

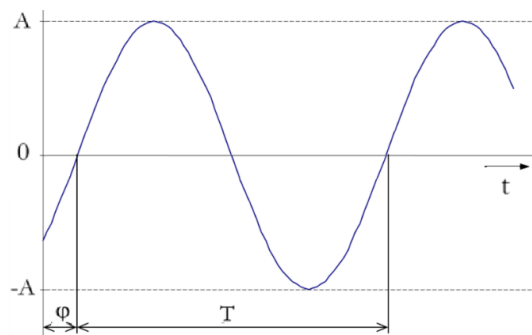
7 Harmonická analýza signálov

Klasickou metódou analýzy pri spracovaní signálu je Fourierova analýza. Pri spracovaní signálov spravidla ide o tieto úlohy:

- **Analýza signálov.** Pôvodný signál sa analyzuje rozdelením signálu na základné zložky, ktoré popisujú charakteristické vlastnosti daného signálu.
- **Syntéza signálov.** Ak poznáme elementárne zložky signálu, ako rekonštruujeme signál z jeho elementárnych zložiek, alebo aspoň zostrojíme rozumnú aproximáciu pôvodného signálu.

7.1 Matematický popis harmonického signálu

Harmonický signál je opísaný troma veličinami: amplitúdou, frekvenciou a fázou.



A	amplitúda signálu	[V alebo A]
T	doba periódy signálu	[s]
φ	fázový posun	[rad]
$f = 1 / T$	frekvencia	[s ⁻¹]
$\omega = 2 \pi f$	kruhovú frekvencia	[rad s ⁻¹]

Obr. 1 Všeobecný harmonický signál $A \sin(\omega t - \varphi)$

Matematicky časový priebeh harmonického signálu môžeme vyjadriť pomocou vzťahu (vyjadrenie v polárnych súradniciach $\{r, \varphi\}$):

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

kde A je amplitúda signálu. Tento signál môžeme opísať tiež pomocou dvoch zložiek navzájom kolmých (pravouhlé vyjadrenie $\{x, y\}$):

$$f(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad (2)$$

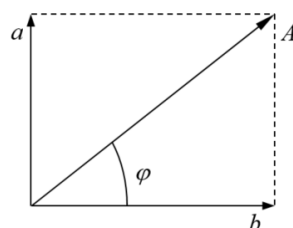
kde sme využili vzťah z goniometrie pre sínus súčtu uhlov:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

konkrétne:

$$f(t) = A \sin \varphi \cdot \cos \omega t + A \cos \varphi \cdot \sin \omega t = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

Pre prevod medzi týmito dvoma zápismi platia vzťahy (Obr. 2):



$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad a = A \sin \varphi$$

$$\varphi = \arctg \frac{a}{b} \quad b = A \cos \varphi$$

Obr. 2 Súvis medzi zápisom v polárnych a pravouhlých súradniciach

Funkciu $f(t)$ môžeme vyjadriť aj pomocou exponenciálneho tvaru komplexného čísla:

$$f(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Harmonický priebeh tiež vyjadrujeme pomocou fázora (vektora, rotujúceho uhlovou rýchlosťou ω).

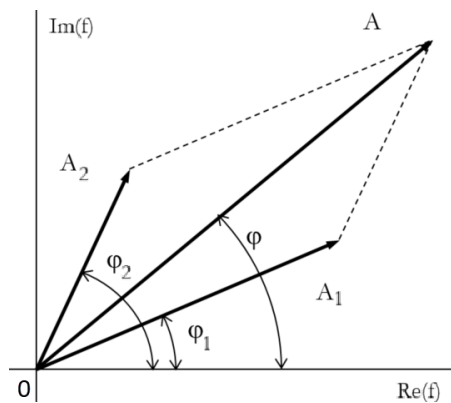
7.2 Zlučovanie harmonických signálov

Pri lineárnom zlučovaní harmonických signálov môžu nastať nasledujúce prípady:

- Sčítanie signálov s **rovnakými** frekvenciami
- Sčítanie signálov so **značne rozdielnymi** frekvenciami
- Sčítanie signálov s **veľmi blízkymi** frekvenciami

7.2.1 Sčítanie signálov s rovnakými frekvenciami

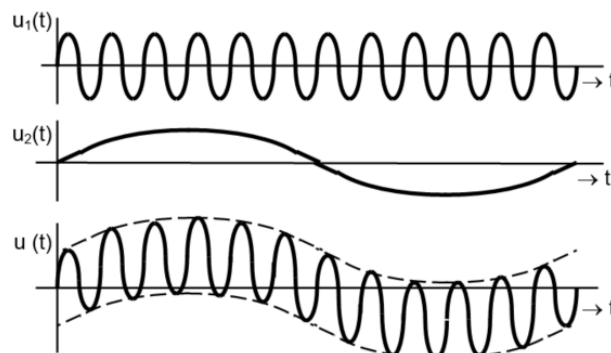
Ak si priebehy predstavíme ako fázory, ktoré rotujú rovnakou rýchlosťou, je zrejmé. Že ich vzájomná fáza sa nebude meniť. Výsledkom ich sčítania bude päť harmonický signál s rovnakou frekvenciou. Amplitúda a fáza je daná ich vektorovým súčtom (Obr. 3).



Obr. 3. Sčítanie dvoch signálov s rovnakou frekvenciou

7.2.2 Sčítanie signálov so značne rozdielnymi frekvenciami

Doba periódy druhej zložky signálu $u_2(t)$ je niekoľkonásobkom doby periódy prvej zložky signálu $u_1(t)$. Pri pozorovaní výsledného signálu $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ možno zreteľne rozlíšiť jednotlivé frekvencie (Obr. 4).

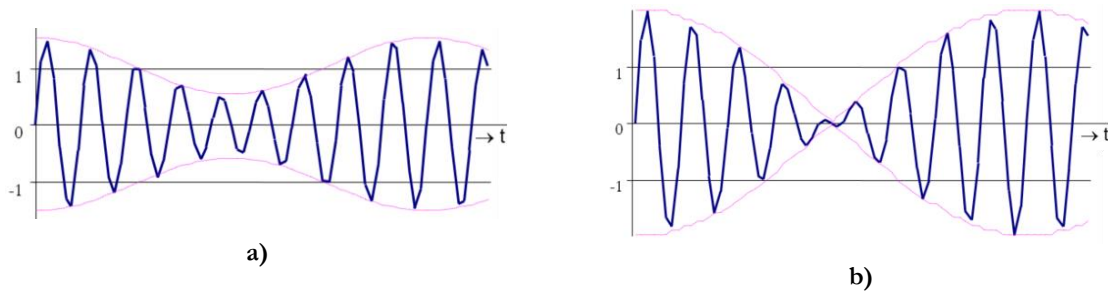


Obr. 4 Sčítanie dvoch signálov so značne odlišnou frekvenciou

Jednotlivé signály možno z tohto výsledného signálu opäť oddeliť pomocou dolnej a hornej priepuste s vhodne volenými medznými frekvenciami.

7.2.3 Sčítanie signálov s veľmi blízkymi frekvenciami

Ak sčítame dva signály s blízkymi frekvenciami, pri ktorých sa doba periódy líši iba málo, môžeme použiť nasledujúcu úvahu: Predpokladajme, že v určitom okamihu sú signály vo fáze, t.j. ich amplitúdy sa sčítajú. Po prvej perióde signálu s vyššou frekvenciou signál s nižšou frekvenciou sa oneskoruje o časť periódy. V ďalšej perióde sa oneskorenie zvýši. Po určitej dobe budú signály v protifáze a ich amplitúdy sa odpočítavajú. Potom sa vzájomná fáza opäť mení tak, že sa signály sčítajú vo fáze. Periodicky sa mení výsledná amplitúda signálu s frekvenciou, vzniká tzv. záznej (obr. 5a). Frekvencia zázneja sa rovná rozdielu oboch frekvencií. $f_z = f_1 - f_2$

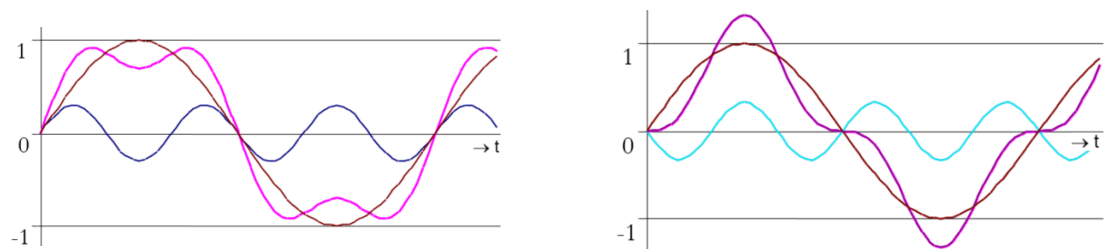


Obr. 5 Sčítanie signálov s veľmi blízkymi frekvenciami

7.2.4 Sčítanie signálov se súdeliteľnými frekvenciami

Ak k signálu so základnou frekvenciou prirátame druhý signál s frekvenciou, ktorá je celistvým násobkom frekvencie základnej, dostaneme výsledný signál, ktorý už nie je harmonický, ale všeobecne periodický.

Na susedných obrázkoch v Obr. 6 je uvedený súčet základnej frekvencie (s amplitúdou 1) sa signálom s trojnásobnou frekvenciou.



Obr. 6 Pripočítanie signálu s trojnásobnou frekvenciou k základnému signálu

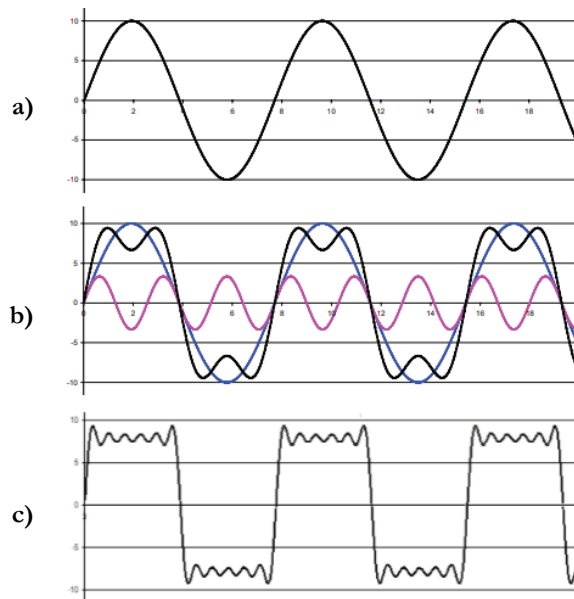
Z obrázkov je zrejmé, že tvar výsledného priebehu je závislý nielen na vzájomnom pomere amplitúd, ale aj na ich fáze. Tieto násobky základnej frekvencie sa nazývajú vyššie harmonické zložky. Pridávaním ďalších harmonických s rôznymi amplitúdami a fázami je možné vytvoriť ľubovoľný periodický priebeh.

V akustike udáva frekvencia základnej harmonickej výšky tónu. Obsah vyšších harmonických určuje farbu tónu. Tón rôznych hudobných nástrojov sa teda líši časovým priebehom, ktorý obsahuje rozdielne vyššie harmonické.

Na Obr. 7 je uvedený príklad skladanie jednotlivých harmonických zložiek pri vytváraní harmonického signálu. Amplitúda n -tej harmonickej je pritom (pozri Tab. 1):

$$A_n = \frac{4}{\pi n} A \quad (4)$$

kde A je amplitúda obdĺžnikového signálu.



Obr. 7 Skladanie jednotlivých harmonických signálov pre vytvorenie obdĺžnikového signálu:

a) 1. harmonická, b) 1., a 3. harmonická, c) 1., 3., 5. a 7. harmonická

7.3 Harmonická analýza

7.3.1 Fourierov rad

Ak zo signálu pri určitej základnej frekvencii pridaním vyšších harmonických vieme vytvoriť ľubovoľný periodický priebeh, platí aj opačne: akýkoľvek všeobecný periodický priebeh vieme previesť na súbor dielčích harmonických priebehov. Tento rad je vo všeobecnosti nekonečný v tvare:

$$f(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + A_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots \quad (5)$$

kde A_0 jednosmerná zložka
 A_1 amplitúda základnej harmonickej
 A_n amplitúda n -tej harmonickej, n – prirodzené číslo v rozsahu 1 až ∞
 φ_n fáza n -tej harmonickej

Rad možno napísať v tvare:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad (6)$$

Pre výpočet sa tento rad prevádza na štandardný tvar Fourierovho radu v ktorom jednotlivé harmonické sú určené sínusovými a kosínusovými zložkami. Ľubovoľný periodický priebeh môžeme nahradiť nekonečným trigonometrickým Fourierovým radom:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \dots \\ + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \dots \quad (7)$$

Tento rad možno zapísať tiež v tvare:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

kde:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Pre jednosmernú zložku a_0 je $\cos 0 = 1$ a preto

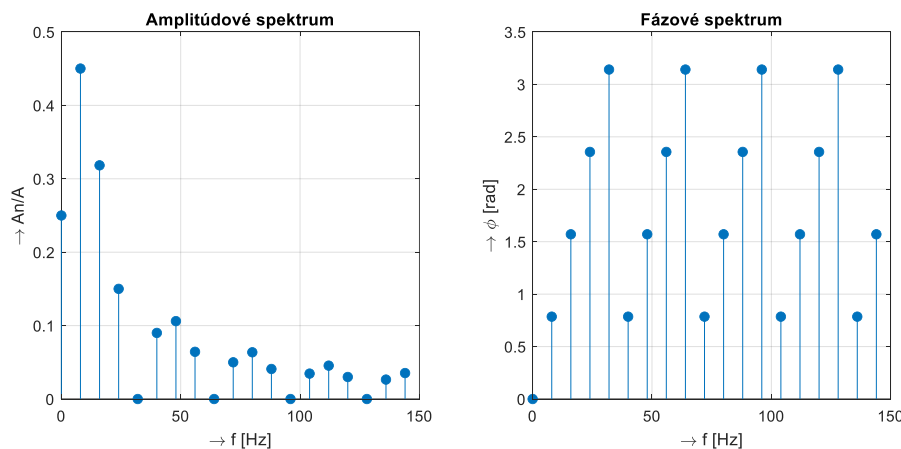
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (9)$$

Určitý integrál sa nemusí sa počítať v medziach $\langle 0; T \rangle$, ale môže byť napr. aj v intervale $\langle -T/2; T/2 \rangle$.

Amplitúda a fáza n-tej harmonickej je:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \varphi_n = \arctg \frac{a_n}{b_n} \quad (10)$$

Hodnoty amplitúd a fáz jednotlivých harmonických zakreslíme do grafu v závislosti buď od poradia harmonickej alebo od frekvencie, čím dostaneme amplitúdové a fázové spektrum signálu. Príklad spektra v závislosti od frekvencie je uvedený na Obr. 8.



Obr. 8 Amplitúdové a fázové spektrum signálu

Pre zjednodušenie môžeme previesť čas previesť na uhol $x = \omega t$, pričom doba periódy je $T = 2\pi$. Vzorce pro výpočet koeficientov potom budú:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad (11)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Podobne, ako v predchádzajúcom prípade určitý integrál sa nemusí sa počítať v medziach $\langle 0; 2\pi \rangle$, ale môže byť napr. aj v intervale $\langle -\pi; \pi \rangle$.

Amplitúdu a fázu n-tej harmonickej vypočítame analogicky podľa vzorcov (10):

Pre použitie týchto vzorcov je potrebné, aby priebeh signálu bol definovaný matematicky a tiež treba vedieť analyticky vypočítať integrály. Pri jeho výpočte možno výhodne použiť symbolický počet v MATLABe, alebo potrebné integrály možno vypočítať numericky, ako je to uvedené v stati 7.3.2.

V príručkách sú uvedené vzorce pro základné časové priebehy signálu (impulzný, obdĺžnikový, trojuholníkový, pilovitý, lichobežníkový atď.). Okrem toho sú pri niektorých priebehoch určité koeficienty nulové, ako to vyplýva z pravidiel uvedených v Tab. 1.

Tab. 1 Pravidlá pre zjednodušenie výpočtov Fourierovho radu

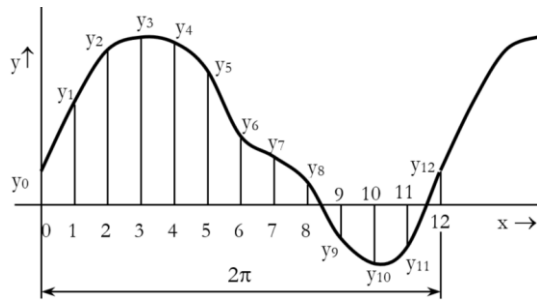
#	Pravidlo	Priebeh funkcie
1)	Signály, pri ktorých v intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$ plocha nad osou t sa rovná ploche pod touto osou ($S_1 = S_2$), nemajú jednosmernú zložku , t.j. $a_0 = 0$.	
2)	Funkcie stredovo súmerné podľa počiatku $-f(t) = f(-t)$ majú iba sínusové zložky ; všetky kosínusové zložky sú nulové .	
3)	Funkcie osovo súmerné podľa osi majú iba kosínusové zložky ; všetky sínusové zložky sú nulové .	
4)	Funkcie, ktorých priebeh s prvej polovice periódy sa v druhej polovici opakuje s opačným znamienkom, majú iba nepárne harmonické zložky .	
5)	Funkcie, ktorých priebeh z prvej polovice periódy sa v druhej polovici opakuje s rovnakým znamienkom, majú iba párne harmonické zložky . Prvá harmonická zložka je taktiež nulová.	

7.3.2 Numerická metóda výpočtov koeficientov Fourierovho radu

Pri priebehoch získaných meraním, je obtiažné previesť ich na analytickú funkciu. V takom prípade je vhodné vykonať numerické riešenie pomocou obdĺžnikovej metódy – numerickej náhrady integrálu funkcie. Pri tomto spôsobe:

- 1) najprv rozdelíme periódu signálu 2π na konečný počet rovnakých častí s veľkosťou $\Delta x = 2\pi/c$
- 2) V jednotlivých bodoch určíme hodnoty funkcie y_k . Tým nahradíme spojitú funkciu konečným počtom hodnôt (vzoriek). Čím je väčší je počet dielikov c , tým presnejší je výsledok. Zároveň s tým sa ale zväčšuje množstvo potrebných výpočtov.
- 3) pre určení n harmonických musíme voliť **počet dielikov $c \geq 2n + 2$** .
- 4) integrály pre výpočet koeficientov Fourierovho radu nahradíme približným výpočtom integrálu plochy integrálu tak, že každú vzorku vynásobíme hodnotou funkcie sínus alebo kosínus príslušného uhla $n \cdot k$
- 5) Po vynásobení hodnotou Δx dostaneme plochu obdĺžnikov šírky Δx a výšky, ktorá predstavuje hodnotu funkcie. Sčítaním týchto obdĺžnikov získame približnú hodnotu hľadaného integrálu.

Keďže všetky obdĺžniky majú rovnakú šírku, vzorce pro výpočet koeficientov budú v tvare:



$$a_n = \frac{2}{c} \sum_{k=1}^c y_k \cos nx_k$$

$$b_n = \frac{2}{c} \sum_{k=1}^c y_k \sin nx_k$$

Jednosmerná zložka:

$$a_0 = \frac{2}{c} \sum_{k=1}^c y_k$$

Obr. 9 Princíp numerického riešenie integrálov Fourierovho radu

Pri riešení treba vykonať značný počet výpočtov a preto je vhodnejšie použiť výpočet v tabuľke pomocou tabuľkového kalkulátora (Excelu) – Tab. 2.

Tab. 2 Numerický výpočet koeficientov Fourierovho radu

$c = 12$
 $\Delta x = 0,52 \text{ rad}$

poradie harmonickej:					1.		2.		3.		4.	
k (vzorka)	y_k (funkcia)	x_k (uhol)	$\cos x_k$	$\sin x_k$	$y_k \cdot \cos x_k$	$y_k \cdot \sin x_k$	$y_k \cdot \cos 2x_k$	$y_k \cdot \sin 2x_k$	$y_k \cdot \cos 3x_k$	$y_k \cdot \sin 3x_k$	$y_k \cdot \cos 4x_k$	$y_k \cdot \sin 4x_k$
1	2,0	0,52	0,87	0,50	1,73	1,00	1,00	1,73	0,00	2,00	-1,00	1,73
2	4,6	1,05	0,50	0,87	2,30	3,98	-2,30	3,98	-4,60	0,00	-2,30	-3,98
3	5,0	1,57	0,00	1,00	0,00	5,00	-5,00	0,00	0,00	-5,00	5,00	0,00
4	4,8	2,09	-0,50	0,87	-2,40	4,16	-2,40	-4,16	4,80	0,00	-2,40	4,16
5	4,0	2,62	-0,87	0,50	-3,46	2,00	2,00	-3,46	0,00	4,00	-2,00	-3,46
6	2,0	3,14	-1,00	0,00	-2,00	0,00	2,00	0,00	-2,00	0,00	2,00	0,00
7	1,4	3,67	-0,87	-0,50	-1,21	-0,70	0,70	1,21	0,00	-1,40	-0,70	1,21
8	0,6	4,19	-0,50	-0,87	-0,30	-0,52	-0,30	0,52	0,60	0,00	-0,30	-0,52
9	-1,0	4,71	0,00	-1,00	0,00	1,00	1,00	0,00	0,00	-1,00	-1,00	0,00
10	-1,8	5,24	0,50	-0,87	-0,90	1,56	0,90	1,56	1,80	0,00	0,90	-1,56
11	-1,2	5,76	0,87	-0,50	-1,04	0,60	-0,60	1,04	0,00	1,20	0,60	1,04
12	1,0	6,28	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00
súčet	21,4				-6,3	18,1	-2,0	2,4	1,6	-0,2	-0,2	-1,4
a_0	3,57				a_n/b_n	-1,05	3,01	-0,33	0,40	0,27	-0,03	-0,23
A_0	1,78				A_n	3,19	0,52	0,27	0,23			
					φ_n	1,91	2,26	-0,12			-1,71	

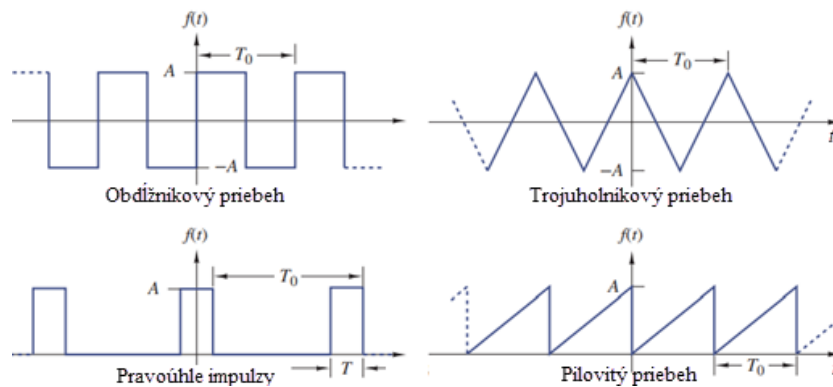
Poznámka

Pre praktické výpočty pomocou počítača sa používa **rýchla Fourierova transformácia** (FFT). Ide o algoritmus výpočtu diskretnej Fourierovej transformácie, ktorý umožňuje znížiť počet vykonaných čiastkových výpočtov a tým celý výpočet značne zrýchliť. Úspora času je obzvlášť zreteľná pri veľkom počte vzoriek. Pre dosiahnutie optimálneho času výpočtu sa meraný úsek rozdelí na počet rovnakých úsekov, ktorých počet je rovný práve mocnine 2 (napr. 512 alebo 4098).

Výsledkom transformácie bude počet harmonických (odvodených od daného intervalu), ktorý je polovicou počtu úsekov (vzoriek). Získané spektrum bude obsahovať nultú harmonickú (jednosmernú zložku), frekvencia prvej harmonickej bude prevrátenou hodnotou transformovaného intervalu a frekvencie ďalších harmonických budú celistvými násobkami základnej harmonickej až do frekvencie $N/(2T)$.

7.4 Príklady výpočtu Fourierových koeficientov periodických signálov

Na Obr. 9 sú príklady bežných periodických signálov. Ak je signál neperiodický, potom je na charakterizáciu frekvenčného obsahu signálu potrebná Fourierova transformácia.



Obr. 10 Príklady harmonických priebehov

Príklad: vypočítať Fourierove koeficientov pre pilovitý signál, ktorý počas doby T_0 (Obr. 10) narastá lineárne podľa funkcie:

$$f(t) = A \frac{t}{T_0} \quad 0 \leq t \leq T_0 \quad (13)$$

Riešenie:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{A}{T_0} t dt = \left[\frac{2At^2}{T_0^2} \right]_0^{T_0} = A$$

Znamená to, že podľa Fourierovho rozvoja:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

jednosmerná zložka bude rovná $a_0/2 = A/2$.

Výpočet koeficientov a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{A}{T_0} t \cos n \frac{2\pi}{T_0} t dt = \\ &= \frac{2A}{T_0^2} \left[\frac{\cos(2\pi n t/T_0)}{(2\pi n/T_0)^2} + \frac{t \sin(2\pi n t/T_0)}{2\pi n/T_0} \right]_0^{T_0} = 0 \quad \text{pre všetky } n \end{aligned}$$

Keďže $a_n = 0$, vo výsledku nebudú žiadne kosínusové členy a aj fáza $\varphi_n = 0$ pre všetky n .

Koeficienty b_n dostaneme nasledovne:

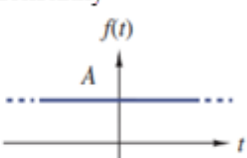
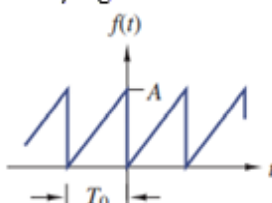
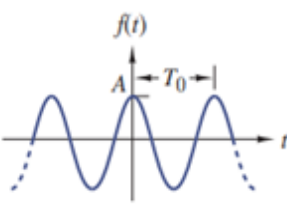
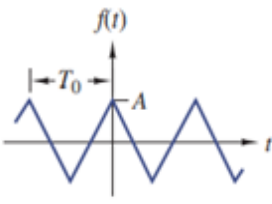
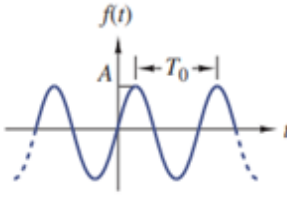
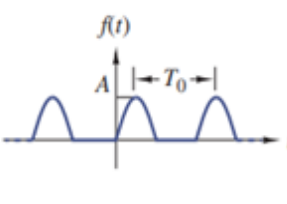
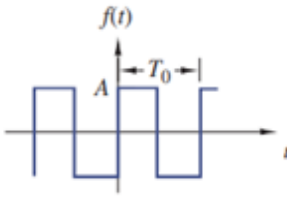
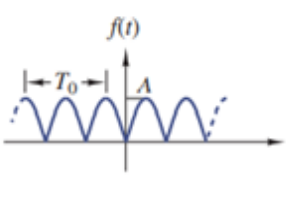
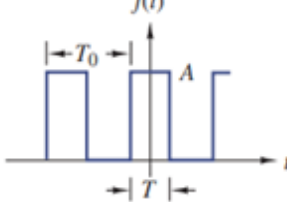
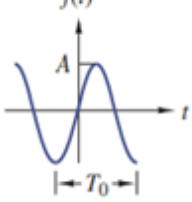
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{A}{T_0} t \sin n \frac{2\pi}{T_0} t dt =$$

$$= \frac{2A}{T_0^2} \left[\frac{\sin(2\pi n t/T_0)}{(2\pi n/T_0)^2} - \frac{t \cdot \cos(2\pi n t/T_0)}{2\pi n/T_0} \right]_0^{T_0} = -\frac{A}{n\pi} \quad \text{pre všetky } n$$

Fourierov rad pilovitého signálu bude:

$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{A}{n\pi} \sin n \frac{2\pi}{T_0} t \right)$$

Tab. 3 Fourierove koeficienty niektorých typických periodických signálov

Signál	Fourierove koeficienty	Signál	Fourierove koeficienty
<p>Konštantný</p> 	$a_0 = A$ $a_n = 0$ pre všetky n $b_n = 0$ pre všetky n	<p>Pilovitý signál</p> 	$a_0 = \frac{A}{2}$ $a_n = 0$ pre všetky n $b_n = -\frac{A}{n\pi}$ pre všetky n
<p>Kosínusová vlna</p> 	$a_0 = 0$ $a_1 = A$ $a_n = 0$ $n \neq 1$ $b_n = 0$ pre všetky n	<p>Trojuholníkový signál</p> 	$a_0 = 0$ $a_n = \frac{8A}{(n\pi)^2}$ párne n $a_n = 0$ nepárne n $b_n = 0$ pre všetky n
<p>Sínusová vlna</p> 	$a_0 = 0$ $a_n = 0$ pre všetky n $b_1 = A$ $b_n = 0$ $n \neq 1$	<p>Jednocestné usmernenie</p> 	$a_0 = \frac{A}{\pi}$ $a_n = \frac{2A/\pi}{1-n^2}$ párne n $a_n = 0$ nepárne n $b_1 = \frac{A}{2}$ $n = 1$ $b_n = 0$ $n \neq 1$
<p>Obdĺžnikový signál</p> 	$a_0 = 0$ $a_n = 0$ pre všetky n $b_n = \frac{4A}{n\pi}$ nepárne n $b_n = 0$ párne n	<p>Dvojcestné usmernenie</p> 	$a_0 = 2A/\pi$ $a_n = \frac{4A/\pi}{1-n^2}$ párne n $a_n = 0$ nepárne n $b_n = 0$ pre všetky n
<p>Pravouhle impulzy</p> 	$a_0 = \frac{AT}{T_0}$ $a_n = \frac{2A}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi T}{T_0} \right)$ $b_n = 0$ pre všetky n	<p>Parabolická vlna</p> 	$a_0 = 0$ $a_n = 0$ pre všetky n $b_n = \frac{32A}{(n\pi)^3}$ nepárne n $b_n = 0$ párne n

Použitá a odporúčaná literatúra

- [1] Roland E. Thomas, Albert J. Rosa, Gregory J. Toussain: The analysis and design of linear circuits, John Wiley & Sons, Inc., 2016 (687)
- [2] GCE A level Electronics – Chapter 4: AC Circuits and Passive Filters, [gce-electronics-book-chapter-4.pdf \(wjec.co.uk\)](http://www.wjec.co.uk/gce-electronics-book-chapter-4.pdf)
- [3] Matematický popis harmonického signálu, https://www.kme.zcu.cz/krystek/vyuka/exm1/soubory/Scitani%20a%20FFT%20sign%C3%A1lu_numericka%20a%20graficka%20metoda.pdf
- [4] e-Fyzika I: Kmity a vlny, http://kf-lin.elf.stuba.sk/~ballo/STU_online/Fyzika%20I/VI%20kapitola/kmity-vlny1.htm