

Pr. 4 MODELOVANIE A SIMULÁCIA R-L-C OBVODOV

V tejto kapitole sa budeme zaoberať problematikou zostavenie prenosových funkcií elektrických analytickým spôsobom, pomocou matematického modelovania, zostavením diferenciálnych rovníc aplikáciou niektorých fyzikálnych zákonov, známych z elektrických obvodov (Ohmov zákon, I. a II. Kirchhoffov zákon) a zostavením simulačného modelu.

Využijeme pritom charakteristické zákonitosti medzi elektrickým prúdom a napätím v elektrických obvodoch.

2.1 Operátorové impedancie súčiastok R, L, C

Uvedieme tu princíp odvodu prenosovej funkcie a modelovania elektrického obvodu pozostávajúcom z pasívnych prvkov R , L , C a zo zdrojov napätia $u(t)$, resp. prúdu $i(t)$.

Indukčnosť a kondenzátor predstavujú zásobníky energie (elektromagnetickej, resp. elektrostatickej), zatiaľ čo na odpore sa energia stráca.

V obvode zadefinujeme vstupnú veličinu, výstupnú veličinu a nájdeme medzi nimi hľadaný prenos aplikujúc prvý a druhý Kirchhoffov zákon [2]. Pri zostavovaní rovníc využívame zákonitosti medzi napätím a prúdom na jednotlivých prvkoch R , L , C .

Indukčnosť a kondenzátor predstavujú zásobníky energie (elektromagnetickej, resp. elektrostatickej), zatiaľ čo na odpore sa energia stráca.

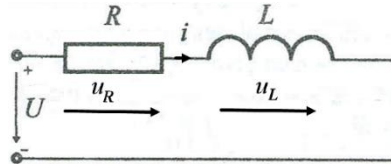
Vzťahy medzi napätiami a prúdmi pasívnych R , L , C prvkov obvodu

Prvok obvodu	Napätie-prúd	Prúd-napätie	Impedancia v LT $Z(s) = \frac{U(s)}{I(s)}$
Kondenzátor (kapacita)	$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$ $U_C(s) = \frac{1}{sC} I(s)$	$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$ $I(s) = C s U_C(s)$	$Z_C(s) = \frac{1}{Cs}$
Rezistor (odpor)	$u_R(t) = R i(t)$ $U_R(s) = R I(s)$	$i(t) = \frac{1}{R} u_R(t)$ $I(s) = \frac{1}{R} U_R(s)$	$Z_R(s) = R$
Cievka (indukčnosť)	$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ $U_L(s) = L s I(s)$	$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\tau) d\tau$ $I(s) = \frac{1}{sL} U_L(s)$	$Z_L(s) = Ls$

2.2 Elektrické RC, RL obvody ako sústava I. rádu

2.2.1 Sériový RL obvod

Schéma obvodu¹:



Matematický model sériového RL obvodu:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\tau) d\tau = \frac{1}{L} \int_0^t (U - R i) d\tau$$

Prenosové funkcie dostaneme z prepisu tejto rovnice do Laplaceovej transformácie:

$$I(s) = \frac{1}{sL} [U(s) - R \cdot I(s)]$$

Odkiaľ:

$$(R + sL)I(s) = U(s)$$

Prúd tečúci obvodom je:

$$I(s) = \frac{1/R}{1 + sT} U(s)$$

a prenos prúdu vzhľadom na vstupné napätie je :

$$F_I(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{1}{R + sL} = \frac{1/R}{1 + s \frac{L}{R}} = \frac{1/R}{1 + sT}$$

Prenosovú funkciu prúdu sme upravili tak, aby koeficient pri absolútnom člene bol rovný jednotke: $a_0 = 1$ a potom $T = L/R$ predstavuje časovú konštantu LR obvodu.

Z L-obrazu prúdu $I(s) = \frac{1/R}{1+sT} U(s)$ môžeme vypočítať počiatočnú a konečnú hodnotu prúdu v obvode pri jednotkovom skoku vstupného napätia $u(t) = 1(t)$, ktorého L-obraz je $U(s) = 1/s$:

$$i(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s I(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1/R}{1 + sT} = 0$$

$$i(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s I(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1/R}{1 + sT} = \frac{1}{R}$$

Ostatné prenosy v obvode sú:

$$F_R(s) = \frac{U_R(s)}{U(s)} = \frac{R I(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + sT}$$

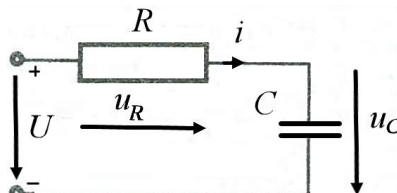
$$F_L(s) = \frac{U_L(s)}{U(s)} = \frac{sL I(s)}{U(s)} = \frac{sL \cdot 1/R}{1 + sT} = \frac{sT}{1 + sT}$$

¹ LR Circuit, <https://cookierobotics.com/009/>

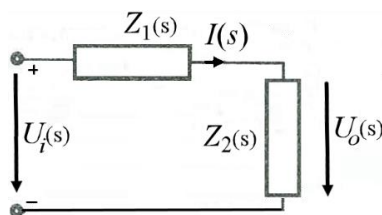
Takto v jednom elektrickom RL obvode dostávame rôzne prenosové funkcie – vzhľadom na napätie na odpore ide o proporcionálny prenos $F_R(s)$ a vzhľadom na napätie na indukčnosti oide o derivačný prenos $F_L(s)$.

2.2.1 Sériový RC obvod

Schéma obvodu je nasledovná:



Vyriešme tento prenos ako delič napätia v obvode s dvoma impedanciami v operátorovom tvare $Z_1(s)$ a $Z_2(s)$, v ktorom index i pri $U_i(s)$ znamená input (vstup); podobne index o má význam output (výstup). Takto môžeme postupovať v prípade, ak v obvode tieto impedancie vieme jednoznačne a rýchlo vypočítať.



Prúd v obvode je

$$I(s) = \frac{U_i(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

Výstupné napätie je

$$U_o(s) = Z_2(s) I(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} U_i(s)$$

Odkiaľ dostávame prenos medzi výstupným a vstupným napätím:

$$F(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

V prípade RC obvodu po dosadení dostávame:

$$F(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sCR} = \frac{1}{1 + sT}$$

kde $T = RC$ je časová konštanta obvodu.

Táto metóda môže slúžiť oba na rýchlu skúšku. Odporúča sa vychádzať z diferenciálnych rovníc obvodu.

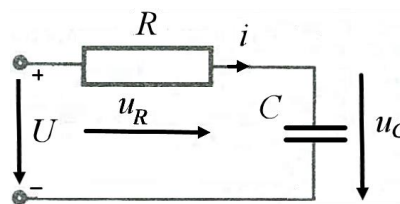
Zostavenie simulačného modelu

Ďalšou úlohou pri riešení obvodu je jeho simulácia. Zatiaľ čo simuláciou prenosovej funkcie dostávame vzťah iba medzi vstupnou a výstupnou veličinou, zo simulačného modelu vieme získať grafy časových priebehov všetkých vnútorných veličín elektrického obvodu (napätí a prúdov na jednotlivých prvkoch a pod.)

Pri zostavení matematického modelu pre simuláciu hľadáme také vzťahy, v ktorých vystupujú derivácie veličín (teda sa snažíme o zostavenie diferenciálnych rovníc). V podstate ide o zostavenie modelu z diferenciálnych rovníc, kde na ľavej strane diferenciálnej rovnice osamostatníme najvyššiu deriváciu veličiny a ďalej znižujeme jej rád aplikáciou niektorej z metód riešenia diferenciálnych rovníc (metóda znižovania rádu derivácie, metóda postupného integrovania).

Pri aplikovaní II. Kirchhoffovho zákona na RC obvod dostávame:²

$$u(t) = u_R(t) + u_C(t) = R i(t) + u_C(t)$$



Hľadáme diferenciálnu rovnicu, popisujúcu systém, a preto využijeme vzťah medzi napätím a prúdom na kondenzátore:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad \text{odkiaľ} \quad i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

Z toho po dosadení za prúd dostávame rovnicu

$$u(t) = R C \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$$

Ide o diferenciálnu rovnicu I. rádu, kde vyjadríme najvyššiu deriváciu:

$$\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{RC} u(t) - \frac{1}{RC} u_C(t)$$

Po jej integrovaní dostávame pre napätie na kondenzátore $u_C(t)$.

$$u_C(t) = \frac{1}{RC} \int [u(t) - u_C(t)] dt$$

Po prevode do Laplacovej transformácie dostávame:

$$U_C(s) = \frac{1}{sRC} [U(s) - U_C(s)]$$

Napätie na odpore:

$$U_R(s) = U(s) - U_C(s)$$

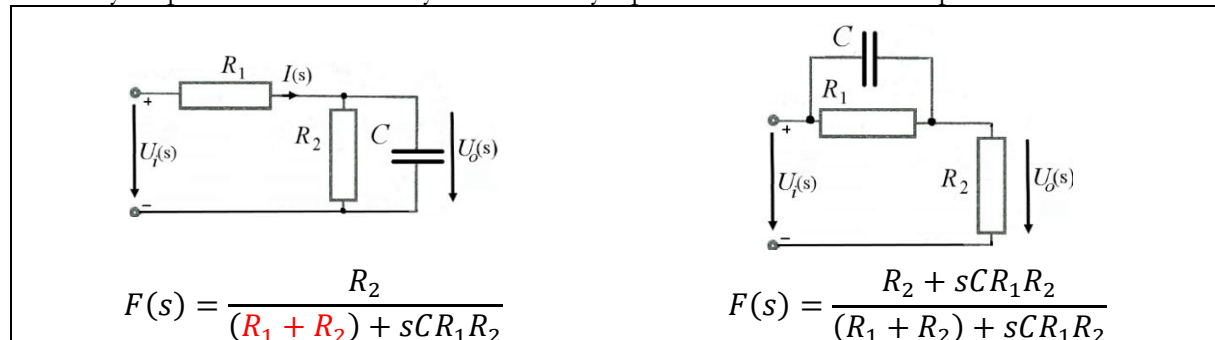
Prúd tečúci obvodom dostaneme zo vstupu integrátora:

$$I(s) = sC U_C(s)$$

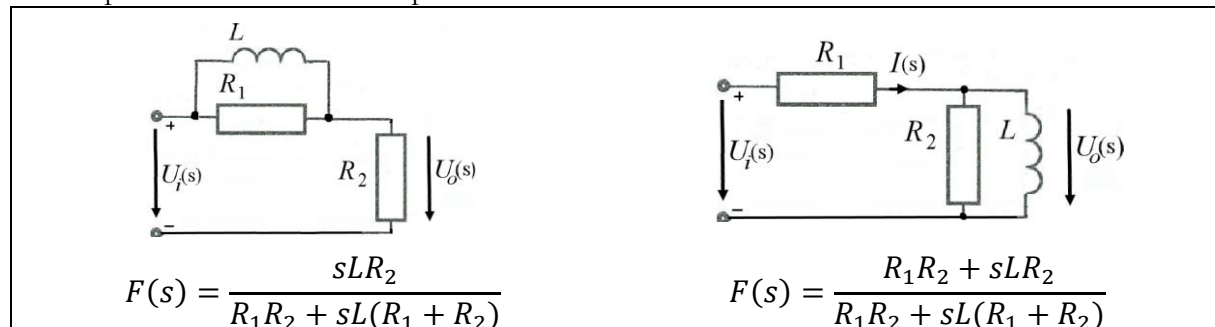
² RC Circuit, <https://sites.google.com/site/bece3fin17/home/rc-circuit?tmpl=%2Fsystem%2Fapp%2Ftemplates%2Fprint%2F&showPrintDialog=1>

2.2.2 Príklady na precvičenie

Podobným spôsobom môžeme vyriešiť obvody s paralelnou kombináciou prvkov R a C :



alebo s paralelnou kombináciou prvkov R a L :

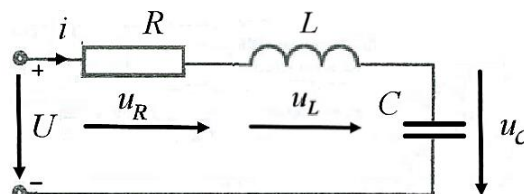


2.3 Prechodové deje v RCL obvode

2.3.1 Sériový RLC obvod

Prenos sériového RLC obvodu

Paralelný a sériový RLC obvod je základnou časťou každého elektronického oscilátora.



V obvode sú dva zásobníky energie – elektromagnetickej v cievke a elektrostatickej v kondenzátore. Ide teda o sústavu II. rádu. Pri analýze sériového RLC obvodu si všímame:

- či obvod je nekmitavý, alebo kmitavý,
- ak je kmitavý, aký je prekmit a frekvencia kmitania-

V obvode zadefinujeme vstupnú veličinu, výstupnú veličinu a nájdeme medzi nimi hľadaný prenos aplikujúc prvý a druhý Kirchhoffov zákon a Ohmov zákon. Pri zostavovaní rovníc využívame zákonitosti medzi napätím a prúdom na jednotlivých prvkoch R , L , C . Zápis základných rovníc obvodu – aplikujeme druhý Kirchhoffov zákon (KZ) pre napätie v slučke:

$$u(t) = u_L(t) + u_R(t) + u_C(t)$$

Dosadíme za napätia:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = u(t)$$

Je to diferenciálno-integračná rovnica, nedá sa riešiť jednoduchými metódami.

Vykonajme riešenie v Laplaceovej transformácii. Súčet napätí v slučke podľa II. KZ je:

$$U(s) = U_L(s) + U_R(s) + U_C(s)$$

Po dosadení a úprave:

$$L sI(s) + R I(s) + \frac{1}{sC} I(s) = U(s)$$

$$\left(\frac{s^2 LC + sRC + 1}{sC} \right) I(s) = U(s)$$

odkiaľ pre prenos medzi vstupným napätím a prúdom dostávame:

$$F_I(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{sC}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Odtiaľ vypočítame prúd $I(s) = F_I(s) \cdot U(s)$ a s použitím vzorcov:

$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I(s) \qquad U_R(s) = R I(s) \qquad U_L(s) = L sI(s)$$

vypočítame príslušné napätia na **jednotlivých** prvkoch obvodu. Tak dostaneme prenosy:

$$F_C(s) = \frac{U_C(s)}{U(s)} = \frac{1}{sC} \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$F_R(s) = \frac{U_R(s)}{U(s)} = \frac{sCR}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$F_L(s) = \frac{U_L(s)}{U(s)} = \frac{s^2 LC}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Podľa toho, na ktorom prvku volíme výstup, dostávame pre jednotlivé prenosy:

- $F_C(s)$ predstavuje proporcionálnu sústavu 2. rádu
- $F_R(s)$ predstavuje derivačnú sústavu 2. rádu
- $F_L(s)$ predstavuje derivačnú sústavu 2. rádu s deriváciou 2. rádu

Pozn.: Najvhodnejšie je zapisovať prenos tak, aby absolútny člen v menovateli bol = 1, potom získaný prenos môžeme porovnať so štandardným tvarom prenosovej funkcie:

$$F(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2d}{\omega_0} s + 1}$$

Vo všetkých prípadoch j menovateľ prenosovej funkcie e rovnaký, čo platí všeobecne – pre uzavreté elektrické obvody platí, že prenosová funkcia v obvode vzhľadom na hociktorý prvok obvodu má rovnaký menovateľ, ale rôzny polynóm čitateľa. Podobné tvrdenie platí aj v uzavretej blokovej schéme.

Prechodové deje v obvode sú dané polohou pólov menovateľa. Keďže v našom prípade $a_0 = 1$, porovnaním koeficientov polynómu menovateľa so štandardným prenosom

$$s^2LC + sRC + 1 = \frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2d}{\omega_0} s + 1$$

dostávame:

$$LC = \frac{1}{\omega_0^2}, \quad \text{t.j.} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad RC = \frac{2d}{\omega_0}, \quad \text{odkiaľ} \quad d = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Podľa hodnoty d môžeme priamo určiť základné vlastnosti obvodu a posúdiť, či ide o kmitavý alebo nekmitavý obvod.

Póly prenosovej funkcie môžeme priamo v riešení kvadratickej rovnice menovateľa:

$$s^2LC + sRC + 1 = 0$$

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R}{2L} - \frac{1}{LC}}$$

Podľa hodnôt parametrov a na základe vzťahu pre $d = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$ a Tab. 1.1, môžeme zapísať modifikovanú tabuľku³ 1.2.

Tab. 1.2 Vlastnosti sústavy II. rádu v závislosti od veľkosti tlmenia d

Tlmenie	Vzťah	Podmienka	Póly
$d > 1$	$\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$	$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$	Dva rôzne reálne póly – nekmitavá sústava
$d = 1$	$\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$	$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$	Dvojnásobný pól $p_{1,2} = -\frac{R}{2L}$ – aperiodický priebeh
$0 < d < 1$	$\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$	$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$	Dvojica komplexne združených pólov – kmitavá sústava

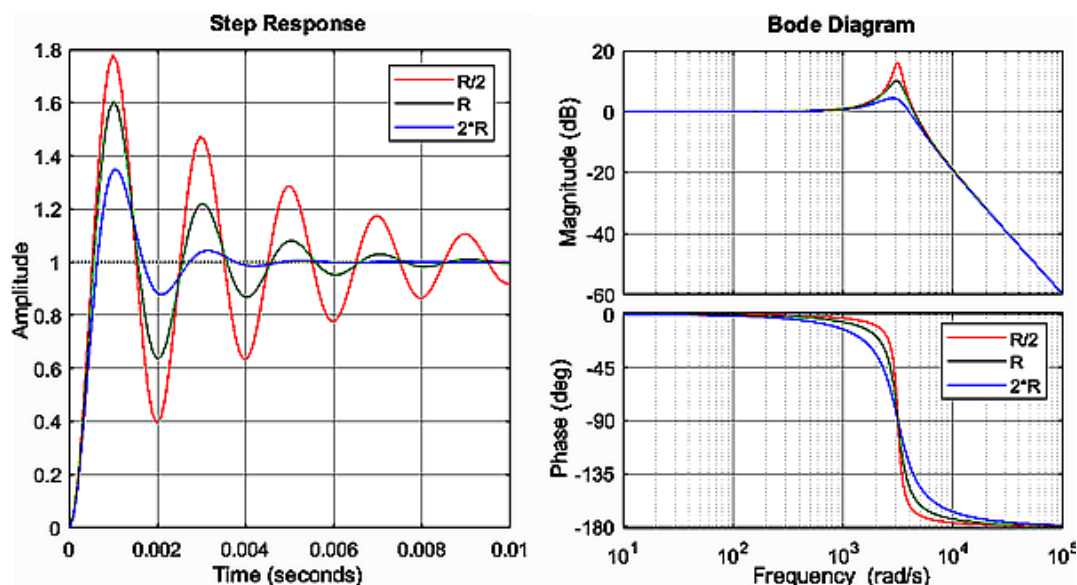
Vlastnosti obvodu teda závisia od hodnôt parametrov jednotlivých prvkov.

Napr. pre prenos napätia na kondenzátore:

$$F_C(s) = \frac{1}{s^2LC + sRC + 1}$$

³ Step response of series RLC circuit - output taken across capacitor,
<http://www.ece.sunysb.edu/~oe/Leon/ESE271S13/Lecture23.pdf>

v okolí rezonančného prevýšenia priebeh amplitúdovej a fázovej logaritmickéj charakteristiky závisí od hodnoty odporu R : čím je hodnota odporu menšia, tým je v ňom menej strát energie a tým trvalejšie sú kmity).



Simulačný model RLC obvodu

Simuláciou prenosovej funkcie dostávame informáciu iba medzi vstupom a výstupom obvodu. Ak chceme zistiť aj chovanie sa iných veličín v obvode (prúdy vo vetvách obvodu a napätia na jednotlivých prvkoch obvodu), používame simulačný model. Tento vieme zostaviť v časovej oblasti, alebo v Laplaceovej transformácii, pričom oba spôsoby sú, samozrejme, ekvivalentné.

Postup pri zostavovaní simulačného modelu nie je jednoznačnou úlohou. Závisí od toho, ako zvolíme východzie rovnice. V našom prípade tu aplikujeme zákonitosti pre elektrické obvody, ako sú Kirchhoffove zákony a Ohmov zákon. Nakoniec však ale aj po aplikácii pravidiel blokovej algebry dospejeme ku jednoznačnému výsledku, rovnakému simulačnému modelu.

Na nasledujúcom príklade si ukážeme si u dva spôsoby zostavenia simulačného modelu pre RLC sériový obvod.

Podľa II. Kirchhoffovho zákona pre napätia v slučke obvodu platí:

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u(t)$$

Po dosadení za napätia dostávame derivačno-integrálnu rovnicu:

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = u(t)$$

ktorú nevieme riešiť a preto v rovnice hľadáme náhradu integrálu. Tento nahradíme napätím na kondenzátore:

$$\frac{1}{C} \int i(t) dt = u_C(t)$$

odkiaľ deriváciou dostaneme:

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

čím dostaneme:

$$LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u(t)$$

Vyjadríme najvyššiu deriváciu a rovnicu budeme postupne integrovať:

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} = \frac{1}{LC} \left[u(t) - RC \frac{du_C(t)}{dt} - u_C(t) \right] \quad / \int dt$$

$$\frac{du_C(t)}{dt} = \int \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} dt \quad / \int dt$$

$$u_C(t) = \int \frac{du_C(t)}{dt} dt$$

Z týchto troch rovníc zostavíme schému pre simuláciu. Vstupom do schémy je napätie $u(t)$ (môže byť jednosmerné i striedavé), výstupom napätie $u_C(t)$ na kondenzátore.

Ostatné veličiny elektrického obvodu získame aplikáciou Ohmovho a Krichoffových zákonov, príp. zo vzťahov popisujúcich prvky L a C :

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

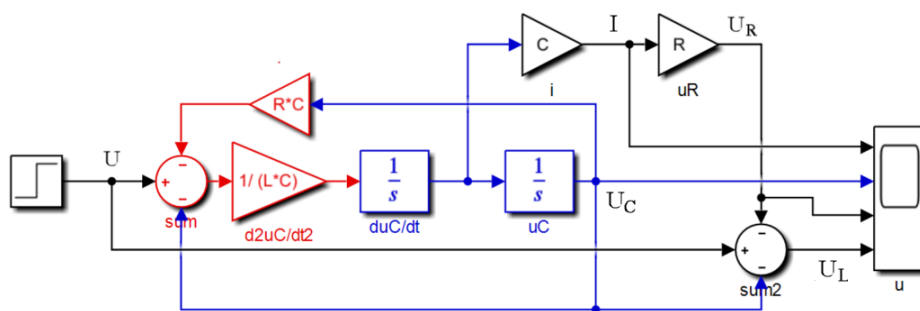
kde derivácia $\frac{du_C(t)}{dt}$ je známa v blokovej schéme.

Ak poznáme prúd, vieme vypočítať úbytok napätia na odpore: $u_R(t) = R i(t)$.

Získanie napätia na indukčnosti by si vyžadovalo deriváciu prúdu $u_L(t) = L \frac{di}{dt}$. Pri tvorbe blokových schém sa podľa možnosti snažíme vyhnúť použitiu derivačného bloku a tak to obídeme pomocou II. Kirchhoffovho zákona pre napätia v slučke:

$$u_L(t) = u(t) - u_R(t) - u_C(t)$$

Získanú simulačnú schému môžeme napájať ako signálom jednosmerného napätia (napr. odozva na jednotkový skok napätia – prechodová charakteristika), tak aj striedavého napätia (s konštantou frekvenciou, premenlivou frekvenciou, obdĺžnikovým napätím a pod. a tak overiť napr. fázový posun medzi vstupným a výstupným napätím, frekvenčné a filtračné vlastnosti obvodu).



Iný postup pri zostavení simulačného modelu

Využijeme súvis medzi napätím a prúdom na indukčnosti a II. KZ v obvode, čo predstavuje DR I. rádu, ktorej riešením dostaneme prúd $i(t)$.

Napätie na kondenzátore dostaneme riešením

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = u(t) - u_R(t) - u_C(t)$$

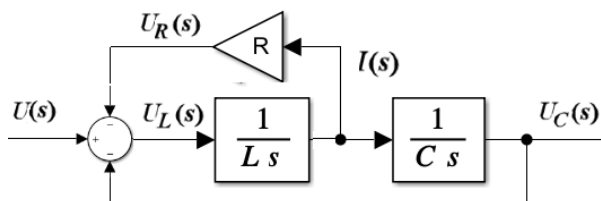
$$\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t)$$

Napätie na odpore určíme z Ohmovo zákona:

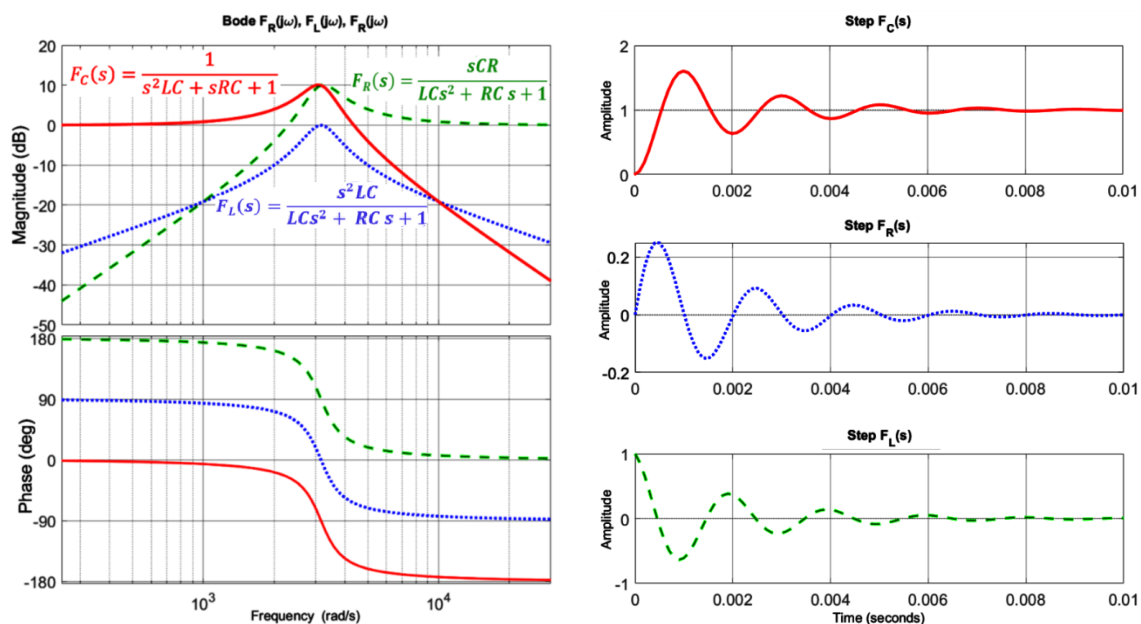
$$u_R(t) = R i(t)$$

Tým máme známe všetky elektrické veličiny v obvode.

Schéma simulačného modelu RLC sériového obvodu je nasledovná:

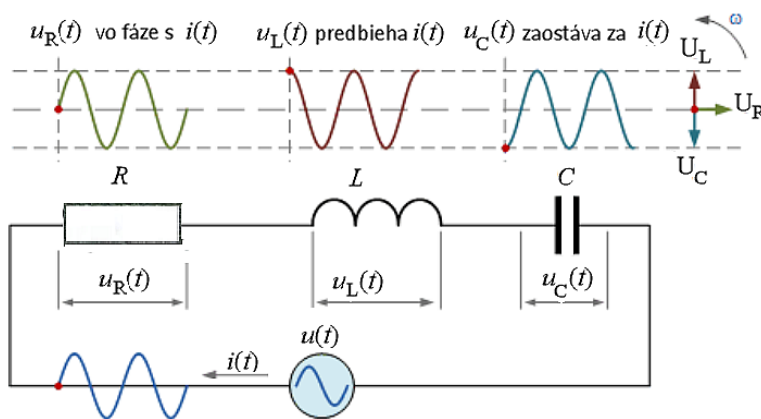


Uved'me niektoré výsledky simulácie v Simulinku – Bodeho LFCH a PrCh pre proporcionálnu sústavu 2. rádu $F_C(s)$, derivačnú sústavu 2. rádu (s deriváciou I. rádu) $F_R(s)$ a derivačnú sústavu 2. rádu s deriváciou 2. rádu $F_L(s)$.

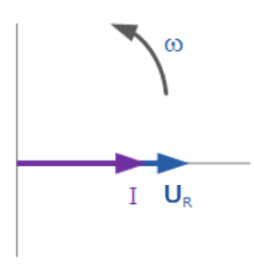
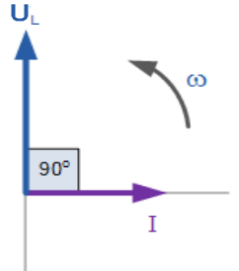
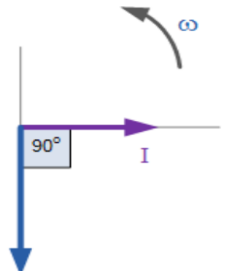


Napájanie RLC obvodu striedavým napätím

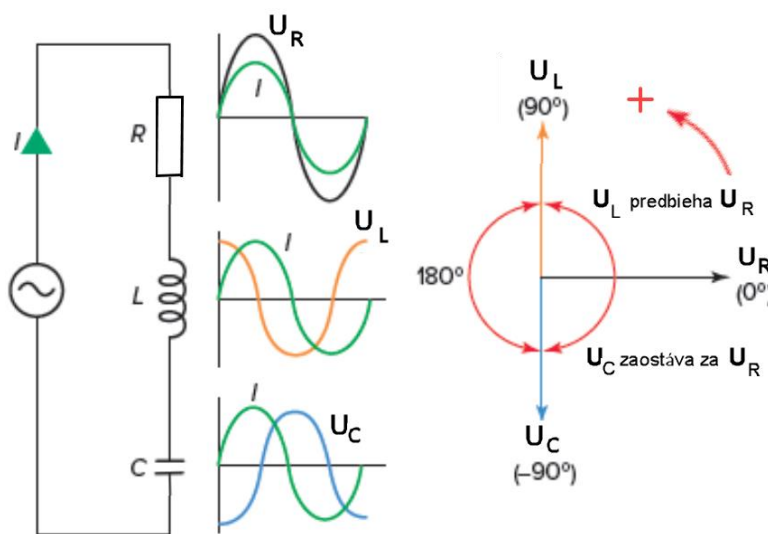
Po pripojení obvodu na harmonický priebeh vstupného napätia $u(t) = \sin \omega t$ na jednotlivých súčiastkach obvodu dochádza ku fázovému posunu medzi prúdom a napätiami, ktorý sa sčítava a dáva výsledný fázový posun medzi napájacím napätím a prúdom zdroja, resp. medzi vstupným a výstupným napätím.



Tab. 1.4 Fázový posun pri prietoku prúdu cez prvky R , L , C

Napätie na rezistore	Napätie na cievke	Napätie na kondenzátore
je vo fáze s prúdom	predbieha prúd o $+90^\circ$	zaostáva za prúdom o 90°
veľkosť nezávisí od frekvencie	veľkosť je priamo úmerná frekvencii, lebo $U_L = j\omega L I$	veľkosť je nepriamo úmerná frekvencii, $U_C = \frac{1}{j\omega C} I$
		

Výsledný fázový posun je daný vektorovým súčtom napätí na jednotlivých prvkoch a teda závisí od frekvencie napájacieho napätia. Táto závislosť amplitúdy a fázy od frekvencie je vyjadrená pomocou Bodeho logaritmických frekvenčných charakteristík (LFCH): amplitúdovej (ALFCH) a fázovej (FLFCH).



Animácie: ⁴

Po pripojení RLC obvodu na zdroj striedavého napätia, na odpore bude napätie vo fáze s prúdom, na indukčnosti predbieha prúd (a napätie na odpore) o $+90^\circ$ a na kondenzátore mešká (o -90°) za prúdom (a teda aj napätím na odpore). Veľkosť napätia na odpore, indukčnosti a kondenzátore pri danej frekvencii ω závisí od veľkosti odporu, indukčnej a kapacitnej reaktancie:

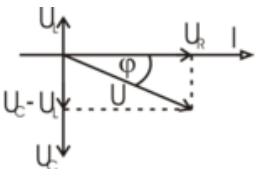
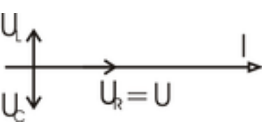
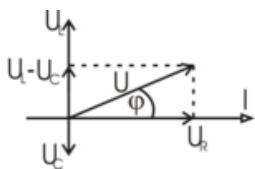
$$R, \quad X_L(j\omega) = j\omega L, \quad X_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C}$$

⁴ R-L-C Serial Circuit, https://javalab.org/en/rlc_serial_circuit_en/,

<http://www.phy.hk/wiki/j/Eng/RLC/RLC.js.htm>

iné animácie: https://javalab.org/en/category/electricity_en/ac_rlc_en/

V závislosti od frekvencie sa menia veľkosti napätí a tým pádom vzniká výsledný fázový posun medzi napájacím napätím a prúdom.

Frekvencia napájacieho napätia	nižšia, ako rezonančná: $\omega < \omega_0$	rovnaká, ako rezonančná: $\omega = \omega_0$	vyššia ako rezonančná: $\omega > \omega_0$
Amplitúda napätia	$ U_L < U_C $	$ U_L = U_C $	$ U_L > U_C $
Vektorový diagram			
Charakter obvodu	kapacitný, $\varphi < 0$	odporový, $\varphi = 0$	induktívny, $\varphi > 0$

Zmenou indukčnosti alebo kapacity môžeme teda meniť rezonančnú frekvenciu. Sériový rezonančný obvod má pri rezonančnej frekvencii najmenšiu impedanciu a najväčší prúd. V rezonančných sériových RLC obvodoch nás zaujíma tzv. činiteľ kvality, ktorý je definovaný

$$Q = \frac{2}{d} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R \cdot \omega_0 C}$$

Čím činiteľ kvality má vyššiu hodnotu, tým obvod je menej tlmený.

Z toho vyplýva, že čím väčšia je hodnota sériovej rezistencie, tým nižšia je hodnota Q .

Prenos RLC obvodu vzhľadom na výstupný odpor:

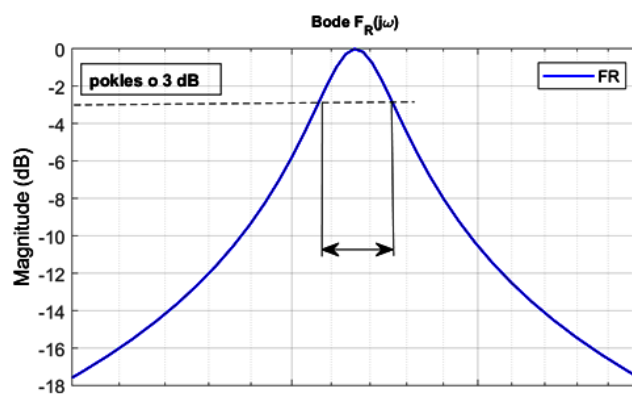
$$F_R(s) = \frac{U_R(s)}{U(s)} = \frac{sRC}{s^2LC + sRC + 1}$$

z hľadiska filtrovania signálu predstavuje tzv. pásmovú zadrž, ktorá prepúšťa určité pásmo frekvencií (podrobnejšie vysvetlenie bude neskôr).

Hraničná frekvencia je definovaná pri poklese na hodnotu 0,7 maximálnej hodnoty (presne $\sqrt{2}/2 = 0,707$). Tomu zodpovedá amplitúda v dB

$$A_{dB} = 20 \log 0,7 = 20 \log \frac{\sqrt{2}}{2} = -3 \text{ dB}$$

Šírka prenášaného frekvenčného pásma je vyznačená na amplitúdovej logaritmickej frekvenčnej charakteristike.



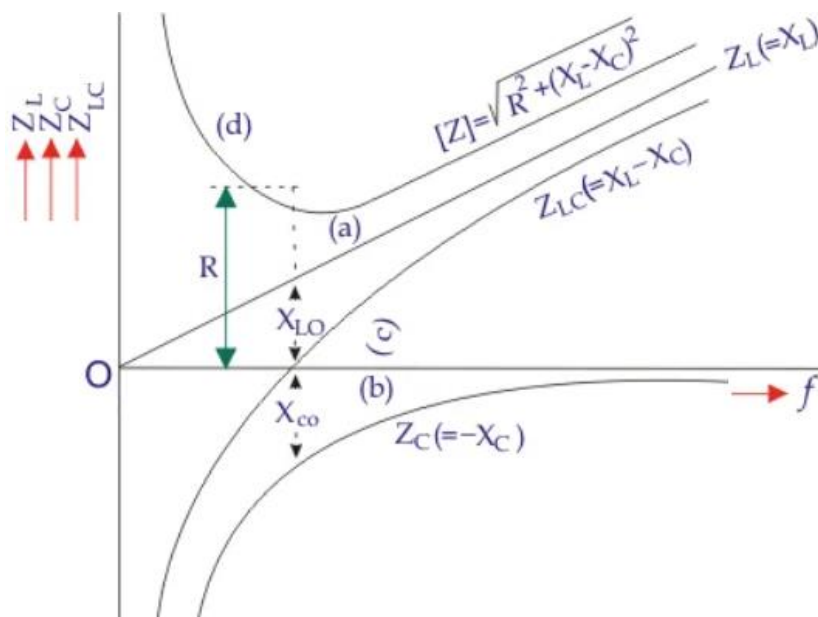
2.3.2 Sériový RLC rezonančný obvod⁵

Impedancia sériového obvodu RLS je:

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}$$

Pre $s = j\omega$ je impedancia obvodu:

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \frac{j}{j} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$



Z vektorového súčtu napätí v obvode vyplýva:

$$|U| = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Pri jednej, tzv. rezonančnej frekvencii sa v tomto obvode vyrovnáva kapacitná a induktívna reaktancia a rezonančný obvod sa pri tejto frekvencii chová ako činný odpor. Stav obvodu, ktorý nastane pri rezonančnej frekvencii, sa nazýva rezonancia.

Pri rezonančnej frekvencii ($\omega = \omega_0$) sa indukčná reaktancia (induktancia) rovná kapacitnej reaktancii (kapacitancii):

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

Odtiaľ dostávame vzťah pre rezonančnú frekvenciu:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Impedancia obvodu je pri rezonancii najmenšia preto prúd pretekajúci obvodom preto v tomto stave je maximálny. Prenos prúdu dostaneme z prenosu napätia na odpore,

⁵ Rezonančný obvod, https://sk.wikipedia.org/wiki/Rezonan%C4%8Dn%C3%BD_obvod

$$F_R(s) = \frac{U_R(s)}{U(s)} = \frac{sRC}{s^2LC + sRC + 1}$$

Keďže $I(s) = U_R(s)/R$:

$$F_I(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{F_R(s)}{R} = \frac{sC}{s^2LC + sRC + 1}$$

Pre $s = j\omega$

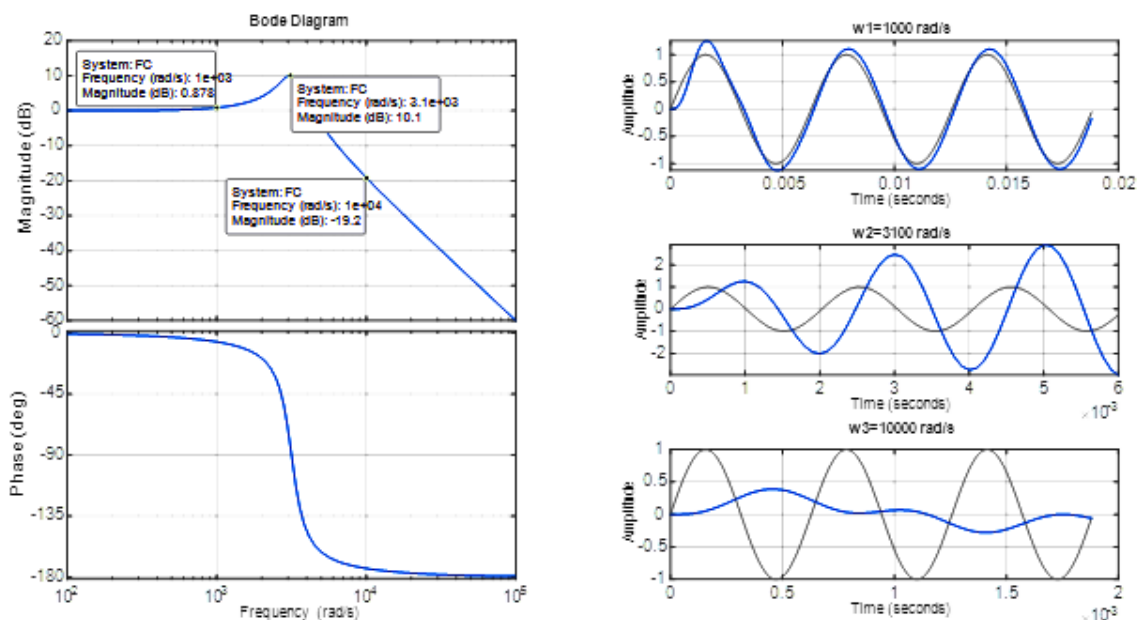
$$F_I(j\omega) = \frac{I(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{j\omega C}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega RC}$$

Pri rezonancii $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, čím po dosadení dostaneme

$$F_I(j\omega_0) = \frac{1}{R}$$

teda sériový obvod má pri rezonancii najnižšiu hodnotu impedancie rovnú hodnote odporu R (prúd v sériovom rezonančnom obvode pri rezonancii je obmedzený iba veľkosťou odporu R). Preto sa sériový rezonančný obvod využíva tam, kde pri rezonancii potrebujeme dosiahnuť maximálny prúd. Ak amplitúda napätia U a prvky R, L, C budú nemenné, amplitúda prúdu I a fázový posun φ budú závislé len od kruhovej frekvencie ω vonkajšieho zdroja napätia, o čom (t.j. o amplitúde a fáze) informáciu dostávame z logaritmických frekvenčných charakteristík.

Fázový posun medzi vstupným a výstupným napätím pri harmonickom napájaní závisí od frekvencie napájacieho napätia. Na nasledovnom obrázku sú časové znázornené priebehy v troch rôznych bodoch logaritmickéj frekvenčnej charakteristiky pre prenos napätia na kondenzátore (proporcionálna kmitavá sústava).



Fázový posun medzi vstupným a výstupným napätím pri harmonickom napájaní rôznou frekvenciou

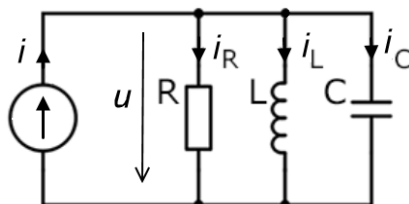
Voľbe bodov v LFCh vykonáme tak, že volíme charakteristické hodnoty, napr.:

- pri nízkych frekvenciách: zesilnenie $A \sim 0$ dB, fáza $\varphi \sim 0^\circ$,
- pri rezonančnom prevýšení: A dosahuje maximum; $\varphi = -90^\circ$,
- na klesajúcej časti charakteristiky: $A = -20$ dB $\sim 0,1$; $\varphi \rightarrow -180^\circ$.

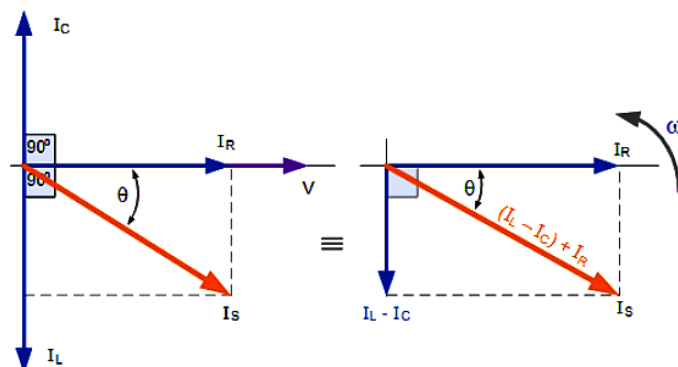
2.3.3 Paralelný RLC obvod

Paralelný RLC obvod je presným opakom sériového obvodu. Vzhľadom na to, že je duálnym obvodom ku sériovému RLC obvodu, platia všetky z predchádzajúcich konceptov a postupov pri odvodení rovníc.

Analýza paralelných RLC obvodov je analogická analýze sériových RLC obvodov. Miesto toho, aby pre komponenty obvodu bol spoločný prúd, teraz pre všetky impedancie je spoločné napätie, takže musíme nájsť jednotlivé vetvové prúdy tečúce každým prvkom. Paralelný RLC obvod je napájaný zdrojom prúdu.



Celkový prúd odoberaný zo zdroja nebude jednoduchým (skalárnym) matematickým súčtom troch jednotlivých vetviacich prúdov, ale ich vektorovým súčtom pozostávajúcim z troch častí: prúd pretekajúci rezistorom i_R , prúd induktorom i_L a prúd kondenzátorom i_C :



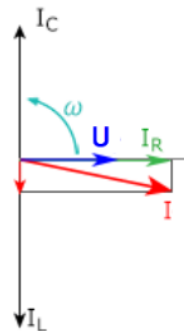
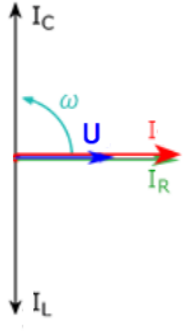
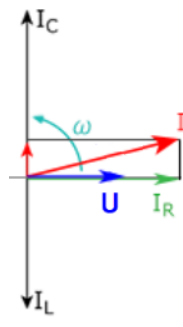
Rovnako, ako sériový obvod RLC, aj tento obvod môžeme vyriešiť pomocou fázorovej alebo vektorovej metódy, ale teraz bude mať vo vektorovom diagrame ako referenciu napätie s tromi prúdovými vektormi zakreslenými vzhľadom na napätie (na reálnej osi). Amplitúda prúdov tečúcich indukčnosťou a kondenzátorom závisí od frekvencie striedavého prúdu, čo nám vyplýva aj z nasledovnej tabuľky (na ďalšej strane).

Z prúdového trojuholníka môžeme pomocou Pytagorovej vety určiť celkový prúd vtekajúci do obvodu:

$$I^2 = I_R^2 + (I_L - I_C)^2$$

odkiaľ veľkosť prúdu po dosadení za jednotlivé prúdy a úprave dostaneme: X

$$I = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2} = \frac{U}{Z}$$

Frekvencia napájacieho napätia	nižšia, ako rezonančná $\omega < \omega_0$	rovnaká, ako rezonančná $\omega = \omega_0$	vyššia ako rezonančná $\omega > \omega_0$
Impedancia	$ X_L < X_C $	$ X_L = X_C $	$ X_L > X_C $
Amplitúda prúdu	$ I_L > I_C $	$ I_L = I_C $	$ I_L < I_C $
Vektorový diagram			
Charakter obvodu	induktívny, $\varphi > 0$	odporový, $\varphi = 0$	kapacitný, $\varphi < 0$

Simulačný model paralelného RLC obvodu

Podľa I. Kirchhoffovho zákona prúd v obvode je daný súčtom prúdov jednotlivých vetiev:

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t)$$

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} + \frac{1}{L} \int u(t) dt + C \frac{du(t)}{dt}$$

čo opäť predstavuje integrálno–diferenciálnu rovnicu, ktorú analyticky nevieme vyriešiť.

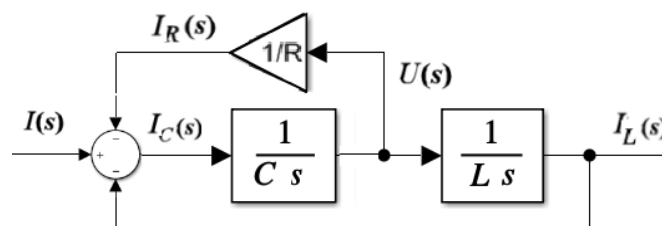
Preto, podobne ako pri sériovom RLC obvode, miesto integrálu $\frac{1}{L} \int u(t) dt$ napíšeme iba prúd $i_L(t)$, čím dostaneme diferenciálnu rovnicu I. rádu

$$C \frac{du(t)}{dt} = i(t) - i_L(t) - i_R(t)$$

Na výstupe integrátora dostaneme napätie $u(t)$ na prvkoch obvodu. Z neho vieme určiť:

- prúd tečúci indukčnosťou: $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$
- a prúd tečúci odporom $i_R(t) = \frac{u(t)}{R}$

a tým máme určený matematický model paralelného RLC obvodu. Jeho simulačný model je:



Prenosové funkcie dostaneme ľahko riešením v Laplaceovej transformácii:

$$I(s) = I_R(s) + I_L(s) + I_C(s) = U \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC \right)$$

Odkiaľ po úprave:

$$F_U(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = \frac{s \frac{L}{R}}{LCs^2 + s \frac{L}{R} + 1}$$

Prenosová funkcia medzi prúdom tečúcim cez odpor a vstupným prúdom:

$$F_R(s) = \frac{I_R(s)}{I(s)} = \frac{sL}{LCs^2 + sL/R + 1}$$

Prenos vzhľadom k prúdu kondenzátorom:

$$F_C(s) = \frac{I_C(s)}{I(s)} = \frac{s^2 LC}{LCs^2 + sL/R + 1}$$

Prenos prúdu indukčnosťou:

$$F_L(s) = \frac{I_L(s)}{I(s)} = \frac{1}{LCs^2 + sL/R + 1}$$

2.3.4 Paralelný rezonančný obvod

Admitancia obvodu je:

$$Y(s) = \frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC$$

pre $s = j\omega$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Pri rezonancii je imaginárna časť rovná nule, odkiaľ rezonančná frekvencia je:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Impedanciu obvodu dostaneme z prevrátenej hodnoty admitancie:

$$Z(j\omega) = \frac{1}{Y(j\omega)} = \frac{j\omega LC}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega \frac{L}{R}}$$

Pri rezonancii je impedancia (odpor) obvodu najväčšia: $Z(j\omega_0) = R$ a preto pri rezonancii tečie paralelným RLC obvodom najmenší prúd.

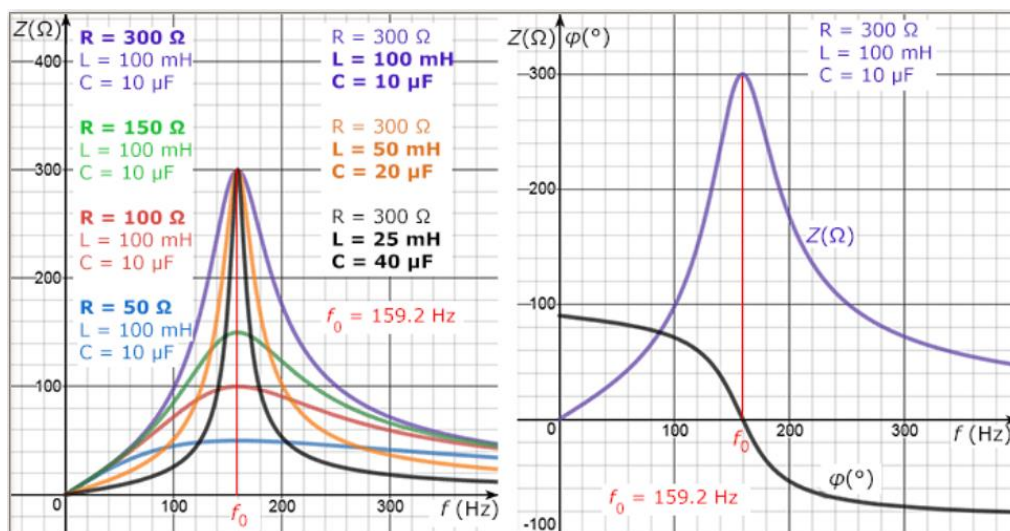
Pri paralelnom RLC obvode je činiteľ kvality definovaný podobne

$$Q = \frac{2}{d} = R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 RC$$

Voči sériovému obvodu ide vlastne o prevrátené hodnoty zlomkov.

Čím nižšia je paralelná rezistencia, tým viac bude vplývať na tlmenia obvodu a teda tým menšia je hodnota činiteľa Q . Závislosť od veľkosti odporu R a kapacity C je uvedená na grafe. Čím nižšia je paralelná rezistencia, tým viac bude vplývať na tlmenia obvodu a teda tým menšia bude hodnota činiteľa kvality rezonančného obvodu Q .

Pre rýchly výpočet parametrov obvodu pozri kalkulátor⁶



⁶ Parallel RLC Circuit Impedance Calculator, <https://www.translatorscafe.com/unit-converter/en-US/calculator/parallel-rlc-impedance/?R=inf&Ru=ohm&L=1&Lu=mH&C=0&Cu=mcF&f=1&fu=kHz>

Z uvedených záverov RLC sériového a paralelného obvodu vyplýva ekvivalencia veličín a parametrov:

Sériový RLC obvod			Paralelný RLC obvod		
Napätie	U		Prúd	I	
Odpor	R		Vodivosť	$G = \frac{1}{R}$	
Reaktancia	$X_L = j\omega L$	$X_C = \frac{1}{j\omega C}$	Susceptancia	$B_L = \frac{1}{j\omega L}$	$B_C = j\omega C$
Impedancia	$Z(j\omega) = R + X(j\omega)$		Admitancia	$Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)} = \frac{1}{R} + B(j\omega)$	

2.4 Zostavovanie simulačných modelov elektrických obvodov

V predchádzajúcom sme pri sériovom a paralelnom obvode RLC uviedli základné princípy zostavenia simulačných modelov. Uvedme ešte niekoľko príkladov na zostavenie simulačných modelov elektrických obvodov.

V každom prípade sa snažíme vyhnúť použitiu integrálu v základnej rovnici popisujúcej obvod a preto miesto zápisu integrálu

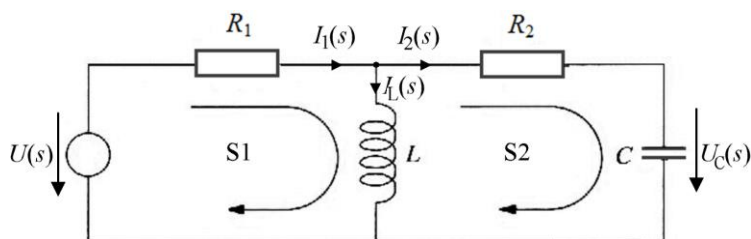
$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt$$

zapisujeme iba prúd indukčnosťou $i_L(t)$. Po vyriešení prúdu tečúceho kondenzátorom získame toot napätie pomocou integrátora.

Použité označenie? pri riešení je kvôli rýchlej orientácii vhodné označovať, k čomu sa daná rovnica vzťahuje. Napr. rovnice pre slučky označíme S1: , S2: , ... ; pre uzly U1: , U2: ; pre vetvy V1: , V2: ; pre kondenzátory C1: , C2: , pre indukčnosti L1: , L2: , pre odpory R1: , R2: .
Skratka pre I. a II. Kirchhoffov zákon: I. KZ: , II. KZ: ; Ohmov zákon – OZ:

Príklad 1

Zostaviť simulačný model obvodu:



Základné rovnice pre získanie simulačného modelu:

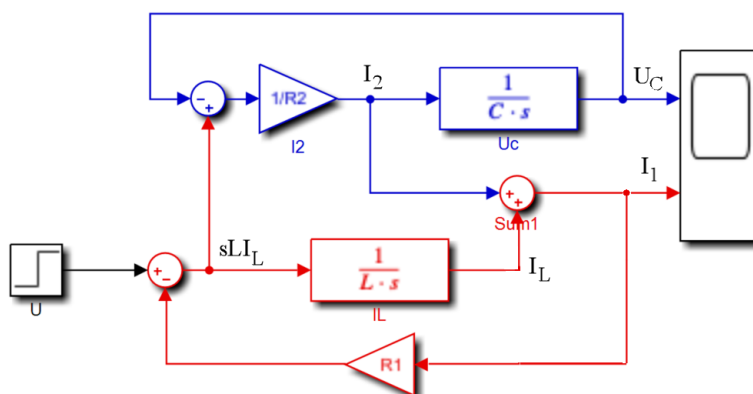
$$S1: \quad R_1 I_1(s) + sL I_L(s) = U(s) \quad \text{Odkiaľ} \quad sL I_L(s) = U(s) - R_1 I_1(s)$$

$$S2: \quad R_2 I_2 + U_c - sL I_L = 0 \quad R_2 I_2(s) = -U_c(s) + sL I_L(s)$$

$$\text{II. KZ} \quad I_1 = I_2 + I_L$$

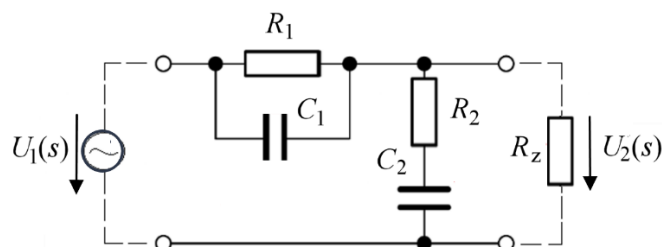
$$C: \quad U_c(s) = \frac{1}{sC} I_2(s)$$

Simulačná schéma analyzovaného obvodu v Simulinku (jednotlivé obvody sú pre prehľadnosť zakreslené rôznymi farbami):



Príklad – domáca úloha

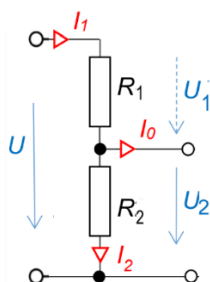
Zostaviť simulačný model nasledujúceho obvodu:



2.5 Dodatok

2.5.1 Delič napätia

Nezatážený delič: ($I_o = 0$)



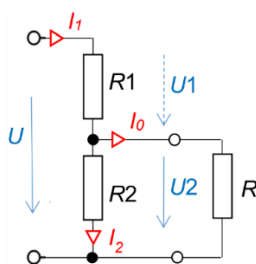
$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}$$

$$\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Analogický je postup v prípade, ak miesto odporov sú impedancie

$$F(s) = \frac{U_2(s)}{U(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

Zat'azený delič ($I_o \neq 0$) – ku výstupu je paralelne pripojená záťažná impedancia-



Miesto $Z_2(s)$ je paralelná kombinácia:

$$Z_2(s) \parallel Z(s) = \frac{Z_2(s) \cdot Z(s)}{Z_2(s) + Z(s)}$$

čo vplýva na zmenu prenosových vlastností obvodu a tým pádom aj na jeho dynamiku:

$$F(s) = \frac{U_2(s)}{U(s)} = \frac{Z_2(s) \parallel Z(s)}{Z_1(s) + Z_2(s) \parallel Z(s)}$$

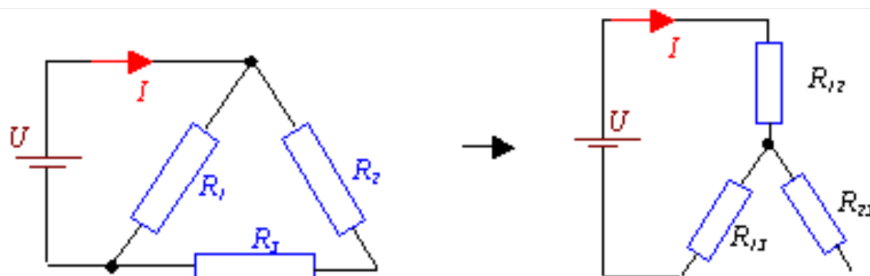
Kalkulačka pre výpočet prvkov deliča⁷.

Domáca úloha: vypočítať, ako sa zmenia pomery v obvode RC ak paralelne ku kondenzátoru je pripojený záťažný odpor R_z .

2.5.2 Prevod hviezda → trojuholník

V niektorých prípadoch sa v zložitejších elektrických obvodoch môže vyskytnúť zapojenie do trojuholníka, čím by sme nemohli ďalej zjednodušovať obvod. Zapojenie impedancií do trojuholníka však možno nahradiť zapojením vhodných impedancií do hviezdy a naopak, ináč povedané: impedancie zapojené vo hviezde (Y) možno nahradiť ekvivalentným zapojením do trojuholníka (D) a naopak.

Zapojenia do hviezdy a do trojuholníka sú ekvivalentné⁸ vtedy, ak napät'ový zdroj pripojený k tým odpovedajúcim svorkám dodáva ten istý prúd. Táto situácia je nakreslená na obrázku:



Odvodíme ekvivalentné hodnoty rezistorov, ak sú známe hodnoty v jednom zapojení (riešenie je obojstranné). Pre prúd tečúci do zapojenia v trojuholníku dostávame podľa Ohmovho zákona:

$$I = \frac{U}{R_1 \parallel (R_2 + R_3)} = \frac{U}{\frac{R_1 R_2 + R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}},$$

kde znak $\parallel$ označuje paralelné zapojenie rezistorov. Tento prúd musí byť rovnaký pri zapojení do hviezdy?

⁷ AC Voltage Divider, <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/vdivac.html>

⁸ http://kf-lin.elf.stuba.sk/~ballo/STU_online/Fyzika%20II/9%20kapitola/prevod.htm
https://www.butkaj.com/fyzika2?id_menu=570&id_sub=128&id_left=505
https://en.wikipedia.org/wiki/Y-%CE%94_transform

$$I = \frac{U}{R_{12} + R_{13}}.$$

Z rovnosti pravých strán oboch rovníc) vyplýva rovnica ekvivalencie zapojenia:

$$R_{12} + R_{13} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

odkiaľ vyjadríme prevodové vzorce zo zapojenia v trojuholníku na zapojenie v hviezde:

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Opačný prevod **hviezda** → **trojuholník** dostaneme z rovníc, ak z nich vyjadríme R_1 , R_2 , R_3 :

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{23} + R_{23} R_{13} + R_{12} R_{13}}{R_{12}}$$

$$R_2 = \frac{R_{12} R_{23} + R_{23} R_{13} + R_{12} R_{13}}{R_{23}}$$

$$R_3 = \frac{R_{12} R_{23} + R_{23} R_{13} + R_{12} R_{13}}{R_{13}}$$

Podobným spôsobom možno prepočítať aj impedancie z jedného zapojenia na druhé. S ohľadom na zjednodušenie výpočtu je výhodné použiť riešenie v symbolickom MATLABe (inštrukciu `solve`). Spravidla však vychádzajú zložitejšie impedancie.

POUŽITÁ A ODPORÚČANÁ LITERATÚRA

Kapitola 2: Modelovanie jednoslučkových RL, RL a RLC obvodov

- [1] Parallel circuit (+ Read more Tutorials in AC Circuits)
<https://www.electronics-tutorials.ws/accircuits/parallel-circuit.html>
- [2] Parallel RLC Circuit: Analysis & Example Problems
<http://www.electricala2z.com/testing/electrical-circuits/parallel-rlc-circuit-analysis-example-problems/>
- [3] Module 10.1: Ideal Parallel Circuits
https://learnabout-electronics.org/ac_theory/lcr_para_101.php
- [4] RLC circuit series
<https://www.electronics-tutorials.ws/accircuits/series-circuit.html>
- [5] Series Resonance Circuit
<https://www.electronics-tutorials.ws/accircuits/series-resonance.html>
- [6] Parallel RLC Circuit Analysis
<https://www.electronics-tutorials.ws/accircuits/parallel-circuit.html>
- [7] Series RLC Circuit
<https://cookierobotics.com/010/>
pozri aj ostatné, napr. <https://cookierobotics.com/012/>
- [8] Step response of series RLC circuit - output taken across capacitor,
<http://www.ece.sunysb.edu/~oe/Leon/ESE271S13/Lecture23.pdf>
- [9] Analyzing the Response of an RLC Circuit
<https://nl.mathworks.com/help/control/ug/analyzing-the-response-of-an-rlc-circuit.html>