

Prednáška 3: Modelovanie pasívnych elektrických RLC obvodov

V tejto kapitole sa budeme zaoberať problematikou zostavenie prenosových funkcií elektrických analytickým spôsobom, pomocou matematického modelovania, zostavením diferenciálnych rovníc aplikáciou niektorých fyzikálnych zákonov, známych z elektrických obvodov (Ohmov zákon, I. a II. Kirchhoffov zákon).

Využijeme pritom charakteristické zákonitosti medzi elektrickým prúdom a napätím v elektrických obvodoch.

1 Modelovanie obvodu metódou slučkových prúdov

Uvedieme tu princíp odvodenia prenosovej funkcie v elektrickom obvode pozostávajúcom z pasívnych prvkov R, L, C a zo zdrojov napätia $u(t)$, resp. prúdu $i(t)$.

Indukčnosť a kondenzátor predstavujú zásobníky energie (elektromagnetickej, resp. elektrostatickej), zatiaľ čo na odpore sa energia stráca.

V obvode zadefinujeme vstupnú veličinu, výstupnú veličinu a nájdeme medzi nimi hľadaný prenos aplikujúc prvý a druhý Kirchhoffov zákon [2]. Pri zostavovaní rovníc využívame zákonitosti medzi napätím a prúdom na jednotlivých prvkoch R, L, C .

Indukčnosť a kondenzátor predstavujú zásobníky energie (elektromagnetickej, resp. elektrostatickej), zatiaľ čo na odpore sa energia stráca.

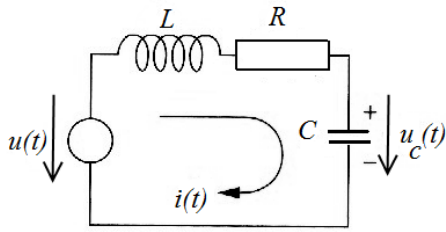
Vzťahy medzi napätím a prúdom, resp. napätím a nábojom pasívnych R, L, C prvkov obvodu

Prvok obvodu	Napätie-prúd	Prúd-napätie	Impedancia v LT $Z(s) = \frac{U(s)}{I(s)}$
Kondenzátor (kapacita)	$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$	$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$	$Z_C(s) = \frac{1}{Cs}$
Rezistor (odpor)	$u_R(t) = R i(t)$	$i(t) = \frac{1}{R} u_R(t)$	$Z_R(s) = R$
Cievka (indukčnosť)	$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\tau) d\tau$	$Z_L(s) = Ls$

Postup pri prenosovej funkcii v elektrickom obvode pozostávajúcom z pasívnych prvkov R, L, C a zo zdrojov napätia $u(t)$, resp. prúdu $i(t)$ **pomocou metódy slučkových prúdov.**

- 1) pri riešení vychádzame zo slučkových prúdov – zvolíme ich smer pre každú slučku zostavíme napäťové rovnice podľa II. KZ,
- 2) tieto rovnice upravíme pomocou vzťahov v tabuľke, aby sme dostali diferenciálne rovnice (vylúčením integrálov z rovníc obvodu).
- 3) Získanú rovnicu (rovnice) riešime vzhľadom na prúd.
- 4) Ak sú známe prúdy vo vetvách, napätie na zvolenom prvku dostaneme aplikáciou Ohmovho zákona a vyriešime prenosovú funkciu.

Pozn.: Variantom metódy MSP je metóda slučkových napätí (MSP).



pre AC: https://javalab.org/en/rlc_serial_circuit_en/

V obvode zadefinujeme vstupnú veličinu, výstupnú veličinu a nájdeme medzi nimi hľadaný prenos aplikujúc prvý a druhý Kirchhoffov zákon a Ohmov zákon. Pri zostavovaní rovníc využívame zákonitosti medzi napätím a prúdom na jednotlivých prvkoch R, L, C . Zápis základných rovníc obvodu – aplikujeme **druhý Kirchhoffov zákon (KZ) pre napätia v slučke**:

$$u(t) = u_L(t) + u_R(t) + u_C(t)$$

Dosadíme za napätia:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = u(t)$$

Je to **diferenciálno-integračná rovnica**, nedá sa riešiť jednoduchými metódami. Obídeme to vylúčením integrálu - zavedieme **elektrický náboj**:

$$q(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau \qquad i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

čím odstránime integrál za cenu zvýšenia derivácie všetkých veličín.

Prvok obvodu	Napätie-prúd	Napätie-náboj
Kondenzátor (kapacita)	$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$	$u_C(t) = \frac{1}{C} q(t)$
Rezistor (odpor)	$u_R(t) = R i(t)$	$u_R(t) = R \frac{dq(t)}{dt}$
Cievka (indukčnosť)	$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$u_L(t) = L \frac{d^2q(t)}{dt^2}$

Napätie na kondenzátore je: $u_C(t) = \frac{1}{C} q(t)$, odkiaľ $q(t) = C u_C(t)$

Týmto prúd aj jeho derivácia bude:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{d^2q(t)}{dt^2} = C \frac{d^2u_C(t)}{dt^2}$$

Po dosadení do rovnice pre súčet napätí v slučke dostaneme:

$$LC \frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u(t)$$

Rovnicu prevedieme do Laplaceovej transformácie:

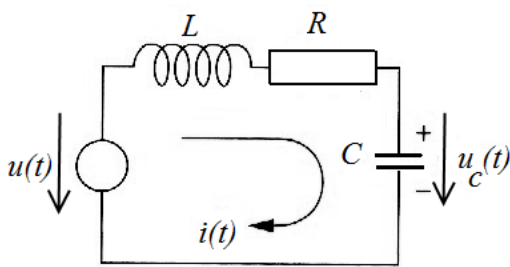
$$(LCs^2 + RCs + 1)U_C(s) = U(s)$$

odkiaľ po zápise do LT dostaneme hľadaný prenos:

$$F_C(s) = \frac{U_C(s)}{U(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

2 Výpočet prenosovej funkcie v Laplaceovej transformácii

Prvok obvodu	Napätie-prúd v časovej oblasti	Napätie-prúd v Laplaceovej transformácii	Impedancia v LT $Z(s) = \frac{U(s)}{I(s)}$
Kondenzátor	$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$	$U_C(s) = \frac{1}{sC} I(s)$	$Z_C(s) = \frac{1}{sC}$
Odpor	$u_R(t) = R i(t)$	$U_R(s) = R I(s)$	$Z_R(s) = R$
Indukčnosť	$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$U_L(s) = L s I(s)$	$Z_L(s) = Ls$



Súčet napätí v slučke podľa II. KZ:

$$U(s) = U_L(s) + U_R(s) + U_C(s)$$

Po dosadení a úprave:

$$L s I(s) + R I(s) + \frac{1}{sC} I(s) = U(s)$$

$$\left(\frac{s^2 LC + sRC + 1}{sC} \right) I(s) = U(s)$$

odkiaľ pre prenos medzi vstupným napätím a prúdom dostávame:

$$F_I(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{sC}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Odtiaľ vypočítame prúd $I(s) = F_I(s) \cdot U(s)$ a s použitím vzorcov:

$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$

$$U_R(s) = R I(s)$$

$$U_L(s) = L s I(s)$$

vypočítame príslušné napätia na jednotlivých prvkoch obvodu. Tak dostaneme prenosy:

$$F_C(s) = \frac{U_C(s)}{U(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$F_R(s) = \frac{U_R(s)}{U(s)} = \frac{sCR}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$F_L(s) = \frac{U_L(s)}{U(s)} = \frac{s^2 CL}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Pozn.: Najvhodnejšie je zapisovať prenos tak, aby absolútny člen v menovateli bol = 1, potom ho môžeme porovnať so štandardným tvarom prenosovej funkcie

$$F(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2d}{\omega_0} s + 1}$$

Porovnaním prvkov pri jednotlivých mocninách operátora s v menovateli zistíme vzťah medzi tlmením a kruhovou frekvenciou na jednej strane a prvkami obvodu R, L, C :

$$LC = 1/\omega_0^2$$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

$$RC = \frac{2d}{\omega_0}$$

$$d = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

3 Zovšeobecnenie postupu pre riešení obvodov

ktorým zautomatizujeme zostavenie prenosovej funkcie pri metóde slučkových prúdov.

3.1 Princíp

Pre impedanciu platí:

$$Z(s)I(s) = U(s)$$

kde pre indukčnosť je $Z_L(s) = Ls$, pre kondenzátor $Z_C(s) = \frac{1}{Cs}$ a pre odpor $Z_R(s) = R$.

Platí to aj pre impedanciu slučky $Z(s) = Ls + R + \frac{1}{Cs}$ a teda:

$$\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right)I(s) = U(s)$$

čo slovami zapíšeme:

$$(suma\ impedancií\ v\ slučke) \cdot I(s) = suma\ napät'ových\ zdrojov$$

kde $I(s)$ je operátorový obraz slučkového prúdu.

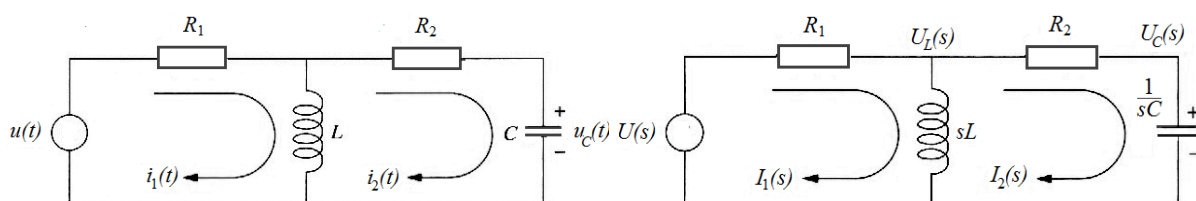
Ak z rov. (2.6) vyjadríme prúd a dosadíme do rovníc pre napätia na prvkoch v slučke:

$$U_L(s) = Ls I(s) \quad U_R(s) = R I(s) \quad U_C(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

dostaneme prenosovú funkciu medzi vstupným napätím a napätím na ľubovoľnom prvku.

3.2 Získanie prenosovej funkcie viacslučkového elektrického obvodu pomocou metódy slučkových prúdov

Zovšeobecňujeme tieto poznatky pre viacslučkový elektrický obvod, napr. dvojslučkový:



Pre každú slučku napíšeme napät'ovú rovnicu. Počet potrebných rovníc odpovedá počtu slučiek.

Ak v slučke sa nachádzajú **vetvy, ktoré sú spoločné pre viac slučiek** a tečie v nich viac slučkových prúdov, úbytok napätia bude daný algebrickým súčtom úbytkom napätí od jednotlivých slučkových prúdov.

Skutočné prúdy v sieti určíme podľa nasledovných pravidiel:

- ak je vo vetve iba **jeden slučkový prúd**, rovná sa prúdu vo vetve a má aj rovnaký smer,
- ak sú vo vetve **slučkové prúdy s rovnakým smerom**, prúd vetvy tečie v rovnakom smere a bude daný **súčtom** oboch vypočítaných slučkových prúdov,
- ak **smer dvoch slučkových prúdov vo vetve je opačný**, výsledný prúd je daný ich **rozdielom** a bude tečť v smere väčšieho prúdu.

(Topológia elektrických obvodov: <http://www.urel.feec.vutbr.cz/MTEO/mteo/regularni%20prvky.pdf>)

Pre dvojslučkový obvod dostávame nasledovné rovnice:

$$\begin{aligned} [R_1 + Ls] I_1(s) - Ls I_2(s) &= U(s) \\ -Ls I_1(s) + \left[R_2 + Ls + \frac{1}{Cs} \right] I_2(s) &= 0 \end{aligned}$$

V týchto dvoch rovniciach sú neznámymi prúdy $I_1(s)$ a $I_2(s)$.

Vyriešime ich niektorou z metód riešenia lineárnych rovníc: (1) **pomocou Cramerovho pravidla**, alebo (2) **dosadením z jednej rovnice do druhej**, alebo (3) pomocou **inverznej matice**.

Napr. prúd $I_2(s)$ vyriešený pomocou Cramerovho pravidla je:

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} (R_1 + Ls) & U(s) \\ -Ls & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{Ls}{\Delta} U(s)$$

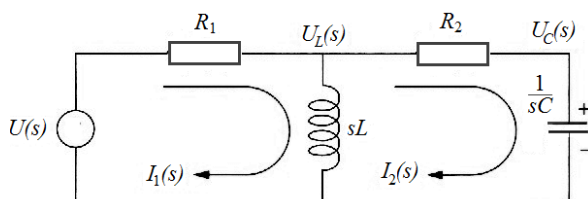
kde Δ je determinant sústavy.

Ak výstupom je napätie na kondenzátore, potom prenos vzhľadom na vstupné napätie je:

$$F(s) = \frac{U_C(s)}{U(s)} = \frac{1}{Cs} \frac{I_2(s)}{U(s)}$$

Pre riešenie viacslučkových obvodov s výhodou využijeme **symbolický počet v MATLABe**.

Rýchly spôsob maticového zápisu rovníc obvodu:



Lineárnu sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} [R_1 + Ls] I_1(s) - Ls I_2(s) &= U(s) \\ -Ls I_1(s) + \left[R_2 + Ls + \frac{1}{Cs} \right] I_2(s) &= 0 \end{aligned}$$

Ak sa analyticky pozrieme na rovnice, môžeme ich slovne popísať nasledovne:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{\text{slučka 1}} \text{impedancií} \right] I_1(s) - \left[\sum_{\text{vetva 1-2}} \text{spoločných impedancií} \right] I_2(s) &= \sum_{\text{slučka 1}} \text{napätových zdrojov} \\ - \left[\sum_{\text{vetva 1-2}} \text{spoločných impedancií} \right] I_1(s) + \left[\sum_{\text{slučka 2}} \text{impedancií} \right] I_2(s) &= \sum_{\text{slučka 2}} \text{napätových zdrojov} \end{aligned}$$

Rovnice prehľadne zapíšeme pomocou maticového tvaru:

$$\begin{bmatrix} R_1 + Ls & -Ls \\ -Ls & R_2 + Ls + \frac{1}{Cs} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

čo nám umožňuje rýchlo napísať rovnice obvodu a ťažisko riešenia prenosovej funkcie obvodu sa takto presúva do (symbolického) riešenia sústavy lineárnych rovníc. Samozrejme, tieto poznatky možno rozšíriť na viacslučkové obvody.

Všimnime si znamienko napät'ového zdroja – ak je napätie zdroja je orientované proti smeru šípky slučkového prúdu, potom v maticovej rovnici má kladné znamienko!!!

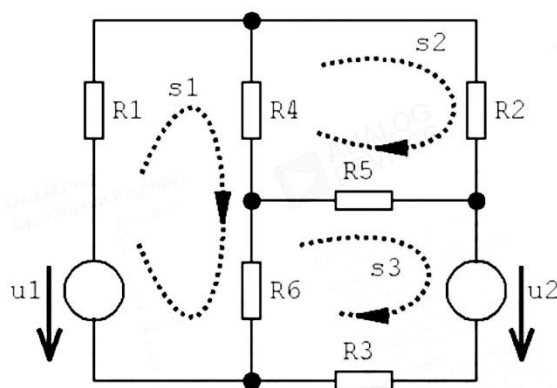
V prípade systému s viacerými slučkami ako 2, je toto pravidlo nasledovné (napr. pre trojslučkový obvod):

$$\left[\sum_{\text{slučka 1}} \text{imp.} \right] I_1(s) - \left[\sum_{\text{vetva 1-2}} \text{imp.} \right] I_2(s) - \left[\sum_{\text{vetva 1-3}} \text{imp.} \right] I_3(s) = \sum_{\text{slučka 1}} \text{napät'ových zdrojov}$$

a podobnú zákonitosť možno odvodiť aj pre rozsiahlejšie obvody.

Uvedená metóda umožňuje automatizovať zostavovanie rovníc a rýchlo dospieť ku výsledku, samozrejme s využitím Symbolic toolboxu v MATLABe (príp. programu Maple).

Príklad 1 na maticový zápis trojslučkového obvodu a odporni:



Rovnice obvodu, zostavené pomocou slučkových prúdov, možno zapísať v maticovom tvare:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{u}$$

kde:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_4 + R_6 & -R_4 & -R_6 \\ -R_4 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ -R_6 & -R_5 & R_3 + R_5 + R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ i_{s3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ -u_2 \end{bmatrix}$$

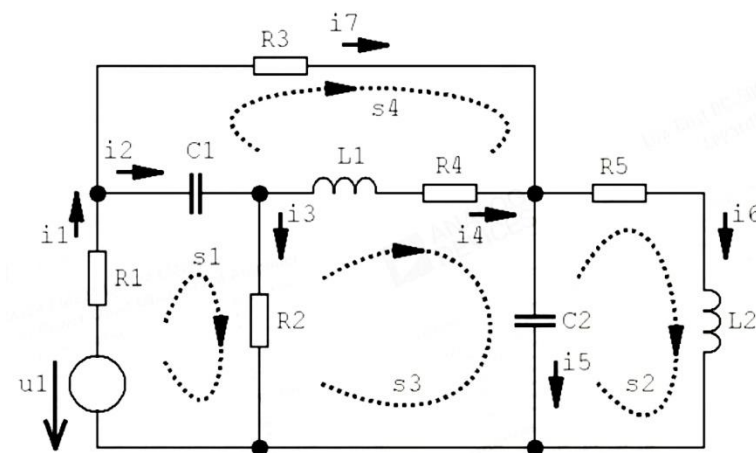
Touto metódou možno zistiť prúd v danej vetve obvodu aj v prípade, ak obvod je napájaný viacerými napät'ovými zdrojmi.

Vektor prúdov možno získať tiež výpočtom inverznej matice $\mathbf{R}^{-1}$, t.j.:

$$\mathbf{i} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}$$

V prípade symbolického zápisu impedancií obvodu: R , sL a $1/(sC)$ jedinou cestou, ako prúd v danej vetve možno efektívne vypočítať (pri väčšom počte slučiek ako 2), je použitie symbolického MATLABu.

Príklad 2 – zostaviť impedančnú maticu pre obvod impedanciami



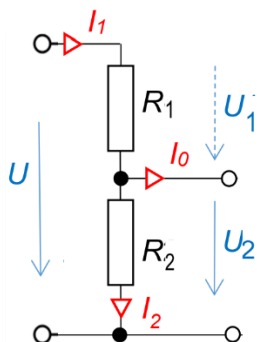
Prvky v matici sú symetrické okolo hlavnej diagonály, čo môžeme využiť pre kontrolu správnosti ich zápisu:

$$Z(s) = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + \frac{1}{sC_1} & 0 & -R_2 & -\frac{1}{sC_1} \\ 0 & R_5 + sL_2 + \frac{1}{sC_2} & -\frac{1}{sC_2} & 0 \\ -R_2 & -\frac{1}{sC_2} & \frac{1}{sC_2} & -R_4 - sL_1 \\ -\frac{1}{sC_1} & 0 & -R_4 - sL_1 & R_3 + R_4 + sL_1 + \frac{1}{sC_1} \end{bmatrix}$$

4 Iné metódy zostavenia prenosovej funkcie obvodu

4.1 Deliċ napätia

Nezat'ažený delič: ($I_0 = 0$)



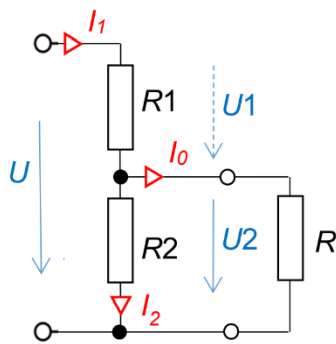
$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}$$

$$\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Analogický je postup v prípade, ak miesto odporov sú impedancie

$$F(s) = \frac{U_2(s)}{U(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

Zat'azený delič ($I_o \neq 0$) – ku výstupu je paralelne pripojená záťažná impedancia-



Miesto $Z_2(s)$ je paralelná kombinácia:

$$Z_2(s) \parallel Z(s) = \frac{Z_2(s) \cdot Z(s)}{Z_2(s) + Z(s)}$$

čo vplýva na zmenu prenosových vlastností obvodu a tým pádom aj na jeho dynamiku:

$$F(s) = \frac{U_2(s)}{U(s)} = \frac{Z_2(s) \parallel Z(s)}{Z_1(s) + Z_2(s) \parallel Z(s)}$$

Kalkulačka pre výpočet prvkov deliča:

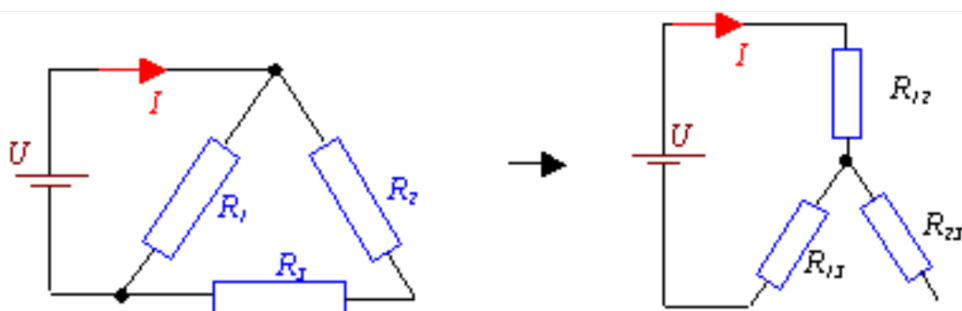
AC Voltage Divider, <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/vdivac.html>

Domáca úloha: vypočítať, ako sa zmenia pomery v obvode RC ak paralelne ku kondenzátoru je pripojený záťažný odpor R_z .

4.2 Prevod hviezda – trojuholník a naopak

V niektorých prípadoch sa v zložitejších elektrických obvodoch môže vyskytnúť zapojenie do trojuholníka, čím by sme nemohli ďalej zjednodušovať obvod. Zapojenie impedancií do trojuholníka však možno nahradiť zapojením vhodných impedancií do hviezdy a naopak, ináč povedané: impedancie zapojené vo hviezde (Y) možno nahradiť ekvivalentným zapojením do trojuholníka (D) a naopak,

Princíp: Zapojenia do hviezdy a trojuholníka sú ekvivalentné vtedy, ak zdroj napätia pripojený k tým istým svorkám dodáva ten istý prúd.



Pre trojuholník máme podľa Ohmovho zákona

$$I = \frac{U}{R_1 \parallel (R_2 + R_3)} = \frac{U}{\frac{R_1 R_2 + R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}},$$

kde znak $\parallel$ označuje paralelné zapojenie rezistorov.

Prúd v prípade zapojenia do hviezdy:

$$I = \frac{U}{R_{12} + R_{13}}.$$

Prúdy musia byť rovnaké. Z rovnosti pravých strán oboch rovníc vyplýva:

$$R_{12} + R_{13} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Takže prevodové vzorce trojuholník $\rightarrow$ hviezda sú:

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Opačný prevod hviezda $\rightarrow$ trojuholník dostaneme z rovníc, ak z nich vyjadríme R_1, R_2, R_3 .

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{23} + R_{23} R_{13} + R_{12} R_{13}}{R_{12}}$$

$$R_2 = \frac{R_{12} R_{23} + R_{23} R_{13} + R_{12} R_{13}}{R_{23}}$$

$$R_3 = \frac{R_{12} R_{23} + R_{23} R_{13} + R_{12} R_{13}}{R_{13}}$$

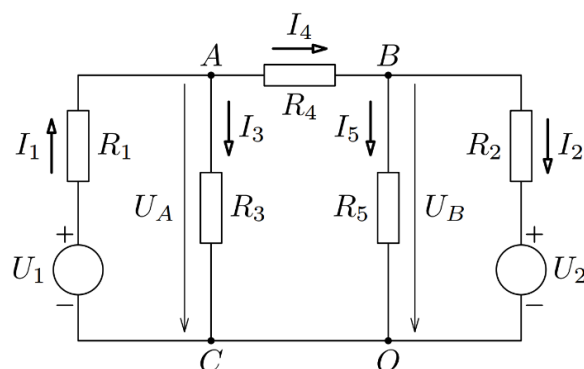
5 Metóda uzlových napätí a jej aplikácia pre výpočet prenosovej funkcie obvodu

Táto metóda je založená na použití prvého Kirchhoffovho zákona. Je výhodné ju použiť najmä v obvodoch s paralelne radenými členmi.

Postup:

- 1) V obvode zvolíme jeden uzol ako vzťažný – spravidla volíme ten, v ktorom je spojených najviac prvkov.
- 2) Ostatné uzly očísľujeme a označíme napätie každého z uzlov vzhľadom na referenčný uzol.
- 3) Pre tieto očíslované uzly zostavíme rovnice podľa 1. KZ. Získame toľko rovníc, koľko bude očíslovaných uzlov.
- 4) Riešením tejto sústavy rovníc určíme napätie medzi označenými uzlami a referenčným uzlom.

Príklad: Vyriešiť obvod pomocou metódy uzlových napätí.



Za vzťažný uzel O zvolíme uzel spoločný rezistorom R_3 a R_5 a označíme napätia U_A , U_B smerujúce k referenčnému uzlu. Pre prúdy vtekajúce do uzla použijeme kladné znamienko, vytekajúce z uzla záporné.

Pre uzel A platí: $I_1 - I_3 - I_4 = 0$

Pre uzel B platí: $I_4 - I_2 - I_5 = 0$

Po dosadení uzlových napätí dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{U_1 - U_A}{R_1} - \frac{U_A - U_B}{R_4} - \frac{U_A}{R_3} &= 0, \\ \frac{U_A - U_B}{R_4} - \frac{U_B - U_2}{R_2} - \frac{U_B}{R_5} &= 0. \end{aligned}$$

Rovnice vieme prepísať nasledovne:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) U_A - \frac{1}{R_4} U_B &= \frac{1}{R_1} U_1 \\ -\frac{1}{R_4} U_A + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) U_B &= \frac{1}{R_2} U_2 \end{aligned}$$

Z týchto rovníc zostavíme maticový zápis:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Pohľadom na maticu vodivosti (keďže $G = 1/R$) ľahko zistíme pravidlo:

- Na hlavnej diagonále je súčet vodivostí, ktoré sú pripojené k danému uzlu.
- Mimo hlavnej diagonály sa nachádzajú symetricky rozmiestnené záporné hodnoty vodivostí, ktoré sú medzi jednotlivými uzlami.

Uvedené pravidlo platí nielen pre rezistory ale platí aj pre impedancie (resp. čo platí pre vodivosti, platí pre admitancie (t.j. $Y = 1/Z$)).

Z maticovej rovnice vypočítame hodnoty napätí U_A a U_B . Ostatné potrebné veličiny pri výpočte prenosu dostaneme aplikáciou Ohmovho zákona.