online [cit. 2015-05-17]
<http://www.sosmath.com/diffeq/system/nonlinear/linearization/linearization.html>

Kapitola 6: Modelovanie systémov diskrétného času

- [32] MELICHAR, J.: Lineární systémy 1., učební text. ZČU Plzeň, 2011
- [33] Linear System Models. Online [cit. 2015-05-17]
<http://www.mathworks.com/help/signal/ug/linear-system-models.html>
- [34] KALAŠ, D. – JUCHA, I.: MATLAB / Simulink a Control System Toolbox. Skriptá STU Bratislava 1996, ISBN 80-227-0836-4.
- [35] ÅSTRÖM, K. J. – WITTENMARK B.: Computer-Controlled Systems: Theory and Design, Prentice-Hall, 1990, pp. 48-52.
- [36] FRANKLIN, G.F. – POWELL, D.J. – WORKMAN, M.L.: Digital Control of Dynamic Systems (3rd Edition), Prentice Hall, 1997.

Kapitola 7: Dynamické modely základných mechanických pod systémov

- [37] Vzorce na výpočet momentu zotrvačnosti. Online [cit. 2015-05-17]
http://sk.wikipedia.org/wiki/Vzorce_na_v%C3%BDpo%C4%8Det_momentu_zotrva%C4%8Dnosti
- [38] System Dynamics and Control: Module 4 - Modeling Mechanical Systems. Online [cit. 2015-05-17] <http://www.youtube.com/watch?v=MN3RJWcJKnk>
- [39] KERTIS, D.: Dynamika pod systémov mechatronického systému v e-learningovom spracovaní. Diplomová práca, FEI TU v Košiciach, 2007.
- [40] Popis portálového žeriava. Online [cit. 2015-05-17]
http://matlab.fei.tuke.sk/applications/CyberVirtLabMWS/Portalovy_zerjav_simulovany/zjerjavpop.html

- [41] Double Pendulum. Online [cit. 2015-05-17]
<http://scienceworld.wolfram.com/physics/DoublePendulum.html>
- [42] The Double Pendulum (animation). Online [cit. 2015-05-17]
http://www.physics.usyd.edu.au/~wheat/dpend_html/
- [43] GELVANIČ Z.: Zostavenie modelu kráčajúceho robota a jeho analýza. Semestrálny projekt, LS 2013/2014. KEM FEI TU v Košiciach, 2014.

Kapitola 8: Modely častí kontinuálnych liniek s pohybujúcim sa pásom

- [44] FEDÁK, V. – FEDOR, P.: Pohonárske komplexy. Učebný text pre postgraduálne štúdium „Mikroelektronika v elektrických pohonoch a výkonovej elektronike (1986-1988)“, VŠT Košice, 1987.
- [45] REPIŠČÁK M.: Spracovanie multimediálnych textov s interaktívnymi prvkami pre vzdelávanie v mechatronike. Diplomová práca. FEI TU v Košiciach, 2004.
- [46] BRANDENBURG, G.: Ein mathematisches Modell für eine durchlaufende elastische Stoffbahn in einem System angetriebener, umschlungener Walzen. Regelungstechnik und Prozess-Datenverarbeitung 1973, 3. 3, s. 69-72, č. 4, s. 125-162
- [47] BRANDENBURG, G. – KARBACHER, N.: Ein Beitrag zur Optimierung von Regelkreisen mit Tanzerwalzen bei kontinuierlichen Fertigungsanlagen. Regelungstechnik 1981, č. 12, s. 428-433; 1982, č. 1, s. 13-21, č. 2, s. 60-64.
- [48] KESSLER, G. – BRANDENBURG, G.-SCHLOSSER, W.-Wolfermann W.: Struktur und Regelung bei Systemen mit durchlaufenden elastischen Bgghnen und Mehrmotoren Antrieben. Regelungstechnik 1984, č. 8, s. 251-266.
- [49] LANGHOFF, J.: Das statische und dynamische Verhalten von Bnden in einer Beize mit Barddurchhangregelung. Techn. Mitt. AEG - TELE-FUNKEN 63, 1973, Č. 6, s. 226-232.
- [50] KESSLER, G.: Das zeitliche Verhalten einer kontinuierlichen elastischen Bahn zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nalzenpaaren. Regelungstechnik 1960, s. 436-439 a 1961, s. 154-159 Wolfermann, 6.: Bahnzugkraft und inneren Spannungen beim Wickeln von elastischen Stoffbahnen. Regelungstechnik 1978, s. 105-140.

Kapitola 9: Zostavenie modelov dynamických systémov pomocou Lagrangeových rovníc

- [51] Ecyklopedie fyziky. Zobecněné souřadnice. Online [cit. 2015-05-17]
<http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1230-zobecnene-souradnice>
- [52] HORŇÁK, P.: Aplikácie Lagrangeových rovníc na zostavovanie modelov dynamických systémov. Diplomová práca, FEI TU v Košiciach, 2009 .
- [53] HAAS, W. – SCHLACHER, K. – GAHLEITNER, R.: Modeling of Electromechanical Systems. Online [cit. 2015-05-17]
<http://icosym-nt.cvut.cz/odl/partners/jku/Theory/Modeling/HTML/modeling.html>
- [54] BANERJEE, S.: Lecture Series on Dynamics, Lecture - 3 Derivation of the Lagrangian Equation. Indian Institute of Technology, Kharagpur. Online [cit. 2015-05-17]
<https://www.youtube.com/watch?v=G6OX1NpToaw&feature=relmfu>
- [55] GELVANIČ, Z.: Zostavenie modelu kráčajúceho robota a jeho analýza. Semestrálny projekt, LS 2013/14. KEM FEI TU v Košiciach.

Kapitola 10: Control System Toolbox

- [56] Control System Toolbox. The MathWorks Inc. Online [cit. 2015-05-17].
<http://www.mathworks.com/help/control/index.html>
- [57] HÉDL, L.: Hypertextová podpora výuky v oblasti automatického řízení. Bakalárska práca VŠB – Technická universita, Ostrava: katedra ATR – 352, 2003, 70 s.

- [58] Matlab the Symbolic Editor and the Control System Toolbox. Online [cit. 2015-05-17]
http://www.tp.devry.edu/PDFs/Matlab_and_the_Control_System_Toolbox.pdf
- [59] Transformation: Transfer Function $\leftrightarrow$ State Space Online [cit. 2015-05-17].
<http://lpsa.swarthmore.edu/Representations/SysRepTransformations/TF2SS.html>

Kapitola 11: Symbolic Math Toolbox

- [60] Symbolic Math Toolbox Functions. MathWorks Documentation Online [cit. 2015-05-17]
<http://www.mathworks.com/help/symbolic/functionlist.html>
- [61] Appendix F: MATLAB's SymbolicMath Toolbox Tutorial. Online [cit. 2015-05-17]
http://higheredbcs.wiley.com/legacy/college/nise/0471794759/appendices/app_e.pdf
- [62] WILCOX, W.R: MATLAB Module 2, Control System Toolbox and Symbolic Math Toolbox. Clarkson University, Potsdam, NY. Online [cit. 2015-05-17],
<http://www.nptel.ac.in/courses/108102044/>
- [63] WILCOX, W.R: Solution of Equations Using MATLAB. Clarkson University, Potsdam, NY. Online [cit. 2015-05-17]
<http://www-h.eng.cam.ac.uk/help/tpl/programs/MATLAB/symbolic.html>
- [64] GILAT, A.: MATLAB® - An Introduction with Applications. JOHN WILEY & SONS, INC., 2011.
- [65] LYNCH S.: Dynamical Systems with Applications using MATLAB. Springer International Publishing Switzerland 2004, 2014.
Pozrri Tutorial One: The Basics and the Symbolic Math Toolbox. . Online [cit. 2015-05-17]
<https://books.google.sk/books?id=njgqBAAAQBAJ&pg=PA4&lpg=PA4&dq=symbolic+math+toolbox+tutorial&source=bl&ots=0YRBcwkNNB&sig=IKYrpezinzcABrqfsx8yMhM6tEo&hl=sk&sa=X&ei=dPLPVMtwguRohMCA6As&ved=0CDEQ6AEwAzgK#v=onepage&q=symbolic%20math%20toolbox%20tutorial&f=false>

Kapitola 12: Zostavovanie modelov mechanických systémov v programe SimMechanics

- [66] GREPL, R.: Modelování mechatronických systémů v Matlab SimMechanics. Nakladatelství BEN - Technická literatura, Praha, 2007.
- [67] ÜVEGES, R.: Modelovanie mechanických systémov v prostredí MATLAB-SimMechanics. Bakalárska práca. FEI TU v Košiciach, 2013.

Kapitola 13: Špeciálne nástroje Simulinku a Control Toolboxu per analýzu dynamických systémov a syntézu regulátorov

- [68] Create a Simple UI Using GUIDE. Online [cit. 2015-05-17]
http://www.mathworks.com/help/matlab/creating_guis/about-the-simple-guide-gui-example.html
- [69] Dizajn užívateľského rozhrania ako rozhodujúci faktor pre jednoduché používanie aplikácií. Krea Design, 2014. Online [cit. 2015-05-17]
<http://design.krea.sk/clanky/uzivatelske-rozhrania-ui/>
- [70] HARČARUFKA, J.: CAD komplexného riešenia návrhových úloh z oblasti riadenia systémov v stavovom priestore. Dimplmová práca, FEI TU v Košiciach, 2015.
- [71] FEDÁK V., ĎUROVSKÝ F., KEUSCH P.: E-learning in Mechatronics Supported by Virtual Experimentation. Chapter in E-Learning / Book 4. INTECH - Open Access publisher of Scientific Books and Journals. Rijeka, Croatia. 24 p. ISBN 979-953-307-688-0.
- [72] DOSTÁL, M.: Základy tvorby užívateľského rozhraní. Online Katedra informatiky, PF. Univerzita Palackého, 2007. Online [cit. 2015-05-17]
<http://phoenix.inf.upol.cz/esf/ucebni/gui-dostal.pdf> [Linearization Using Simulink Control Design](#)

- [73] BIZON, P.: GUI pre virtuálne modely dynamických sústav. Diplomová práca FEI TU v Košiciach, 2009.
- [74] [Linearization Using Simulink Functions](#). Online [cit. 2015-05-17]
- [75] MATLAB_COMPILER - Creating Standalone Executables from MATLAB Programs. Online [cit. 2015-05-17]
http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/m_src/matlab_compiler/matlab_compiler.html
- [76] MATLAB Compiler Runtime (MCR). Online [cit. 2015-05-17]
<http://www.mathworks.com/products/compiler/mcr/>
- [77] xlswrite. MathWorks Documentation . Online [cit. 2015-05-17]
http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/xlswrite.html#btmdr27-2_1
- [78] Control Tutorials for MATLAB and Simulink. Online [cit. 2015-05-17]
<http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=Suspension§ion=SimulinkControl>