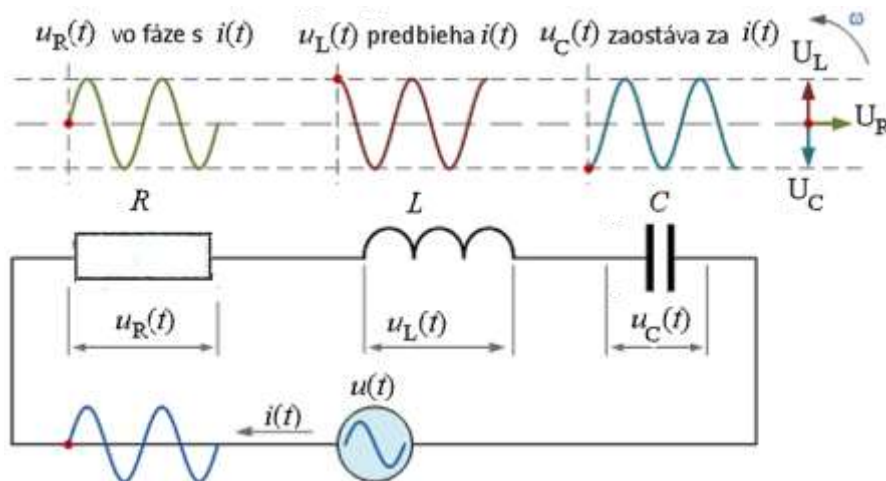


## Pr. 4 REZONANČNÉ OBVODY RLC

### 1. Sériový rezonančný RLC obvod

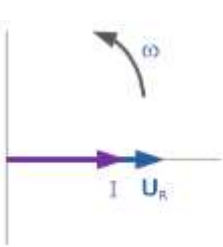
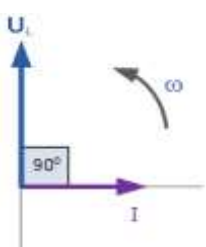
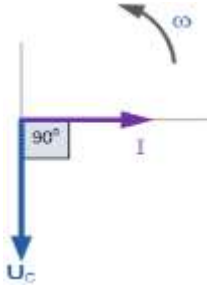
#### 1.1 Fázové pomery pri striedavom napájaní

Po pripojení obvodu na harmonický priebeh vstupného napätia  $u(t) = \sin \omega t$  na jednotlivých súčiastkach obvodu dochádza ku fázovému posunu medzi prúdom a napätiami, ktorý sa sčítava a dáva výsledný fázový posun medzi napájacím napätím a prúdom zdroja, resp. medzi vstupným a výstupným napätím.



Po pripojení RLC obvodu na zdroj striedavého napätia, na odpore bude napätie vo fáze s prúdom, na indukčnosti predbieha prúd (a napätie na odpore) o  $+90^\circ$  a na kondenzátore mešká (o  $-90^\circ$ ) za prúdom (a teda aj napätím na odpore).

Tab. 1 Fázový posun pri prietoku prúdu cez prvku  $R$ ,  $L$ ,  $C$

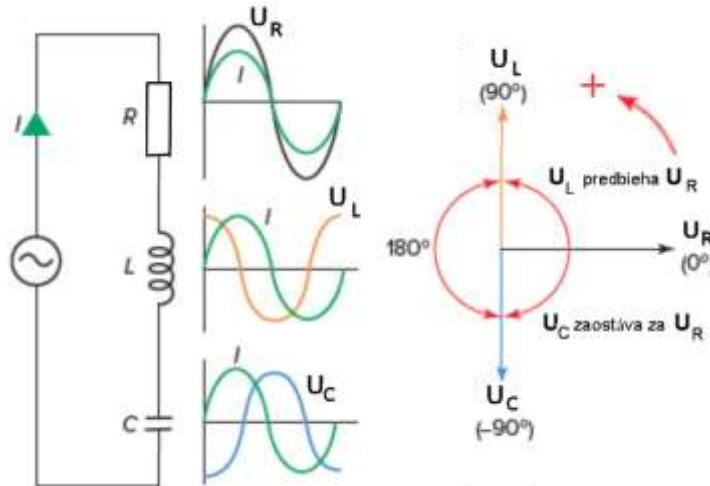
Napätie na rezistore	Napätie na cievke	Napätie na kondenzátore
je vo fáze s prúdom	predbieha prúd o $+90^\circ$	zaostáva za prúdom o $90^\circ$
veľkosť nezávisí od frekvencie	veľkosť je priamo úmerná frekvencii, lebo $U_L = j\omega L I$	veľkosť je nepriamo úmerná frekvencii, $U_C = \frac{1}{j\omega C} I$
		

Výsledný fázový posun je daný vektorovým súčtom napätí na jednotlivých prvkoch a teda závisí od frekvencie napájacieho napätia. Táto závislosť amplitúdy a fázy od frekvencie je vyjadrená pomocou Bodeho logaritmických frekvenčných charakteristík (LFCH): amplitúdovej (ALFCH) a fázovej (FLFCH).

Veľkosť napätia na odpore, indukčnosti a kondenzátore pri danej frekvencii  $\omega$  závisí od veľkosti odporu, indukčnej a kapacitnej reaktancie:

$$R, \quad X_L(j\omega) = j\omega L, \quad X_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C}$$

V závislosti od frekvencie sa menia veľkosti napätí na jednotlivých prvkoch a tým pádom vzniká výsledný fázový posun medzi napájacím napätím a prúdom.



Animácia: <sup>1</sup>

Tab. 2 Vektorové diagramy sériového RLC obvodu pri rôznej frekvencii napájacieho napätia

Frekvencia napájacieho napätia	nižšia, ako rezonančná: $\omega < \omega_0$	rovnaká, ako rezonančná: $\omega = \omega_0$	vyššia ako rezonančná: $\omega > \omega_0$
Amplitúda napätia	$ U_L  <  U_C $	$ U_L  =  U_C $	$ U_L  >  U_C $
Vektorový diagram			
Charakter obvodu	kapacitný $\varphi < 0$	odporový $\varphi = 0$	induktívny $\varphi > 0$

Zmenou indukčnosti alebo kapacity môžeme teda meniť rezonančnú frekvenciu. Sériový rezonančný obvod má pri rezonančnej frekvencii najmenšiu impedanciu a najväčší prúd.

<sup>1</sup> R-L-C Serial Circuit, [https://javalab.org/en/rlc\\_serial\\_circuit\\_en/](https://javalab.org/en/rlc_serial_circuit_en/)

## 1.2 Činiteľ kvality a hraničná frekvencia

### Činiteľ kvality

V rezonančných sériových RLC obvodoch nás zaujíma tzv. činiteľ kvality, ktorý je definovaný

$$Q = \frac{2}{d} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R \cdot \omega_0 C}$$

Činiteľ kvality  $Q$  udáva koľkokrát pri rezonančnej frekvencii je napätie na cievke (kondenzátore) väčšie ako napätie na odpore, a ako je celkové napätie. Čím činiteľ kvality má vyššiu hodnotu, tým obvod je menej tlmený. Čím väčšia je hodnota odporu, tým nižšia je hodnota  $Q$ .

Pri určení uhla fázového posunu vychádzame z impedancie v komplexnom tvare:

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \text{Re}(\omega) + j \cdot \text{Im}(\omega)$$

odkiaľ uhol fázového posunu medzi prúdom a napätím je:

$$\varphi = \arctg \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)} = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \arctg \frac{U_L - U_C}{U_R}$$

### Hraničná frekvencia

Ak napätie na výstupe RLC obvodu snímame z odporu, potom prenosová funkcia má tvar:

$$F_R(s) = \frac{U_R(s)}{U(s)} = \frac{sRC}{s^2LC + sRC + 1}$$

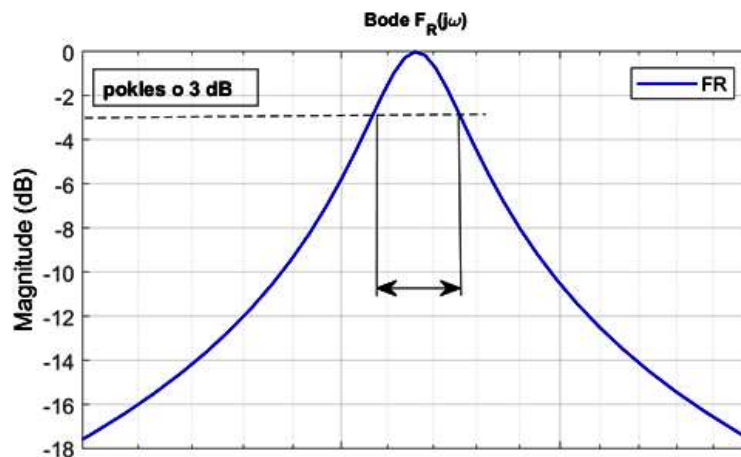
z hľadiska filtrovania signálu predstavuje tzv. pásmovú zádrž, ktorá prepúšťa určité pásmo frekvencií (podrobnejšie vysvetlenie bude neskôr).

Hraničná frekvencia je definovaná pri poklese na hodnotu 0,7 maximálnej hodnoty.

Keďže  $\log 0,707 = -0,15$  zmenšeniu amplitúdy na hodnotu  $\sqrt{2}/2 = 0,707$  zodpovedá amplitúde v dB:

$$A_{dB} = 20 \log 0,7 = 20 \cdot (-0,15) = -3 \text{ dB}$$

Šírka prenášaného frekvenčného pásma sa vyznačuje na amplitúdovej logaritmickej frekvenčnej charakteristike:



### 1.3 Rezonancia v sériovom RLC rezonančnom obvode<sup>2</sup>

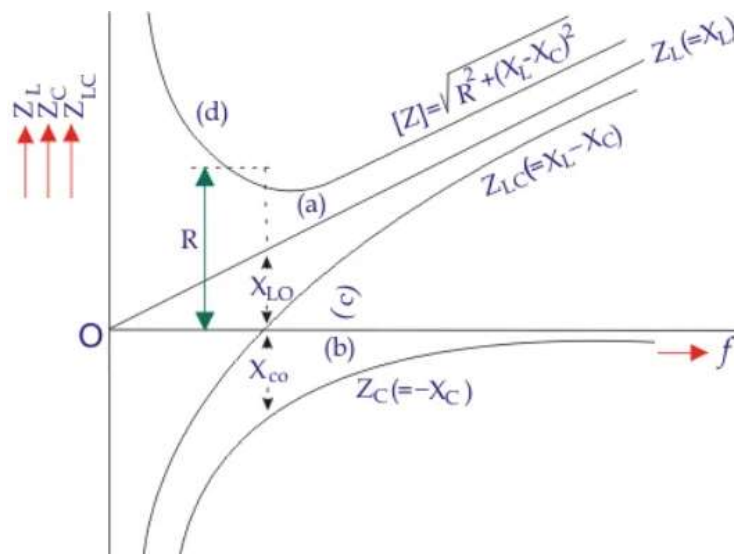
Impedancia sériového obvodu RLC je:

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}$$

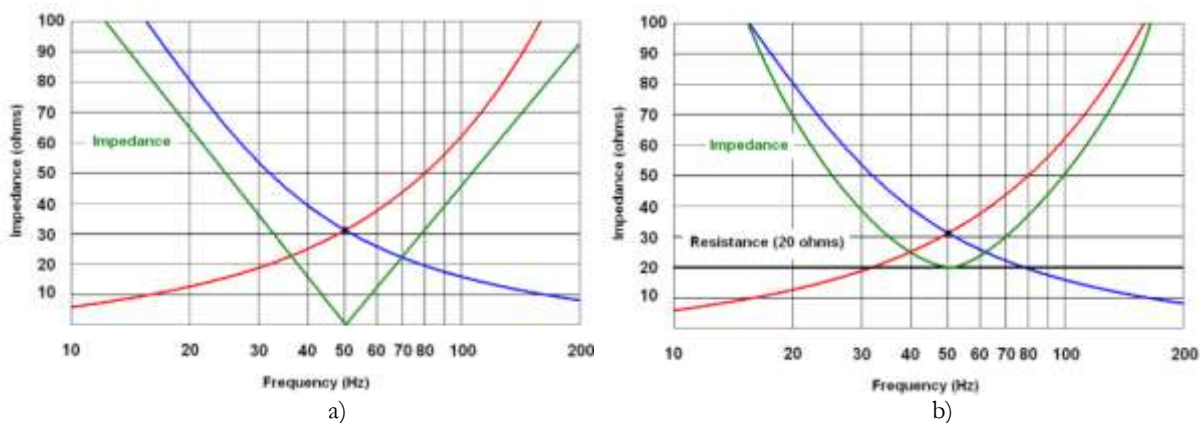
Pre  $s = j\omega$  je impedancia obvodu:

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Priebeh jednotlivých reaktancií v obvode v závislosti od frekvencie je uvedený na nasledujúcich obrázkoch:



Závislosti impedancií  $R$ ,  $X_L(j\omega)$ ,  $X_C(j\omega)$  a celkovej impedancie  $Z(j\omega)$  v sériovom rezonančnom obvode od frekvencie (stupnica frekvencie je lineárna)



Závislosti impedancií  $R$ ,  $X_L(j\omega)$ ,  $X_C(j\omega)$  a celkovej impedancie  $Z(j\omega)$  v sériovom rezonančnom obvode od frekvencie: a) pri  $R = 0$ ; b) pri  $R > 0$  (stupnica frekvencie je logaritmická)

Z vektorového súčtu napätí v obvode vyplýva:

$$|U| = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

<sup>2</sup> Rezonančný obvod, [https://sk.wikipedia.org/wiki/Rezonan%C4%8Dn%C3%BD\\_obvod](https://sk.wikipedia.org/wiki/Rezonan%C4%8Dn%C3%BD_obvod)

Pri rezonančnej frekvencii sa v tomto obvode vyrovnáva kapacitná a indukčná reaktancia a rezonančný obvod sa pri tejto frekvencii chová ako činný odpor. Stav obvodu, ktorý nastane pri rezonančnej frekvencii, sa nazýva rezonancia.

Pri rezonančnej frekvencii ( $\omega = \omega_0$ ) sa indukčná reaktancia (induktancia) rovná kapacitnej reaktancii (kapacitancii):

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

Odtiaľ dostávame vzťah pre rezonančnú frekvenciu:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Hodnoty jednotlivých impedancií a ostatných parametrov sériového rezonančného obvodu možno rýchlo vypočítať pomocou rôznych kalkulátorov<sup>3</sup>.

Impedancia obvodu je pri rezonancii najmenšia preto prúd pretekajúci obvodom preto v tomto stave je maximálny. Prenos prúdu dostaneme napr. z prenosu napätia na odpore,

$$F_R(s) = \frac{U_R(s)}{U(s)} = \frac{sRC}{s^2LC + sRC + 1}$$

Keďže  $I(s) = U_R(s)/R$ :

$$F_I(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{F_R(s)}{R} = \frac{sC}{s^2LC + sRC + 1}$$

Pre  $s = j\omega$

$$F_I(j\omega) = \frac{I(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{j\omega C}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$$

Pri rezonancii  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , čím po dosadení dostaneme

$$F_I(j\omega_0) = \frac{1}{R}$$

teda prúd v sériovom rezonančnom obvode pri rezonancii je obmedzený iba veľkosťou odporu  $R$ .

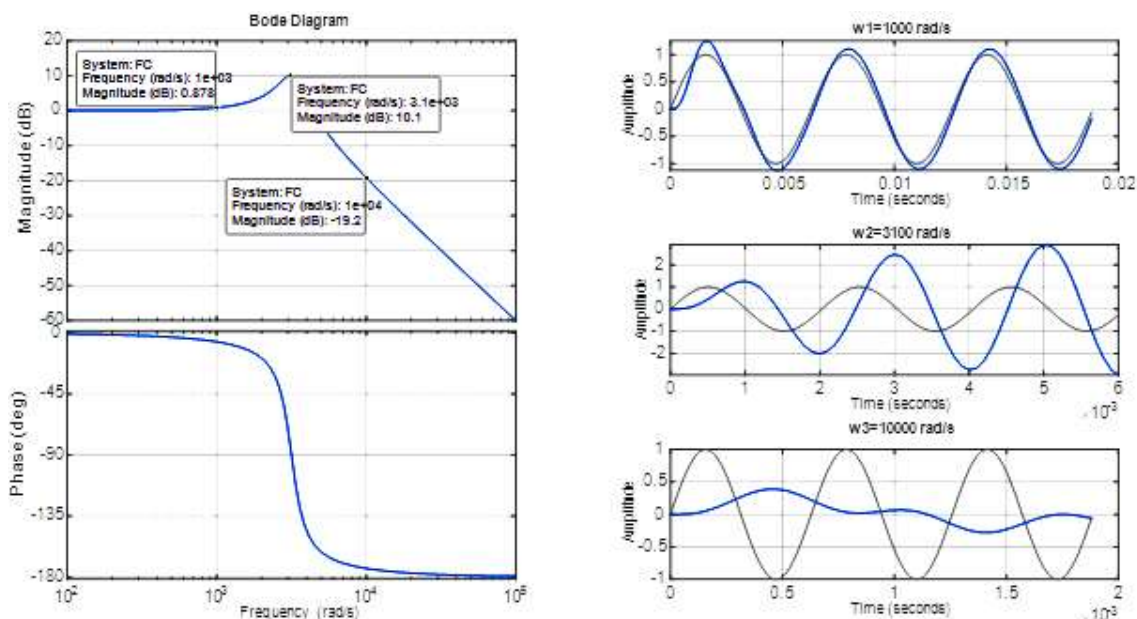
Preto sa sériový rezonančný obvod využíva tam, kde pri rezonancii potrebujeme dosiahnuť maximálny prúd. Ak amplitúda napätia  $U$  a prvky  $R, L, C$  budú nemenné, amplitúda prúdu  $I$  a fázový posun  $\varphi$  budú závislé len od kruhovej frekvencie  $\omega$  vonkajšieho zdroja napätia, o čom (t.j. o amplitúde a fáze) informáciu dostávame z logaritmických frekvenčných charakteristík.

Fázový posun medzi vstupným a výstupným napätím pri harmonickom napájaní závisí od frekvencie napájacieho napätia. Na nasledovnom obrázku sú časové znázornené priebehy v troch rôznych bodoch logaritmickéj frekvenčnej charakteristiky pre prenos napätia na kondenzátore (proporcionálna kmitavá sústava).

Body, v ktorých vyšetrojeme vlastnosti sústavy, volíme tak, aby čo najviac vystihovali extrémne hodnoty amplitúdovej a fázovej charakteristiky (rezonančné prevýšenie amplitúdy a malý/veľký fázový posun). Ide o voľbu bodov:

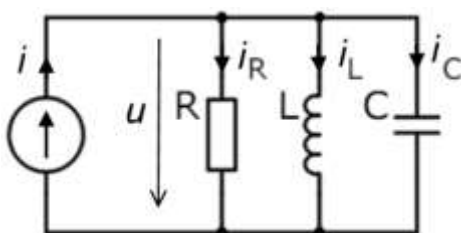
- pri nízkych frekvenciách: zosilnenie  $A \sim 0$  dB, fáza  $\varphi \sim 0^\circ$ ,
- pri rezonančnom prevýšení:  $A$  dosahuje maximum;  $\varphi = -90^\circ$ ,
- na klesajúcej časti charakteristiky:  $A = -20$  dB  $\sim 0,1$ ;  $\varphi \rightarrow -180^\circ$ .

<sup>3</sup> [Series RLC Circuit Impedance Calculator](#)

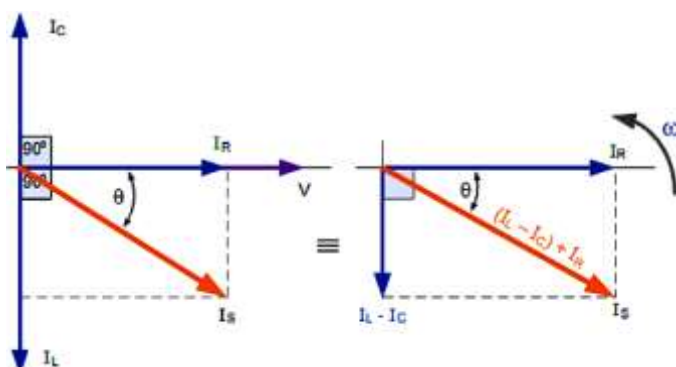


## 2 Paralelný RLC obvod

### 2.1 Fázové pomery pri striedavom napájaní



Celkový prúd odoberaný zo zdroja nebude matematickým súčtom troch jednotlivých vetviacich prúdov, ale ich vektorovým súčtom pozostávajúcím z troch častí: prúd pretekajúci rezistorom  $i_R$ , prúd induktorom  $i_L$  a prúd kondenzátorom  $i_C$ :



Rovnako, ako sériový obvod RLC, aj tento obvod môžeme vyriešiť pomocou fázovej alebo vektorovej metódy, ale teraz bude mať vo vektorovom diagrame ako referenciu napätie s tromi prúdovými vektormi zakreslenými vzhľadom na napätie (na reálne j osi). Amplitúda prúdov

tečúcich indukčnosťou a kondenzátorom závisí od frekvencie striedavého prúdu, čo nám vyplýva aj z nasledovnej tabuľky (na ďalšej strane).

Z prúdového trojuholníka môžeme pomocou Pytagorovej vety určiť celkový prúd vtekajúci do obvodu:

$$I^2 = I_R^2 + (I_L - I_C)^2$$

odkiaľ veľkosť prúdu po dosadení za jednotlivé prúdy a úprave dostaneme:

$$I = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2} = \frac{U}{Z}$$

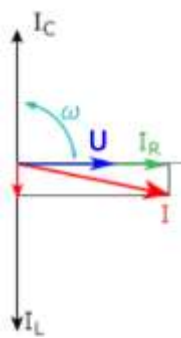
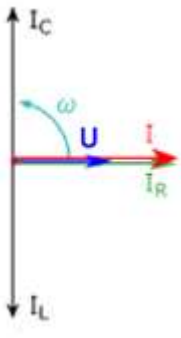
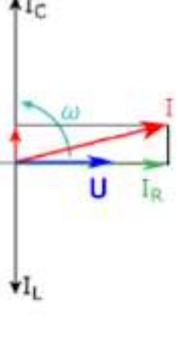
Fázový posun v obvode dostaneme napr. z komplexnej admitancie:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = \text{Re}(\omega) + j \cdot \text{Im}(\omega)$$

odkiaľ

$$\varphi = \text{arctg} \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)} = \text{arctg} \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{1/R} = \text{arctg} \frac{I_C - I_L}{I_R}$$

Tab. 3 Vektorové diagramy paralelného RLC obvodu pri rôznej frekvencii napájacieho napätia

Frekvencia napájacieho napätia	nižšia, ako rezonančná $\omega < \omega_0$	rovnaká, ako rezonančná $\omega = \omega_0$	vyššia ako rezonančná $\omega > \omega_0$
Impedancia	$ X_L  <  X_C $	$ X_L  =  X_C $	$ X_L  >  X_C $
Amplitúda prúdu	$ I_L  >  I_C $	$ I_L  =  I_C $	$ I_L  <  I_C $
Vektorový diagram			
Charakter obvodu	induktívny $\varphi < 0$	odporový $\varphi = 0$	kapacitný $\varphi > 0$

## 2.2 Rezonancia v paralelnom RLC obvode

Admitancia obvodu je:

$$Y(s) = \frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC$$

pre  $s = j\omega$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Pri rezonancii je imaginárna časť rovná nule, odkiaľ rezonančná frekvencia je:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Impedanciu obvodu dostaneme z prevrátenej hodnoty admitancie:

$$Z(j\omega) = \frac{1}{Y(j\omega)} = \frac{j\omega LC}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega \frac{L}{R}}$$

K prúdovej rezonancii dochádza iba vtedy, ak obvod je napájaný z prúdového zdroja. Pri napájaní paralelného RLC obvodu zo zdroja napätia nedochádza k žiadnemu efektu akumulácie energie. Pri rezonancii je impedancia (odpor) obvodu najväčšia:  $Z(j\omega_0) = R$  a preto pri rezonancii tečie paralelným RLC obvodom najmenší prúd.

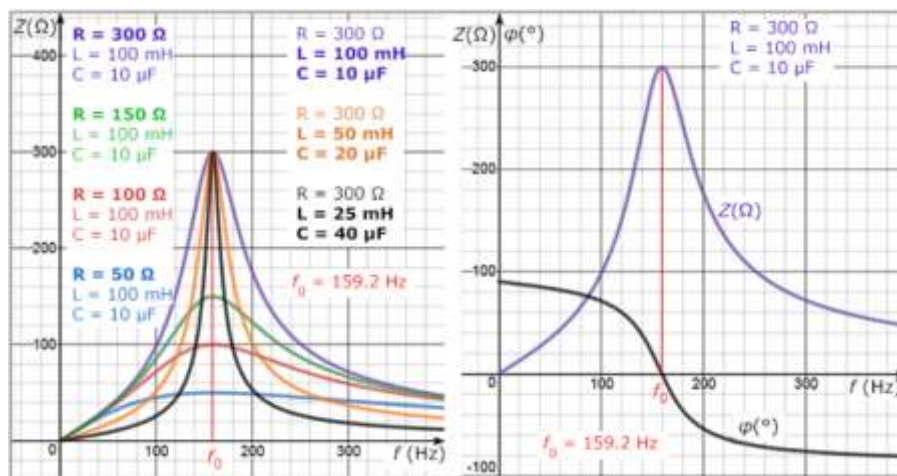
Pri paralelnom RLC obvode je činiteľ kvality definovaný podobne ako pri sériovom RLC obvode:

$$Q = \frac{2}{d} = R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 RC$$

Voči sériovému obvodu však v tomto prípade ide o prevrátené hodnoty zlomkov.

Činiteľ akosti  $Q$  paralelného obvodu je tým vyšší, čím vyššia je hodnota odporu v obvode. Závislosť od veľkosti odporu  $R$  a kapacity  $C$  je uvedená na grafe. Čím nižšia je paralelná rezistencia, tým viac bude vplývať na tlmenia obvodu a teda tým menšia bude hodnota činiteľa kvality rezonančného obvodu  $Q$ . Pre rýchly výpočet parametrov obvodu pozri kalkulátor<sup>4</sup>.

Frekvenčná závislosť hodnoty impedancie paralelného rezonančného obvodu :



<sup>4</sup> Parallel RLC Circuit Impedance Calculator, <https://www.translatorscafe.com/unit-converter/en-US/calculator/parallel-rlc-impedance/?R=inf&Ru=ohm&L=1&Lu=mH&C=0&Cu=mcF&f=1&fu=kHz>



## Odporúčaná literatúra

- [1] Circuit analysis | Electrical engineering | Science | Khan Academy:  
<https://www.khanacademy.org/science/electrical-engineering/ee-circuit-analysis-topic>
- [2] Series Resonance,  
[https://eng.libretexts.org/Bookshelves/Electrical\\_Engineering/Electronics/Book%3A\\_AC\\_Electrical\\_Circuit\\_Analysis%3A\\_A\\_Practical\\_Approach\\_\(Fiore\)/08%3A\\_Resonance/8.2%3A\\_Series\\_Resonance](https://eng.libretexts.org/Bookshelves/Electrical_Engineering/Electronics/Book%3A_AC_Electrical_Circuit_Analysis%3A_A_Practical_Approach_(Fiore)/08%3A_Resonance/8.2%3A_Series_Resonance)
- [3] Resonant Circuits,  
<http://rsdacademy.net/textbooks/acelectronics/Part2/ResonantCircuits.html>
- [4] Resonance in Series-Parallel Circuits,  
<https://www.allaboutcircuits.com/textbook/alternating-current/chpt-6/resonance-series-parallel-circuits/>