

1 DYNAMICKÉ MODELY ZÁKLADNÝCH PRENOSOVÝCH SÚSTAV A ICH ANALÝZA

Väčšina priemyselných sústav pozostáva z proporcionálnych, príp. proporcionálno-derivačných sústav prvého až tretieho rádu. Pre správne pochopenie dynamických vlastností systémov je potrebné dokonale poznať vplyv charakteristických parametrov systému na jeho dynamické vlastnosti, ktoré sú vyjadrené časovými alebo frekvenčnými charakteristikami.

V tejto kapitole sa preto budeme zaoberať analýzou základných analýzou vlastností dynamických sústav I. až IV. rádu.

1.1 Dynamická sústava I. rádu

Lineárna dynamická sústava prvého rádu je popísaná diferenciálnou rovnicou prvého rádu, ktorá na pravej strane obsahuje proporcionálny člen (ide o proporcionálnu sústavu I. rádu) alebo aj derivačnú zložku vstupnej veličiny – v tom prípade hovoríme o proporcionálno-derivačnej sústave I. rádu:

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \quad (1.1)$$

Čo v Laplaceovej transformácii zapíšeme nasledovne:

$$(a_1 s + a_0) Y(s) = (b_1 s + b_0) U(s)$$

Túto diferenciálnu rovnicu v LT zapíšeme v tvare

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0} = \frac{b_0 (1 + s \frac{b_1}{b_0})}{a_0 (1 + s \frac{a_1}{a_0})}$$

Po úprave môžeme vyjadriť tento prenos zapísať v tvare:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K \frac{1 + sT_D}{1 + sT} \quad (1.2)$$

kde K je zosilnenie, T – časová konštanta, T_D je derivačná časová konštanta:

$$K = \frac{b_0}{a_0} \quad T_D = \frac{b_1}{b_0} \quad T = \frac{a_1}{a_0}$$

Ide o proporcionálno-derivačnú sústavu I. rádu. Rád sústavy je daný počtom zásobníkov energie v sústave (elektrickej, mechanickej, tepelnej, ...). V elektrických obvodoch ide o obvody, v ktorých sa okrem odporov nachádza buď jeden kondenzátor (zásobník elektrostatickej energie) alebo jedna cievka (zásobník elektromagnetickej energie – ide o rôzne sériové a paralelné zapojenia RC a LC obvodov.

Charakter prechodových dejov (stabilita a dynamika) je určený polynómom menovateľa.

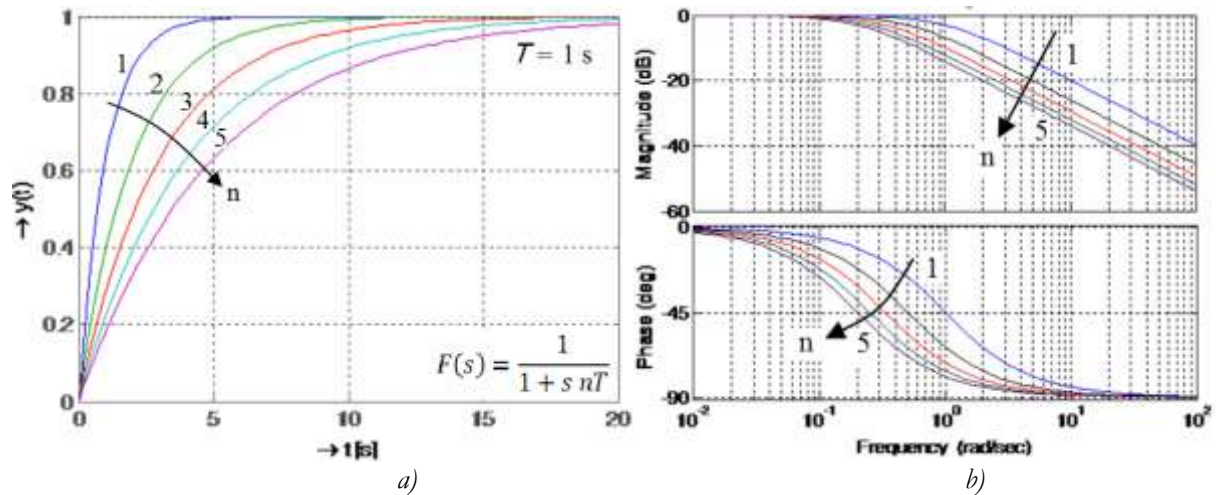
Spätná Laplaceova transformácia proporcionálnej sústavy I. rádu ($T_D = 0$) pri jednotkovom vstupnom skoku dáva časovú funkciu:

$$y(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (1.3)$$

Aj keď derivačná zložka sa pri tejto sústave vyskytuje zriedka, ukážme jej vplyv na prenos.

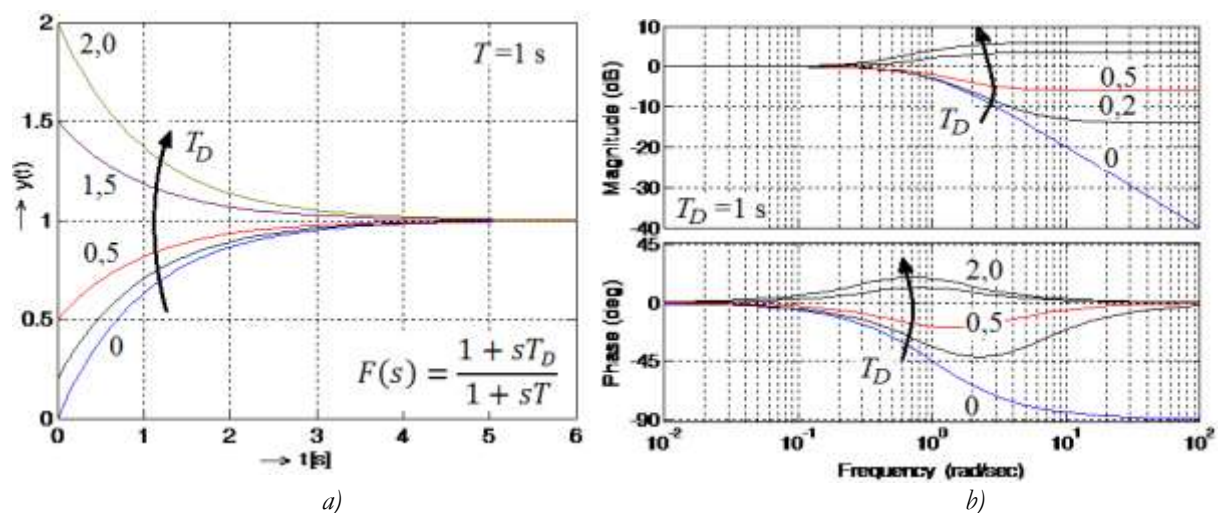
Časová ododzva (a stabilita sústavy) závisí od pólov funkcie, ale na priebeh prechodových charakteristík vplýva aj veľkosť derivačnej zložky.

Na Obr. 1.1a sú nakreslené prechodové charakteristiky proporcionálnej sústavy ($T_D = 0$) pre rôzne hodnoty časovej konštanty T . Na Obr. 1.1b sú odpovedajúce logaritmické frekvenčné charakteristiky.



Obr. Chyba! Dokument neobsahuje žiadny text so zadaným štýlom. 1 Proporcionálna sústava I. rádu a) prechodové charakteristiky; b) logaritmické frekvenčné charakteristiky

Vplyv **nuly prenosu** $n = -1/T_D$ na dynamické vlastnosti PD sústavy ($T_D \neq 0$) je zrejмый z priebehov časových i frekvenčných charakteristik na Obr. 1.2. Nula prenosu spôsobuje, že prechodová charakteristika pre čas $t = 0$ začína v bode T_D/T .



Obr. 1.2 Proporcionálno-derivačná sústava I. rádu ($T = 1$ s, $T_D = 0,1; 0,2; 0,4$ s): a) časové charakteristiky, b) poloha pólu a nuly prenosu, c) logaritmické frekvenčné charakteristiky

1.2 Dynamická sústava II. rádu

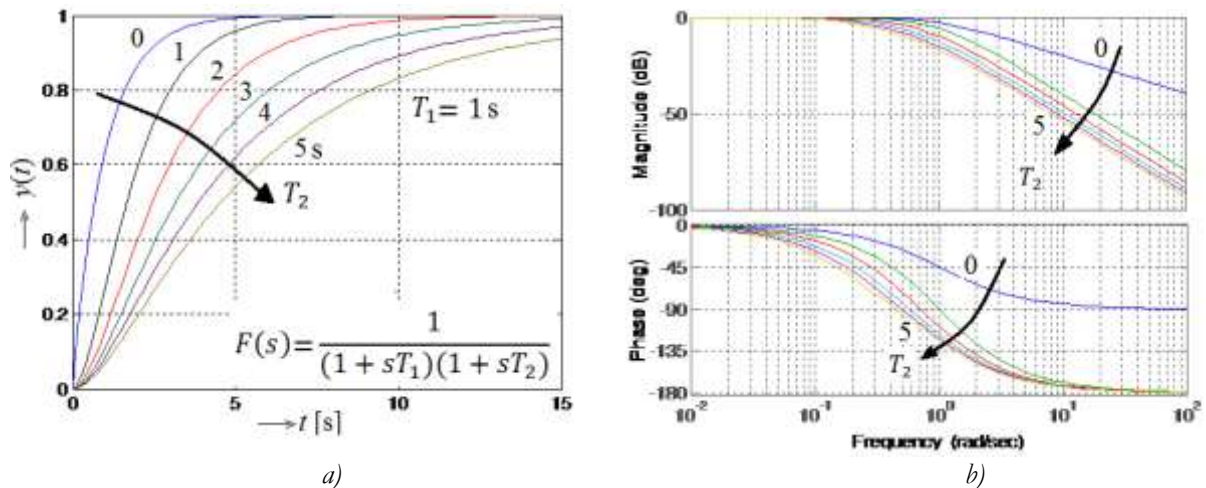
1.2.1 Proporcionálna sústava II. rádu nekmitavá

Prenos tejto sústavy možno vyjadriť v tvare:

$$F(s) = \frac{1}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} \quad (1.4)$$

t.j. má 2 reálne póly $s_1 = -1/T_1$ a $s_2 = -1/T_2$.

Dynamika sústavy závisí od veľkosti a pomeru časových konštánt T_1/T_2 , čo vidno aj na prechodových charakteristikách na Obr. 1.3a.



Obr. 1.3 Vplyv časovej konštanty nekmitavej sústavy II. rádu na: a) prechodové charakteristiky
b) logaritmicke frekvenčné charakteristiky, $T_1 = 1$ s, $T_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ s

V prípade, ak jeden z pólov má 10x väčšiu vzdialenosť od imaginárnej osi, jeho vplyv možno zanedbať a takúto sústavu možno nahradiť sústavou prvého rádu.

1.2.2 Proporcionálna sústava II. rádu kmitavá

Lineárna dynamická sústava druhého rádu je popísaná diferenciálnou rovnicou druhého rádu, ktorá na pravej strane obsahuje proporcionálny člen $b_0 u(t)$ (ide o proporcionálnu sústavu II. rádu) alebo aj derivačnú zložku $b_1 \frac{du(t)}{dt}$ vstupnej veličiny – v tom prípade hovoríme o proporcionálno-derivačnej sústave II. rádu:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \quad (1.5)$$

Jej prenosová funkcia je:

$$F(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} / \frac{1}{a_0} \quad (1.6)$$

ktorá má dva póly p_1, p_2 a jednu nulu z_1 (z angl. – zero) prenosu.

V tejto stati analyzujeme prípad bez nuly v prenosovej funkcii. Pre analýzu dynamických vlastností je vhodnejšie vychádzať z diferenciálnej rovnice:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2d}{\omega_0} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t) \quad (1.7)$$

čo vedie na štandardný prenos sústavy II. rádu:

$$F(s) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2d}{\omega_0} s + 1} \quad (1.8)$$

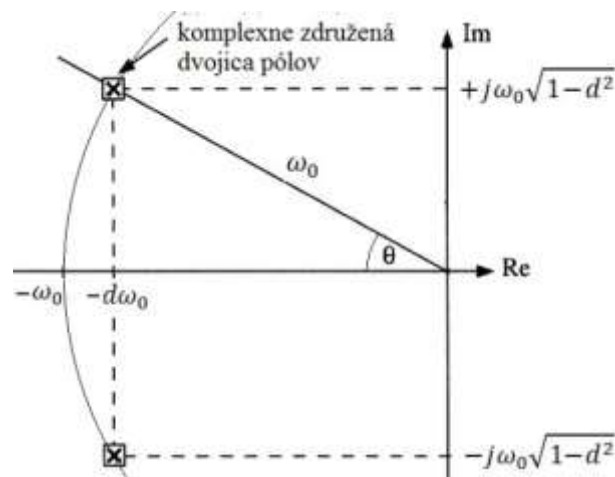
kde $K = b_0/a_0$. V ďalších úvahách predpokladajme zosilnenie $K = 1$ (v podstate to znamená, že výstupná veličina je K -krát väčšia, ako vstupná)

Dynamické vlastnosti závisia od frekvencie netlmených kmitov ω_0 a od tlmenia sústavy d a sú dané polohou pólov prenosovej funkcie (Obr. 1.4):

$$s_{1,2} = -d\omega_0 \pm j\omega_0 \sqrt{1 - d^2} \quad (1.9)$$

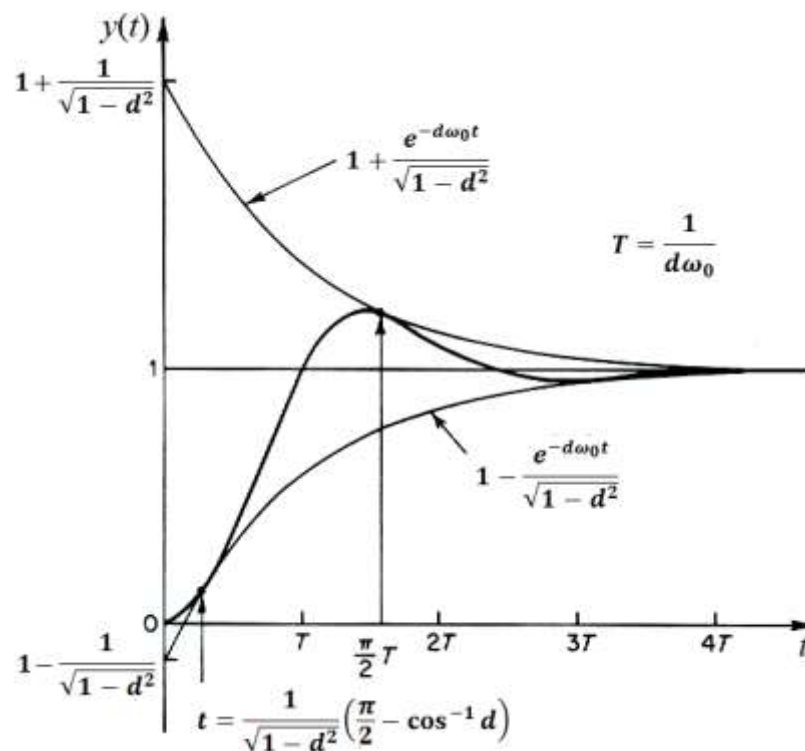
Priebeh prechodovej charakteristiky dostaneme spätnou Laplaceovou transformáciou prenosu v rov. (1.8), pričom uvažujeme s jednotkovým skokom $U(s) = 1/s$ na vstupe sústavy:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} e^{-d\omega_0 t} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-d^2} t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}\right) t \quad (1.10)$$



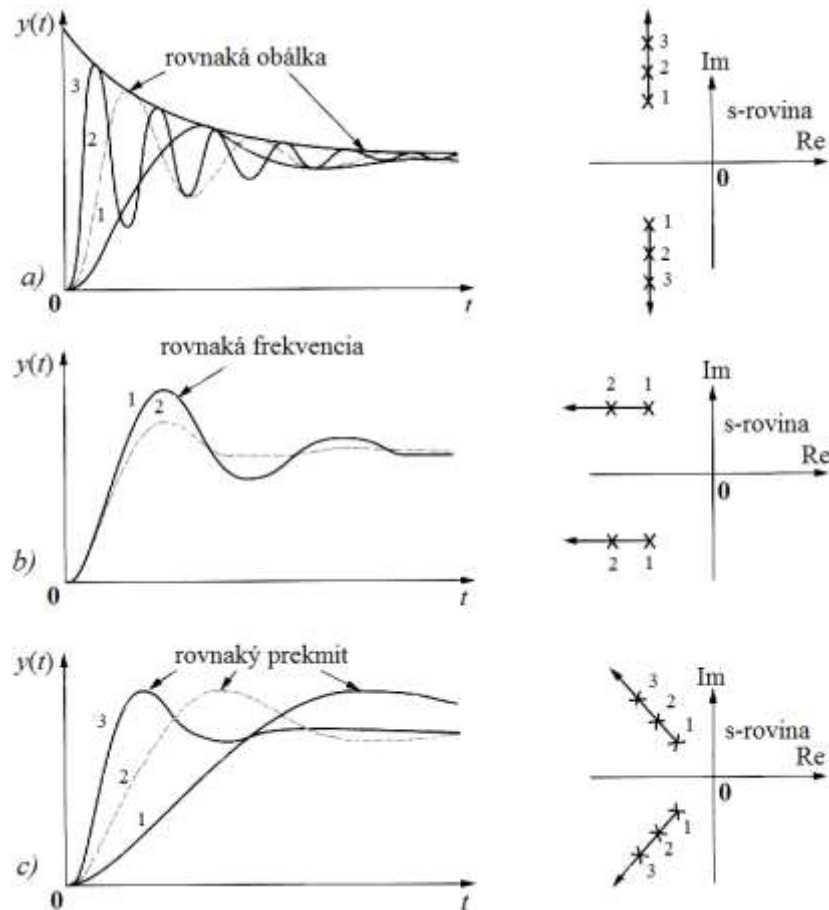
Obr. 1.4 Poloha pólov kmitavej sústavy II. rádu

Od veľkosti tlmenia d závisia obálky časových priebehov kmitov funkcie i prvé maximum, čo je zobrazené na Obr. 1.5.



Obr. 1.5 Priebeh obálok prechodových charakteristík kmitavej sústavy II. rádu

Priebeh prechodových charakteristík tlmeného kmitavého systému závisí od polohy pólov v rovine koreňov. Tvar prechodových charakteristík v závislosti od zmeny reálnej, resp. imaginárnej časti dvojice komplexných koreňov je uvedený na Obr. 1.6.



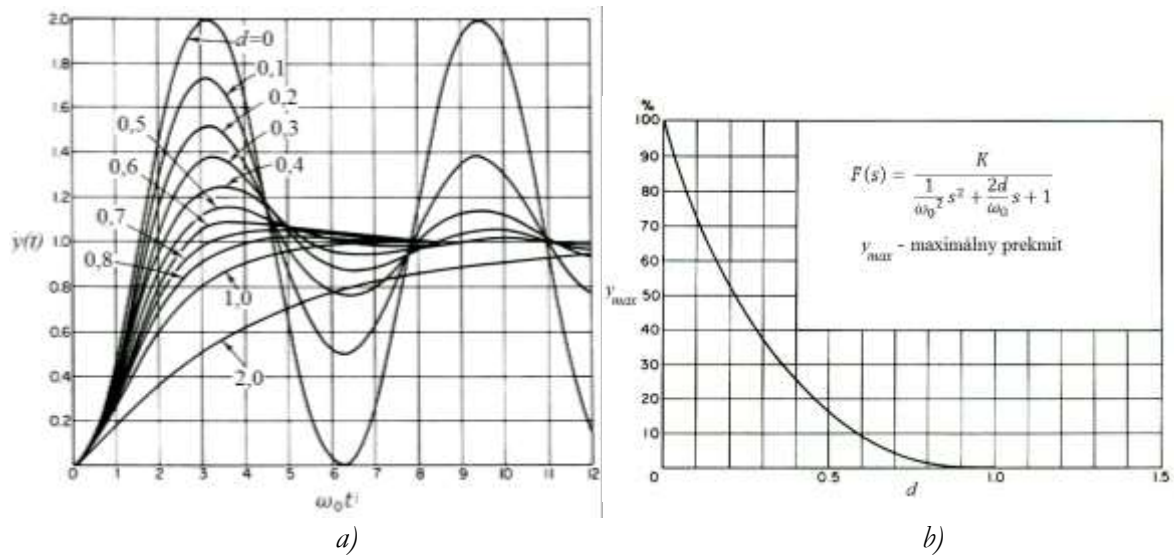
Obr. 1.6 Prechodové charakteristiky kmitavej sústavy II. rádu v závislosti od polohy pólov:
 a) s konštantnou reálnou časťou; b) s konštantnou imaginárnou časťou; c) s konštantným tlmením

V závislosti od veľkosti tlmenia d rozlišujeme niekoľko základných prípadov (Tab. 1.1, [14]).

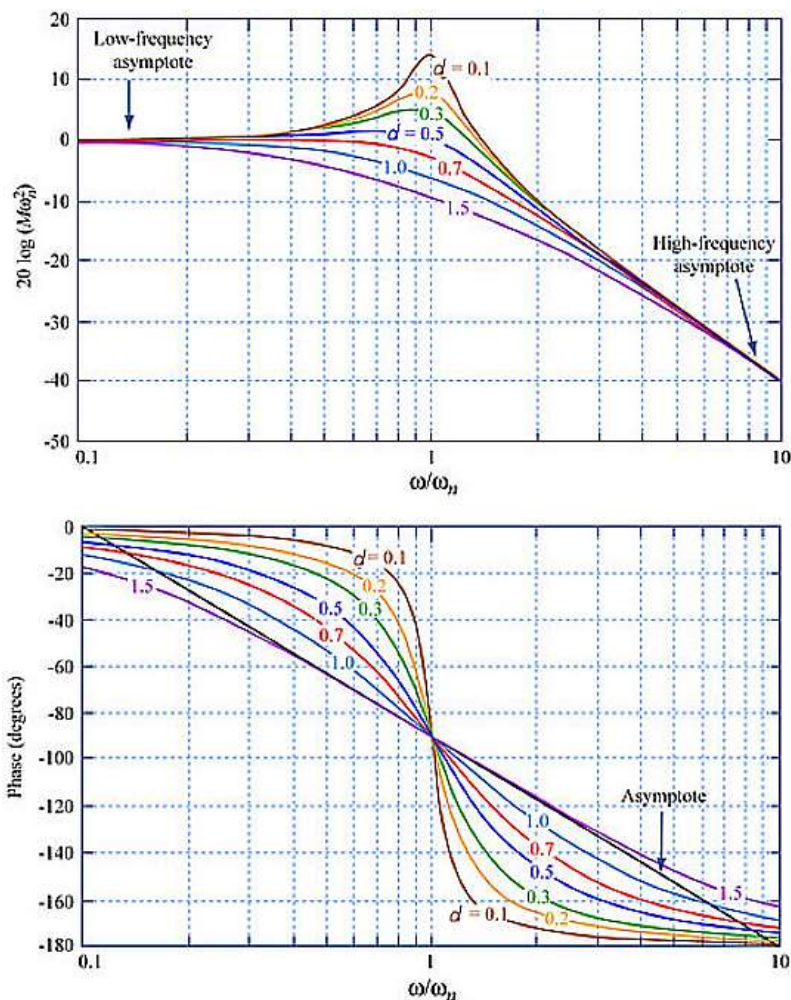
Tab. 1.1 Vlastnosti sústavy II. rádu v závislosti od veľkosti tlmenia d

Tlmenie	Korene	Charakteristika	Ďalšie vlastnosti
$d > 1$	$s_{1,2} = -\omega_0(d \pm \sqrt{d^2 - 1})$	Nekmitavá sústava s dvoma zápornými reálnymi koreňmi.	$F(s) = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)}$ $= \frac{1/(s_1 s_2)}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$
$d = 1$	$s_{1,2} = -\omega_0$	Aperiodický priebeh – najrýchlejší nábeh..	$F(s) = \frac{1}{(s - s_1)^2}$
$d = 0,707$	$ Re(s_i) = Im(s_i) $ $i = 1, 2$	Reálna časť koreňa je rovná imaginárnej. Prekmit je 4,3 %.	$ -d\omega_0 = j\omega_0\sqrt{1-d^2} $ $\Rightarrow d = \sqrt{2}$
$0 < d < 1$	$s_{1,2} = -d\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-d^2}$	Kmitavá sústava s tlmenými kmitmi.	Kruhová frekvencia kmitov $\omega_0\sqrt{1-d^2}$
$d = 0$	$s_{1,2} = \pm j\omega_0$	Kmitavá sústava s netlmenými kmitmi.	$F(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2}s^2 + 1}$

Priebeh odpovedajúcich prechodových charakteristík v závislosti od tlmenia systému je uvedený na Obr. 1.7a. Maximálny prekmit tiež závisí od veľkosti tlmenia d a táto závislosť je znázornená na Obr. 1.7b.

Obr. 1.7 Priebehy prechodovej charakteristiky kmitavej sústavy II. rádu v závislosti od hodnoty tlmenia d

Priebeh Bodeho logaritmickej frekvenčnej charakteristiky v závislosti od činiteľa tlmenia je nasledujúci:



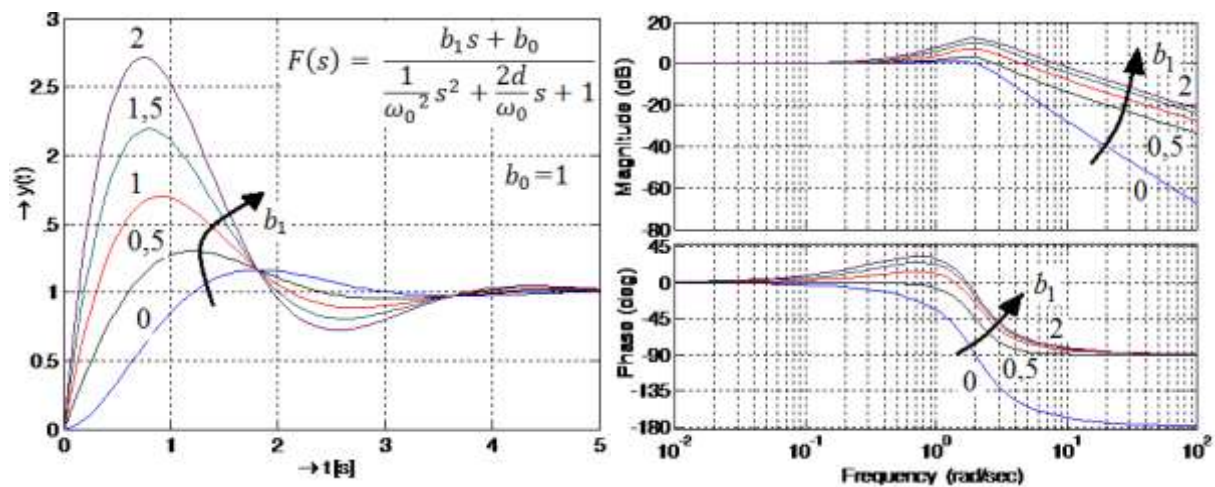
1.2.3 Proporcionálno-derivačná kmitavá sústava II. rádu

Proporcionálno-derivačná sústava II. rádu s prenosom

$$F(s) = \frac{b_1 s + b_0}{\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2d}{\omega_0} s + 1} \quad (1.11)$$

obsahuje nulu systému $z = -b_0/b_1$, ktorá ovplyvňuje priebeh prechodových charakteristík: ich amplitúdu, ale nie charakter (napr. tlmené kmity aj v tomto prípade budú tlmenými).

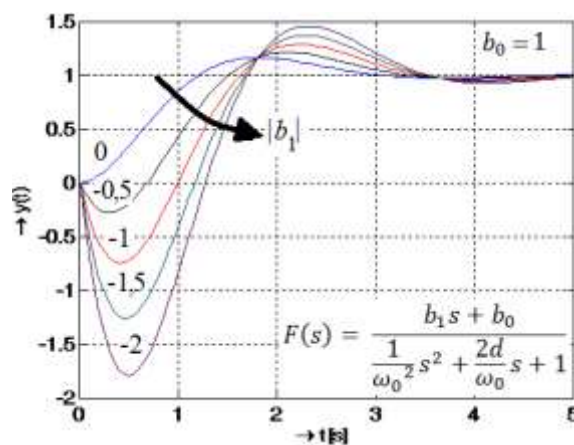
Prechodové charakteristiky závisia od veľkosti nuly prenosovej funkcie, ako je to zobrazené na Obr. 1.8. Tieto časové ododzvy platia pre PD sústavu II. rádu: $\omega_0 = 2$ rad/s a $d = 0,5$, t.j. pre polohu pólov $s_{1,2} = -1 \pm 1,732j$ a $b_0 = 1$. Mení sa hodnota nuly prenosu (tiež nazývané nuly systému): pre hodnoty koeficienta $b_1 = 0; 0,5; 1; 1,5; 2$ odpovedajúca (záporná) nula systému nadobúda postupne hodnoty $z_1 = \infty; -2; -1; -0,666; -0,5$.



Obr. Chyba! Dokument neobsahuje žiadny text so zadaným štýlom. 8 Vplyv polohy nuly systému kmitavej PD sústavy II. rádu pre: $\omega_0 = 2$ rad/s a $d = 0,5$ na:

a) prechodové charakteristiky, b) Bodeho logaritmickej frekvenčné charakteristiky

Kladná nula prenosu (hovoríme, že je nestabilná) spôsobuje podkmit prechodovej charakteristiky na začiatku priebehu (Obr. 1.9). Priebehy platia tú istú sústavu II. rádu, ako na Obr. 1.8, ale pre záporné hodnoty: $b_1 = 0; -0,5; -1; -1,5; -2$, t.j. pre kladné hodnoty núl prenosu $z_1 = \infty; 2; 1; 0,666; 0,5$. Hovoríme, že v tomto prípade ide o systém s neminimálnou fázou.



Obr. 9 Vplyv kladnej nuly systému na prechodové charakteristiky PD kmitavej sústavy II. rádu

Nula prenosu $z = -b_0/b_1$ vplýva na veľkosť prekmitu a jej vplyv možno zanedbať, ak sa nachádza od imaginárnej osi vo vzdialenosti danej nerovnosťou:

$$\left| \frac{b_0/b_1}{d\omega_0} \right| \geq 10 \quad (1.12)$$

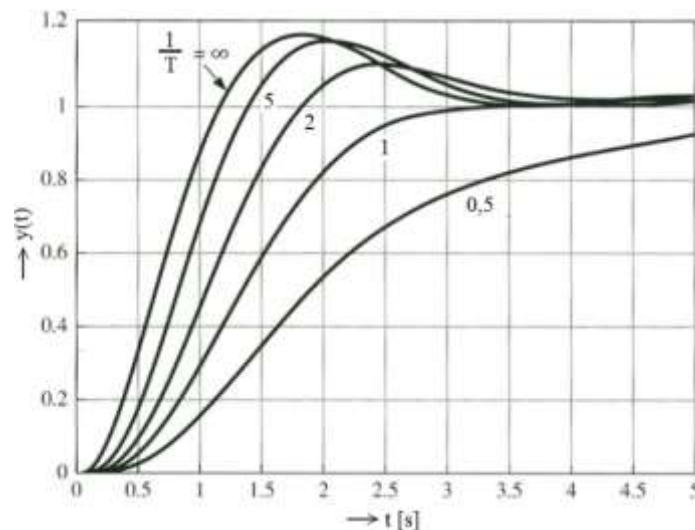
1.3 Dynamické sústavy vyšších rádo

1.3.1 Sústava III. rádu

V prípade, ak kmitavá sústava je vyššieho rádu ako 2, nedá sa jednoznačne určiť frekvencia kmitov a prekmit – tretí pól výrazne vplýva na dynamické vlastnosti sústavy. Analyzujeme prenos proporcionálnej kmitavej sústavy III. rádu v tvare:

$$F(s) = \frac{1}{(1 + sT) \left(\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2d}{\omega_0} s + 1 \right)} \quad (1.13)$$

ktorý má dvojicu komplexne združených pólů z reálnou zložkou $-d\omega_0$ a pól na zápornej reálnej osi $-1/T$ (Obr. 1.10)



Obr. 1.10 Vplyv polohy tretieho (reálneho) pólu na časovú odozvu systému proporcionálnej kmitavej sústavy III. rádu (ak sústava druhého rádu má $\omega_0 = 2$ rad/s a $d = 0,5$)

Ak reálny pól je 10 násobne vzdialenejší od imaginárnej osi, t.j. ak platí

$$\left| \frac{1/T}{d\omega_0} \right| \geq 10 \quad (1.14)$$

jeho vplyv spravidla môžeme zanedbať.

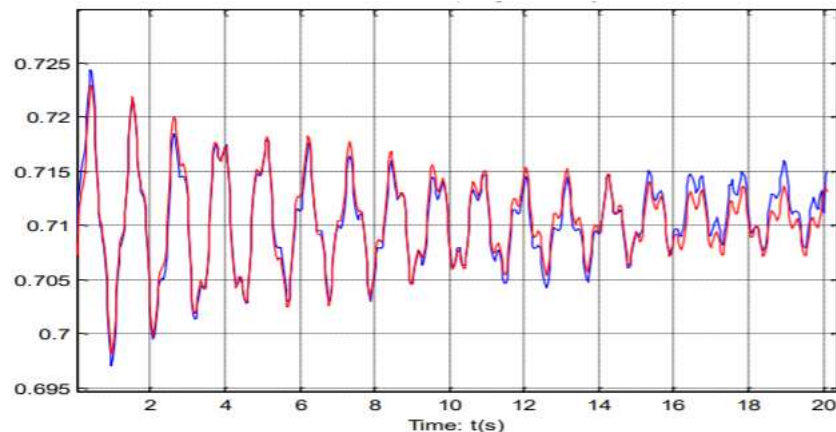
Vplyv polohy tretieho pólu na odozvu kmitavej sústavy pre $\omega_0 = 2$ rad/s a $d = 0,5$ (platí pre sústavu II. rádu) je znázornený na Obr. 1.9. Čím je poloha tretieho pólu v rovine koreňov vzdialenejšia vľavo od reálnej osi, tým je jeho vplyv menší a naopak – čím je bližšia ku imaginárnej osi, tým viac prevláda kmitavý charakter sústavy II. rádu.

1.3.1 Sústava IV. rádu

Pri kmitavej sústave IV. rádu máme dve možnosti v rozmiestnení stabilných pólů?

- jedna dvojica komplexne združených koreňů a dva reálne korene, pričom rozhodujúce je vzájomné rozmiestnenie pólů a predovšetkým poloha dominantných pólů (ktoré sú najbližšie k imaginárnej osi. Frekvencia kmitania je daná veľkosťou imaginárnej zložky dvojice komplex

- dve dvojice komplexne združených pólov. V tomto prípade dostávame dve rôzne frekvencie, na ktorých obvody kmitá ktoré sa sčítavajú a priebeh výstupného napätia na prvý pohľad nemá nijké zákonitosti.



POUŽITÁ A ODPORÚČANÁ LITERATÚRA

Kapitola 3: Dynamické modely základných prenosových sústav a ich analýza

- [1] KLEE, H. – ALLEN, R.: Simulation of Dynamic Systems with MATLAB and Simulink. Second edition, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2011, ISBN 978-1-4398-3673-6.
- [2] CHEEVER, E.: Linear Physical Systems Analysis. Online [cit. 2015-05-17]
<http://lpsa.swarthmore.edu>
- [3] Analogous Electrical and Mechanical Systems. Online [cit. 2015-05-17].
<http://lpsa.swarthmore.edu/Analog/ElectricalMechanicalAnalog.html>
- [4] DRIELS, M.: Linear Control Systems Engineering. McGraw-Hill Inc., 1996.
- [5] Linearization for Model Analysis and Control Design. MathWorks, Online [cit. 2015-05-17]
<http://www.mathworks.com/discovery/linearization.html>
- [6] MathWorks: Simulink Control Design, Linearize models and design control systems, Online [cit. 2015-05-17]
http://www.mathworks.com/help/slcontrol/index.html#linearization_1
- [7] OGATA K.: Modern Control Engineering. Prentice-Hall International, Inc., 1990
- [8] Dynamic System Response
https://www.me.psu.edu/cimbala/me345/Lectures/Dynamic_systems.pdf
- [9] First Order System Types, <http://engineering.ju.edu.jo/Laboratories/04%20-%20First%20Order%20System.pdf>
- [10] Second Order Systems
<https://apmonitor.com/pdc/index.php/Main/SecondOrderSystems>