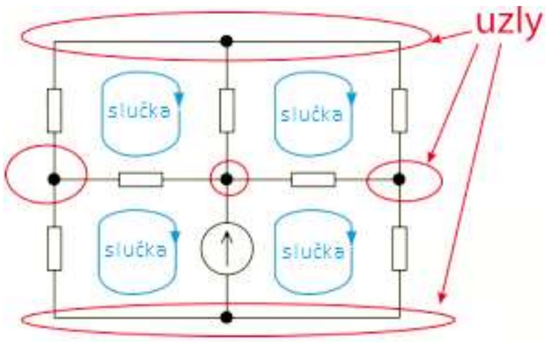
Pr. 4 PRENOSOVÉ FUNKCIE VIACSLUČKOVÝCH ELEKTRICKÝCH OBVODOV

V tejto kapitole sa budeme zoberať problematikou zostavenie prenosových funkcií zložitejších, viacslučkových elektrických obvodov, kde využijeme dve metódy, ktoré možno ľahko algoritmizovať a tým pádom pre výpočet využiť výpočtovú techniku.

1) Metódu slučkových prúdov (MSP)
2) Metódu uzlových napätí (MUP)

1 Metóda slučkových prúdov a jej aplikácia pre výpočet prenosovej funkcie obvodu

Princíp metódy spočíva v definovaní nezávislých slučiek obvodu a zostavení príslušných rovníc podľa II. Kirchoffovho zákona. V prípade zložitejších obvodov (najmä takých, ktoré nie sú planárne (ktoré sa nedajú nakresliť bez toho, aby sa v nich nekrížili aspoň dve vetvy) je potrebne pre definíciu nezávislých slučiek využiť teóriu grafov.

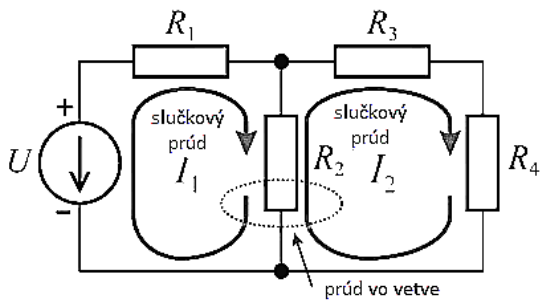


Počet lineárnych nezávislých rovníc možno stanoviť podľa vzorca

$$n = v - u + 1 - N_i$$

kde v je počet vetiev obvodu, n – počet uzlov, N_i – počet zdrojov prúdu v obvode-

Prúdy tečúce jednotlivými vetvami obvodu môžu, ale nemusia byť totožné so slučkovými prúdmi: prúd vetvy je daný súčtom slučkových prúdov, ktoré (slučkové prúdy) prechádzajú danou vetvou:



V každej slučke obvodu platí:

$$(\boldsymbol{suma\ imedanci\acute{\imath}\ v\ slu\check{c}ke}) \,.\, \boldsymbol{I(s)} = \boldsymbol{suma\ nap\ddot{a}\check{t}ov\acute{y}ch\ zdrojov}$$

kde impedancie v pasívnom elektrickom obvodu v Laplaceovej transformácii sú:

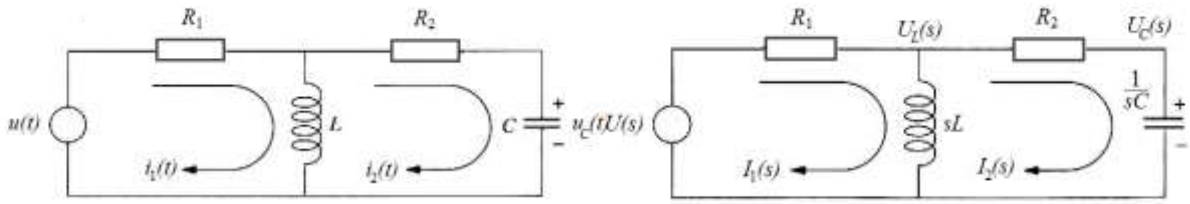
pre indukčnosť $Z_L(s) = Ls$, pre kondenzátor $Z_C(s) = \frac{1}{Cs}$ a pre odpor $Z_R(s) = R$.

Potom napätia na prvkoch v slučke sú:

$$U_L(\mathrm{s}) = Ls\, I(s) \qquad U_R(\mathrm{s}) = R\, I(s) \qquad U_C(\mathrm{s}) = \frac{1}{Cs}\, I(s)$$

V obvode hľadáme prenosovú funkciu medzi vstupným napätím a napätím na ľubovoľnom prvku.

Príklad: Uvažujme dvojslučkový obvod podľa obrázka:



Hľadáme prenosovú funkciu medzi vstupným a napätím na kondenzátore (výstupným napätím):

$$F(s) = \frac{U_C(s)}{U(s)}$$

Pre jej odvodenie pomocou metódy slučkových prúdov postupujeme nasledovne.

1) Zadefinujeme nezávislé slučky v obvode. Počet slučiek odpovedá počtu získaných rovníc, z ktorých sa vypočítajú slučkové prúdy.

2) Zvolíme smer slučkových prúdov. Ak v slučke sa nachádzajú vetvy, ktoré sú spoločné pre viac slučiek a tečie v nich viac slučkových prúdov, úbytok napätia bude daný algebrickým súčtom úbytkom napätí od jednotlivých slučkových prúdov.

- ak je vo vetve **iba jeden slučkový prúd**, rovná sa prúdu vo vetve a má aj rovnaký smer,
- ak sú vo vetve **slučkové prúdy s rovnakým smerom,** prúd vetvy tečie v rovnakom smere a bude daný **súčtom** oboch vypočítaných slučkových prúdov,
- ak **smer dvoch slučkových prúdov vo vetve je opačný**, výsledný prúd je daný ich **rozdielom** a bude tiecť v smere väčšieho prúdu.

3) Pre každú slučku zostavíme napäťové rovnice podľa II. KZ.

4) Tieto rovnice upravíme tak, aby sme dostali diferenciálne rovnice (vylúčením integrálov z rovníc obvodu).

5) Získanú rovnicu (rovnice) riešime vzhľadom na prúd.

6) Ak sú známe prúdy vo vetvách, napätie na zvolenom prvku dostaneme aplikáciou Ohmovho zákona a vyriešime prenosovú funkciu.

Pre analyzovaný dvojslučkový obvod dostávame rovnice:

$$[R_1 + Ls]\, I_1(s) \;-\; Ls\, I_2(s) = U(s)$$

$$-Ls\, I_1(s) \;+\; \left[R_2 + Ls + \frac{1}{Cs}\right] I_2(s) = 0$$

V týchto dvoch rovniciach sú neznámymi prúdy $I_1(s)$ a $I_2(s)$.

Vyriešime ich niektorou z metód riešenia lineárnych rovníc (tzv. metód lineárnej algebry):

1) metódou **dosadzovania** – zdĺhavé riešenie, možnosť omylov
2) pomocou **Cramerovho pravidla** – rýchle riešenie, možno algoritmizovať
3) pomocou **inverznej matice** – rýchle riešenie, možno algoritmizovať

Sústava lineárnych rovníc prepísaná do maticového tvaru je:

$$\begin{bmatrix} R_1 + Ls & -Ls \\ -Ls & R_2 + Ls + \frac{1}{Cs} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix}$$

Teda

$$\boldsymbol{Z}(s).\boldsymbol{i}(s) = \boldsymbol{u}(s)$$

kde $\boldsymbol{Z}(s)$ je matica impedancií obvodu $i(s)$ je vektor slučkových prúdov a $\boldsymbol{u}(s)$ je vektor napätí v slučkách obvodu.

Pre výpočet prenosu stačí vypočítať prúd cez výstupný prvok, v našom prípade je to prúd $I_2(s)$.

Pozn.: touto metódou možno zistiť prúdy vo vetvách, ak je v obvode zapojených viac zdrojov.

Riešenie pomocou Cramerovho pravidla

Pre výpočet (druhého) prúdu $I_2(s)$vyriešený pomocou Cramerovho pravidla nahradíme druhý stĺpec vektorom pravej strany:

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} (R_1 + Ls) & U(s) \\ -Ls & 0 \end{vmatrix}}{\det \boldsymbol{Z}} = \frac{Ls}{\det \boldsymbol{Z}} \; U(s)$$

kde $\det \boldsymbol{Z}$ je determinant sústavy.

$$\det \boldsymbol{Z} = (R_1 + Ls)\left(R_2 + Ls + \frac{1}{Cs}\right) - (Ls)^2$$

Riešenie pomocou inverznej matice

Skrátený zápis maticovej rovnice:

$$\boldsymbol{Z}(s).\boldsymbol{i}(s) = \boldsymbol{u}(s) \quad /\boldsymbol{Z}^{-1}(s) \qquad \text{zľava}$$

Hľadáme vektor prúdov potom je:

$$\boldsymbol{i}(s) = \boldsymbol{Z}^{-1}(s).\boldsymbol{u}(s)$$

Poznamenajme, že pre maticu $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

inverznú maticu vypočítame podľa formuly:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Pozn.: postup pri odvodení inverznej matice je uvedený v dodatku.

Konkrétne, pre náš prípad $Z^{-1}(s)$ bude:

$$\boldsymbol{Z}^{-1}(s) = \frac{1}{(R_1 + Ls)\left(R_2 + Ls + \frac{1}{Cs}\right) - (Ls)^2} \begin{bmatrix} R_2 + Ls + \frac{1}{Cs} & Ls \\ Ls & R_1 + Ls \end{bmatrix}$$

Vektor výstupných prúdov dostaneme:

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \boldsymbol{Z}^{-1}(s). \begin{bmatrix} U(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Z tejto maticovej rovnice vyjadríme prúd $I_2(s)$, ktorý tečie kondenzátorom (výstupná impedancia).

Výstupné napätie (napätie na kondenzátore) potom podľa Ohmovho zákona bude:

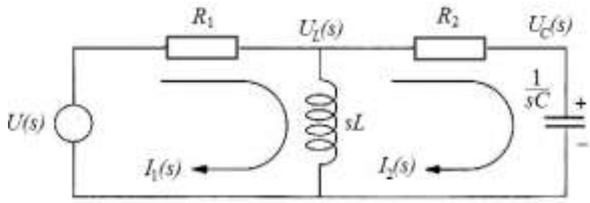
$$U_C(s) = Z_C(s)\, I_2(s) = \frac{1}{sC}\, I_2(s)$$

Vydelením tejto rovnice dostaneme hľadaný prenos:

$$F(s) = \frac{U_C(s)}{U(s)} = \frac{1}{U(s)}\, \frac{1}{sC}\, I_2(s)$$

S ohľadom na to, že sa tu vykonávajú výpočty s maticami obsahujúce symbolické premenné (Laplaceov operátor *s* a parametre obvodu *R*, *L*, *C*, napätia, prúdy), pre riešenie rovníc výhodne využijeme symbolický počet v MATLABe.

Rýchly spôsob maticového zápisu rovníc viacslučkového obvodu:



Ak sa analyticky pozrieme na získanú lineárnu sústavu rovníc:

$$[R_1 + Ls]\, I_1(s) \;-\; Ls\, I_2(s) = U(s)$$

$$-Ls\, I_1(s) \;+\; \left[R_2 + Ls + \frac{1}{Cs}\right]\, I_2(s) = 0$$

môžeme ich slovne popísať nasledovne:

$$\left[\sum_{slučka\ 1} impedancií\right] I_1(s) - \left[\sum_{slučka\ 1-2} \begin{matrix} spoločných \\ impedancií \end{matrix}\right] I_2(s) = \sum_{slučka\ 1} \begin{matrix} napäťových \\ zdrojov \end{matrix}$$

$$-\left[\sum_{slučka\ 1-2} \begin{matrix} spoločných \\ impedancií \end{matrix}\right] I_1(s) + \left[\sum_{slučka\ 2} impedancií\right] I_2(s) = \sum_{slučka\ 2} \begin{matrix} napäťových \\ zdrojov \end{matrix}$$

Všimnime si znamienko napäťového zdroja – ak je napätie zdroja je orientované proti smeru šípky slučkového prúdu, potom v maticovej rovnici má kladné znamienko!

Rovnice prehľadne zapíšeme pomocou maticového tvaru:

$$\begin{bmatrix} R_1 + Ls & -Ls \\ -Ls & R_2 + Ls + \frac{1}{Cs} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

čo umožňuje rýchlo napísať rovnice obvodu priamo zo schémy. Ťažisko riešenia prenosovej funkcie obvodu sa takto presúva do riešenia sústavy lineárnych rovníc.

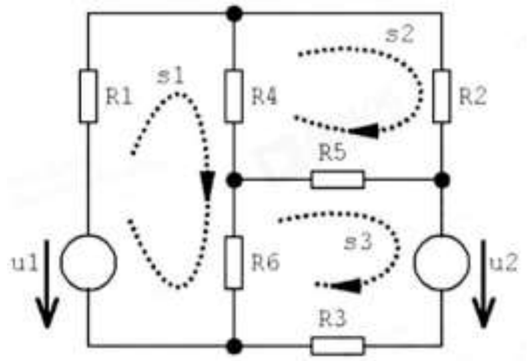
Tieto poznatky možno výhodne rozšíriť na viacslučkové obvody (>2). V prípade systému s viacerými slučkami ako 2, je toto pravidlo pre prvú slučku nasledovné:

$$\left[\sum_{slučka\ 1} imp.\right] I_1(s) - \left[\sum_{slučka\ 1-2} imp.\right] I_2(s) - \left[\sum_{slučka\ 1-3} imp.\right] I_3(s) = \sum_{slučka1} \begin{matrix} napäťových \\ zdrojov \end{matrix}$$

Uvedená metóda umožňuje automatizovať zostavovanie rovníc a rýchlo dospieť ku výsledku, samozrejme s využitím Symbolic toolboxu v MATLABe. Viac informácií ku postupu pri zostavovaní slučiek v zložitejších zapojeniach a tzv.

úplného stromu je tu[1].

Príklad 1 na maticový zápis trojslučkového obvodu a odpormi:



Rovnice obvodu, zostavené pomocou slučkových prúdov, možno zapísať v maticovom tvare:

$$\boldsymbol{R}.\boldsymbol{i} = \boldsymbol{u}$$

kde:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_4 + R_6 & -R_4 & -R_6 \\ -R_4 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ -R_6 & -R_5 & R_3 + R_5 + R_6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ i_{s3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ -u_2 \end{bmatrix}$$

Touto metódou možno zistiť prúd v danej vetve obvodu aj v prípade, ak obvod je napájaný viacerými napäťovými zdrojmi.

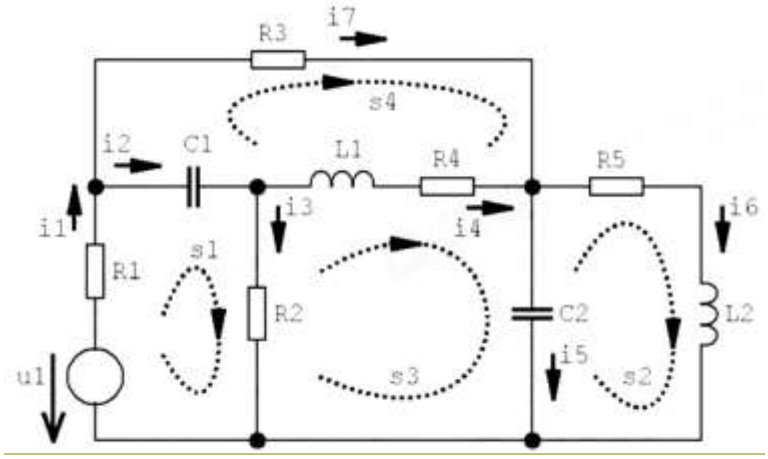
Vektor prúdov možno získať tiež výpočtom inverznej matice $\boldsymbol{R}^{-1}$, t.j.:

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{u}$$

V prípade symbolického zápisu impedancií obvodu: *R*, *sL* a 1/(*sC*) jedinou cestou, ako prúd v danej vetve možno efektívne vypočítať (pri väčšom počte slučiek ako 2), je použitie symbolického MATLABu.

[1] Elektrické obvody 1 (Topológia elektrických obvodov): https://lm.uniza.sk/~simon/EO1/prednasky/EO1-3.pdf)

Príklad 2 – zostaviť impedančnú maticu pre obvod impedanciami



Prvky v matici sú symetrické okolo hlavnej diagonály, čo môžeme využiť pre kontrolu správnosti ich zápisu:

$$Z(s)=\begin{bmatrix} R_1+R_2+\dfrac{1}{sC_1} & 0 & -R_2 & -\dfrac{1}{sC_1} \\ 0 & R_5+sL_2+\dfrac{1}{sC_2} & -\dfrac{1}{sC_2} & 0 \\ -R_2 & -\dfrac{1}{sC_2} & \dfrac{1}{sC_2} & -R_4-sL_1 \\ -\dfrac{1}{sC_1} & 0 & -R_4-sL_1 & R_3+R_4+sL_1+\dfrac{1}{sC_1} \end{bmatrix}$$

2 Metóda uzlových napätí a jej aplikácia pre výpočet prenosovej funkcie obvodu

Táto metóda je založená na použití prvého Kirchhoffovho zákona. Je výhodné ju použiť najmä v obvodoch s paralelne radenými členmi.

Postup:

1) V obvode zvolíme jeden uzol ako vzťažný (referenčný)
– spravidla volíme ten, v ktorom je spojených najviac prvkov.

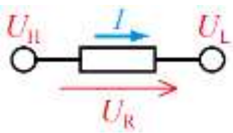
2) Ostatné uzly očíslujeme a označíme napätie každého z uzlov vzhľadom k referenčnému bodu: $U_1, U_2, \dots\ , U_{n-1}$ (alebo $U_A, U_B, \dots$) a pod.

3) Pre tieto očíslované uzly zostavíme rovnice podľa 1. KZ.
Získame toľko rovníc, koľko bude očíslovaných uzlov (*n* - 1).

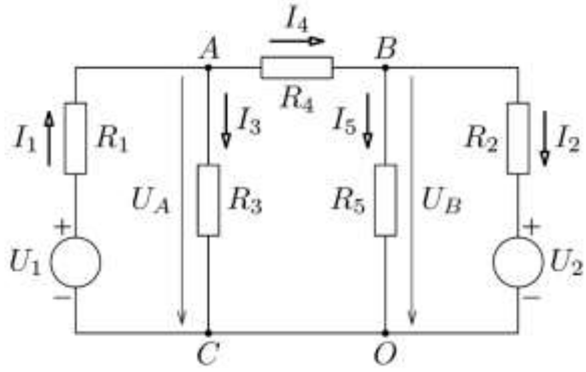
4) Riešením tejto sústavy rovníc určíme (*n* - 1) napätí medzi označenými uzlami a referenčným uzlom.

Zápis rovníc podľa prvého Kirchoffovho zákona pre uzol

$$I=\frac{U_H-U_L}{R} \qquad\qquad U_H > U_L$$



Príklad: Vyriešiť obvod pomocou metódy uzlových napätí.



Za vzťažný uzol O zvolíme uzol spoločný rezistorom R_3 a R_5 a označíme napätia U_A, U_B smerujúce k referenčnému uzlu.

Pre uzol A platí: $I_1 - I_3 - I_4 = 0$

Pre uzol B platí: $I_4 - I_2 - I_5 = 0$

Po dosadení uzlových napätie dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{U_1 - U_A}{R_1} - \frac{U_A - U_B}{R_4} - \frac{U_A}{R_3} &= 0, \\ \frac{U_A - U_B}{R_4} - \frac{U_B - U_2}{R_2} - \frac{U_B}{R_5} &= 0. \end{aligned}$$

Rovnice prepíšeme nasledovne:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) U_A - \frac{1}{R_4} U_B = \frac{1}{R_1} U_1$$

$$-\frac{1}{R_4} U_A + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) U_B = \frac{1}{R_2} U_2$$

Rovnice usporiadame do maticového zápisu:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} U_1 \\ \frac{1}{R_2} U_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_3 + G_4 & -G_4 \\ -G_4 & G_2 + G_4 + G_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 U_1 \\ G_2 U_2 \end{bmatrix}$$

Pohľadom na maticu vodivostí (keďže $G = 1/R$) ľahko zistíme pravidlo:

- Matica je symetrická podľa hlavnej diagonály.
- Na hlavnej diagonále je v každom riadku uvedený súčet vodivostí, ktoré sú pripojené k danému uzlu.
- Mimo hlavnej diagonály sa nachádzajú symetricky rozmiestnené záporné hodnoty vodivostí (súčet vodivostí), ktoré sú medzi jednotlivými uzlami.
- Pravá strana – súčet všetkých zdrojov prúdu zapojených do i-tého uzla.
  V našom prípade sú to zdroje napätia transformované na zdroje prúdu.

Uvedené pravidlo platí nielen pre rezistory ale platí aj pre impedancie (resp. čo platí pre vodivosti, platí pre admitancie (t.j. $Y(s) = 1/Z(s)$). Z maticovej rovnice vypočítame hodnoty napätí U_A a U_B. Ostatné potrebné veličiny pri výpočte prenosu dostaneme aplikáciou Ohmovho zákona.

3 Príloha

3.1 Výpočet inverznej matice 2x2

Matica A(2x2)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

1) Transponovaná matica – zámena riadkov za stĺpce – otočenie okolo hlavnej diagonály

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

2) Adjungovaná matica – matica algebraických doplnkov ku jednotlivým prvkom A^T

$$\boldsymbol{A}_{adj} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\, a_{22} & (-1)^{2+1}\, a_{12} \\ (-1)^{2+1}\, a_{21} & (-1)^{2+2}\, a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

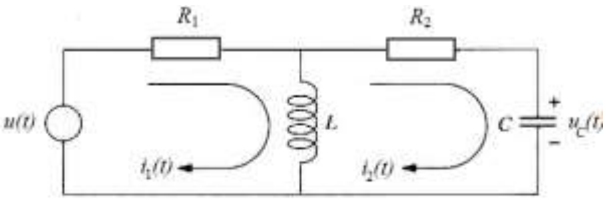
3) Determinant matice $\boldsymbol{A}$

$$\det A = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

4) Inverzná matica

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}_{adj} = \frac{1}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Použitie inverznej matice pre riešenie sústavy lineárnych rovníc.



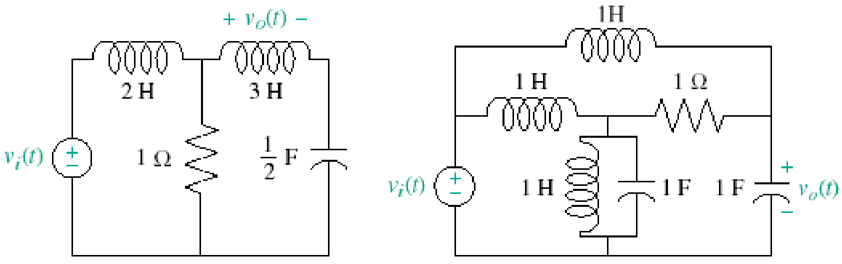
3.2 Príklad riešenia elektrického obvodu

Norman Nise: Control Systems Engineering 6th Edition International Student Version http://bcs.wiley.com/he-bcs/Books?action=index&bcsId=6361&itemId=0470646128

http://higheredbcs.wiley.com/legacy/college/nise/0471794759/justask/Q5.html#problem

Problém 18

Nájdite prenosové funkcie $F(s) = U_o(s)/U_i(s)$ pre nasledujúce obvody Figure P2.5. Riešte pomocou metódy slučkových prúdov



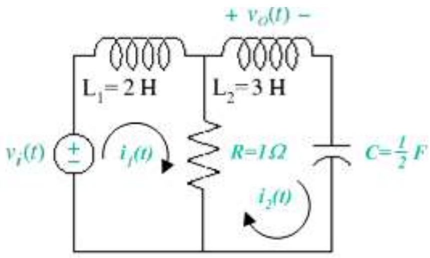
(*a*) (*b*)

Directions

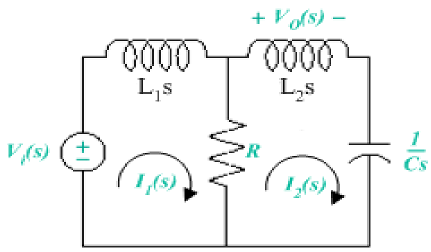
1. Part a:
   Part b:
   Repeat the same procedure as in part a for the second network.

Detailed Solution

1. Part a:
   To find the transfer function of the given network we will use mesh analysis: Let us label the source, inductors, resistor, and capacitor, and assign one mesh current to each mesh in the circuit as shown in Fig. 2.5a-1.



2. For simplicity, we assume zero initial conditions.
3. First, we replace the passive elements values with their impedances and the source and time variables with their Laplace transform. The transformed network is shown in Fig. 2.5a-2



4. The circuit with which we are dealing requires two simultaneous equations to solve for the transfer function . Applying Kirchhoff's voltage law to the mesh on the left side of the circuit, we obtain:

$$V_i(s) = (L_1 s + R)I_1(s) - RI_2(s)$$

5. Next, we write Kirchhoff's voltage law for the mesh on the right:

$$0 = \left(L_2 s + \frac{1}{Cs} + R\right) I_2(s) - R I_1(s)$$

6. Solving (4) for I_1 and substituting into (5), we obtain:

$$\frac{V_i(s) + R I_2(s)}{L_1 s + R} \cdot R = \left(L_2 s + \frac{1}{Cs} + R\right) \cdot I_2(s)$$

7. Since we need to find the $G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ transfer function , we will express $I_2(s)$ in terms of $V_o(s)$ using Ohm's law $I_2(s) = \frac{V_o(s)}{L_2 s}$. Substituting $I_2(s)$ into (6) yields :

$$\frac{V_i(s) + R\frac{V_o(s)}{L_2 s}}{L_1 s + R} \cdot R = V_o(s) + \frac{V_o(s)}{L_2 C s^2} + \frac{V_o(s) R}{L_2 s}$$

8. Solving for the transfer function yields :

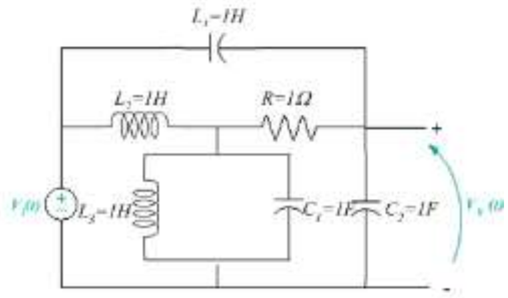
$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R L_2 C s^2}{L_1 L_2 C s^3 + RC(L_1 + L_2) s^2 + L_1 s + R}$$

9. Finally, after substituting the component values into (8), we obtain:

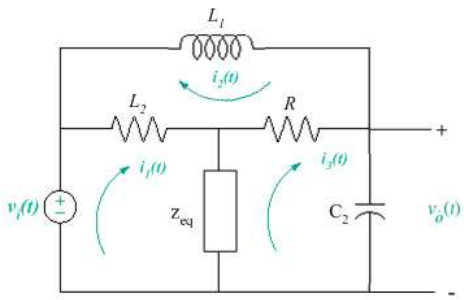
$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{3s^2}{6s^3 + 5s^2 + 4s + 2}$$

e

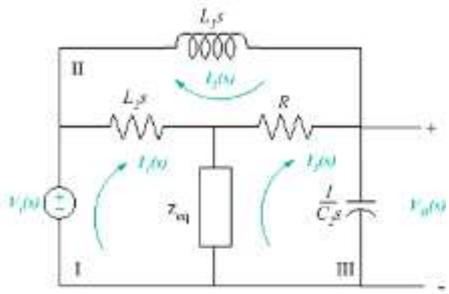
10. Part b: Let us label the source, resistors, inductors and capacitors in the circuit as shown in Fig. 18b-1:



11. First we transform the circuit and assign one mesh current to each mesh as shown in Fig. 18b-2:



12. Next we replace the passive elements with their impedances and the source and time variables with their Laplace transform as shown in Fig. 18b-3:



13. Due to the parallel connection of L_3 and C_1, we obtain for Z_{eq}:

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{L_3 s} + \frac{1}{1/C_1 s} \Rightarrow Z_{eq} = \frac{L_3 s}{L_3 C_1 s^2 + 1}$$

14. For simplicity we assume zero initial conditions.

15. Applying Kirchhoff's voltage law to the mesh **I**, we obtain:

$$V_i(s) = (L_2 s + Z_{eq}) I_1(s) - L_2 s I_2(s) - Z_{eq} I_3(s)$$

16. Applying Kirchhoff's voltage law to the second mesh, yields:

$$0 = (L_1 + L_2 + R) I_2(s) - L_2 s I_1(s) - R I_3(s)$$

17. Similarly, we can write for the third mesh:

$$0 = \left(Z_{eq} + R + \frac{1}{C_2 s}\right) I_3(s) - Z_{eq} I_2(s) - R I_1(s)$$

18. Since we need to find transfer function $G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$, we will express $I_3(s)$ in terms of $V_o(s)$. Using Ohm's law :

$$I_3(s) = C_2 s V_o(s)$$

19. Substituting (18) into (16) and (17), yields:

$$[(L_1+L_2)s+R]I_2(s)-L_2sI_1=RC_2sV_o(s)$$

$$Z_{eq}I_1+RI_2=\left(Z_{eq}+R+\frac{1}{C_2s}\right)C_2sV_o(s)$$

1. Substituting the component values and writing in vector-matrix form, we obtain:

$$\begin{bmatrix} -s & 2s+1 \\ \frac{s}{s^2+1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s \\ \frac{s^2}{s^2+1}+s+1 \end{bmatrix}V_o(s)$$

20. Solving for $I_1(s)$ and $I_2(s)$, yields:

$$I_1(s)=\frac{2s^4+4s^3+4s^2+2s+1}{s^3+2s^2+2s}V_o(s)$$

$$I_2(s)=\frac{s^3+2s^2+2s+1}{s^2+2s+2}V_o(s)$$

21. By replacing $I_1(s)$, $I_2(s)$, $I_3(s)$ and Z_{eq} in (15) with (21), (18), and (13), respectively, and substituting the component values, we obtain:

$$V_i(s)=\left[\left(s+\frac{s}{s^2+1}\right)\frac{2s^4+4s^3+4s^2+2s+1}{s^3+2s^2+2s}-\frac{s^4+2s^3+2s^2+s}{s^2+2s+2}-\frac{s^2}{s^2+1}\right]V_o(s)$$

22. Solving for the transfer function $\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ yields:

$$G(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{s^2+2s+2}{s^4+2s^3+3s^2+3s+2}$$

Final Answer

a) $$G(s)=\frac{3s^2}{6s^3+5s^2+4s+2}$$

b) $$G(s)=\frac{s^2+2s+2}{s^4+2s^3+3s^2+3s+2}$$

POUŽITÁ A ODPORÚČANÁ LITERATÚRA

Prenosové funkcie viacsľučkových elektrických obvodov

[1] Circuit analysis | Electrical engineering | Science | Khan Academy
https://www.khanacademy.org/science/electrical-engineering/ee-circuit-analysis-topic

[2] Node voltage method (article) | Khan Academy
https://www.khanacademy.org/science/electrical-engineering/ee-circuit-analysis-topic/ee-dc-circuit-analysis/a/ee-node-voltage-method

[3] Mesh current method
https://www.khanacademy.org/science/electrical-engineering/ee-circuit-analysis-topic/ee-dc-circuit-analysis/a/ee-mesh-current-method?modal=1

[4] Lesson 1 - Intro To Node Voltage Method (Engineering Circuits)
https://www.youtube.com/watch?v=-wCGiSNk5tw&t=139s

[5] Tutorial for Control System Toolbox for MATLAB
http://techteach.no/publications/control_system_toolbox/#c31