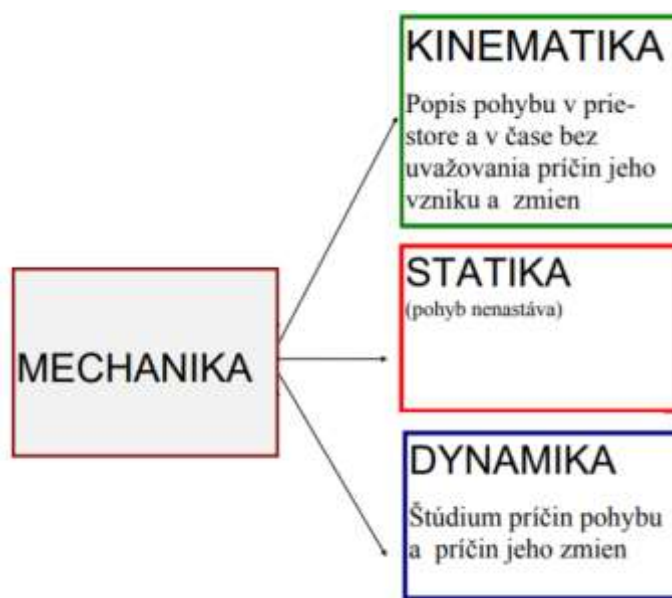


Pr. 6.1 Translačný viachmotnostný mechanický systém výpočet prenosovej funkcie

Mechanika – rozdelenie

Predmetom skúmania mechaniky (ďalej iba mechaniky) mechanický pohyb telies, jeho popis v priestore a v čase. Jednotlivé časti mechaniky sú nasledovné:



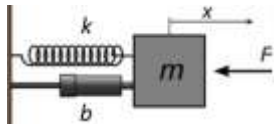
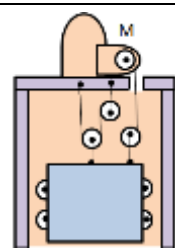
Statika (z gréckeho **statos** – **rovnováha**) sa zaoberá skúmaním takých prípadov pohybu, pri ktorých sú **sily pôsobiace na skúmané teleso v rovnováhe**. Základné pojmy sú priestor a sila.

Kinematika (z gréckeho **kineo** – **pohybuje sa**) sa zaoberá opisom časového priebehu pohybu telies bez ohľadu na sily, ktoré tento pohyb vyvolali. **Pohyb sa sleduje iba po geometrickej stránke**, nezávisle od jeho príčin (síl). Preto sa pre kinematiku používa aj názov geometria pohybu. Základné pojmy sú priestor a čas.

Dynamika (z gréckeho **dynamis** – **sila**) sa zaoberá **pohybom telies pri pôsobení síl**. Základné pojmy sú priestor, čas, hmota (hmotnosť) a sily.

Z hľadiska elektrických pohonov je dôležité zaoberať sa predovšetkým dynamikou hmotných bodov a telies. Pracovný mechanizmus je poháňaný elektrickým motorom a na základe jeho momentu je potrebné určiť dynamiku pôsobenia motora na rýchlosť a polohu pracovného mechanizmu. Z toho dôvodu sa budeme zaoberať zostavením prenosových funkcií a dynamických modelov mechanických častí.

Mechanické obvody rozdeľujeme na:

translačné (posuvné)	rotačné (otáčavé)	zmiešané (napr. výt'ahy)
		

1. Translačný mechanický systém

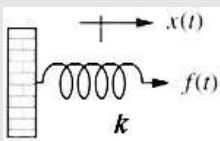
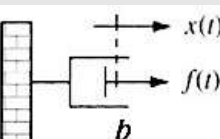
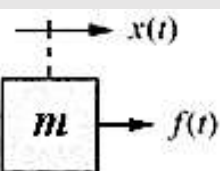
1.1. Prenosová funkcia translačného mechanického systému s jedným stupňom voľnosti

Translačné (tiež posuvné) mechanické systémy pozostávajú, podobne ako elektrické, z troch základných druhov pasívnych prvkov: pružina s koeficientom tuhosti k , viskózný tlmič s koeficientom viskózneho tlmenia b a teleso s hmotnosťou m . Ako budiaci signál (vstupná veličina) tu vystupuje sila $f(t)$. Pružina a hmota pritom predstavuje zásobník energie, v tlmiči sa, naopak, energia stráca. Vlastnosti prvkov, vyjadrené matematicky, sú uvedené v tabuľke.

Medzi polohou telesa a rýchlosťou jeho pohybu platí:

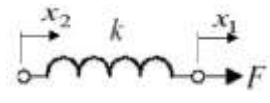
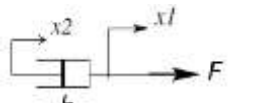
$$x(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$$

Prehľad základných prvkov translačného mechanického obvodu a príslušné prenosové funkcie:

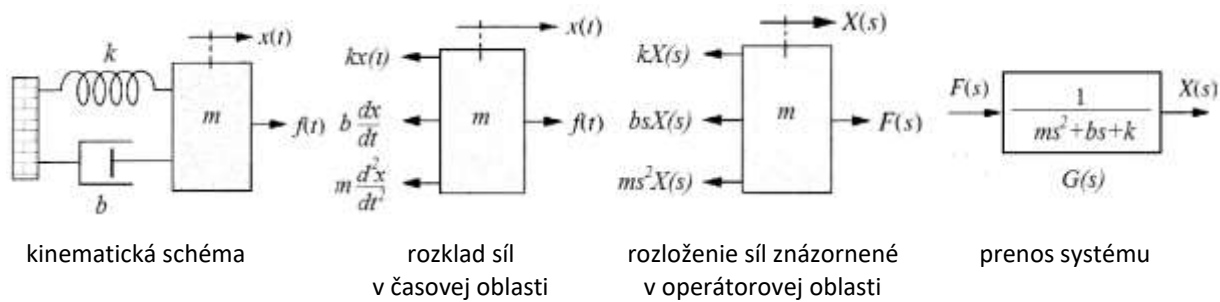
Prvok obvodu	Sila-rýchlosť	Sila-dráha	Mechanická impedancia $Z_M(s) = \frac{F(s)}{X(s)}$
Pružina 	$f(t) = k \int_0^t v(\tau) d\tau$	$f_k(t) = k x(t)$	$Z_{Mk}(s) = k$
Tlmič (viskózný) 	$f(t) = b v(t)$	$f_b(t) = b \frac{dx(t)}{dt}$	$Z_{Mb}(s) = bs$
Hmota 	$f(t) = m \frac{dv(t)}{dt}$	$f_m(t) = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}$	$Z_{Mm}(s) = ms^2$

Animácia: Simple Harmonic Motion: Mass on a Spring, <https://ophysics.com/w1.html>

V prípade, ak oba konce pružiny (tlmiča) sa pohybujú, potom sila je:

	$F = k(x_1 - x_2)$		$F = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$
---	--------------------	--	--------------------------------

Nájďme **prenosovú funkciu** najjednoduchšieho mechanického obvodu, kde teleso o hmotnosti **m** je upevnené na pružine a tlmiči. Ide o teleso s **jedným stupňom voľnosti (1 DOF)**:



Odporúčaná literatúra

[Forced vibration of damped, single degree of freedom, linear spring mass systems.](#)

Pri riešení rozkreslíme sily pôsobiace na teleso a pomocou Newtonovho zákona:

$$f_m(t) = m a(t) = m \frac{dv(t)}{dt} = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

napišeme rovnicu rovnováhy síl (pohybovú rovnicu):

$$f_m(t) + f_b(t) + f_k(t) = f(t)$$

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t)$$

čo v Laplaceovej transformácii má tvar:

$$ms^2X(s) + bsX(s) + kX(s) = F(s)$$

Jednotlivé zložky v rovnici (0.25) predstavujú sily od hmotnosti, tlmiča a pružiny:

$$F_m(s) = ms^2 X(s)$$

$$F_b(s) = bs X(s)$$

$$F_c(s) = k X(s)$$

Takto dostávame ekvivalentné „mechanické impedancie“:

pre hmotnosť
 $Z_{Mm}(s) = ms^2$

pre tlmič
 $Z_{Mb}(s) = bs$

pre pružinu
 $Z_{Mc}(s) = k$

Index „M“ v impedancii zvýrazňuje, že ide o tzv. „**mechanickú impedanciu**“ (tento výraz sa bežne nepoužíva). Výsledná mechanická impedancia **$Z_M(s)$** telesa je daná súčtom:

$$Z_M(s) = Z_{Mm}(s) + Z_{Mb}(s) + Z_{Mc}(s) = ms^2 + bs + k$$

takže sumu síl pôsobiacich na teleso môžeme vyjadriť pomocou mechanickej impedancie telesa a jeho dráhy:

$$Z_M(s) X(s) = F(s)$$

čo slovami zapíšeme:

$$(suma impedancií telesa).X(s) = suma budiacich síl$$

Ak vstupom je sila $F(s)$, výstupom dráha telesa $X(s)$, potom prenosová funkcia systému $G(s)$ je:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Z_M(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{1/k}{\frac{m}{k}s^2 + \frac{b}{k}s + 1}$$

Výsledný prenos systému medzi dráhou a budiacou silou je analogický prenosu sériového RLC obvodu s výstupom napätia na svorkách kondenzátora:

$$G_x(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1/k}{\frac{m}{k}s^2 + \frac{b}{k}s + 1} \qquad F_C(s) = \frac{U_C(s)}{U(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Porovnaním menovateľa so štandardným tvarom:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2}s^2 + \frac{2d}{\omega_0}s + 1}$$

dostávame pre daný mechanický systém parametre ω_0, d :

$$\frac{m}{k} = 1/\omega_0^2 \quad \text{t.j.} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{b}{k} = \frac{2d}{\omega_0} \quad \text{t.j.} \quad d = \frac{b}{2} \frac{1}{\sqrt{mk}}$$

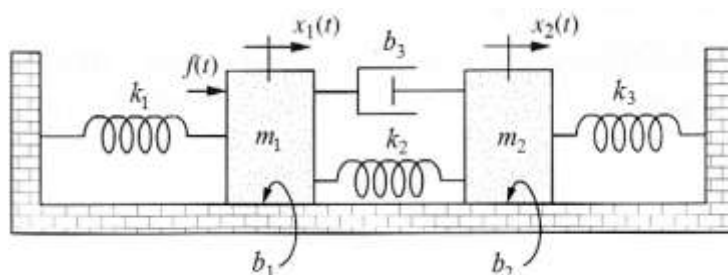
1.2. Prenosová funkcia translačného mechanického systému s viacerými stupňami voľnosti

(viachmotnostný systém = multimass system)

Google: „[Mass-Spring Damper System animation](#)“, „[multi-mass spring damper system](#)“

Počet stupňov voľnosti telesa je určený súčtom možných pohybov každého telesa, ak ostatné telesá sú v pokoji. Počet stupňov voľnosti je rovný počtu nezávislých diferenciálnych rovníc, ktoré vieme zostaviť pre mechanický systém.

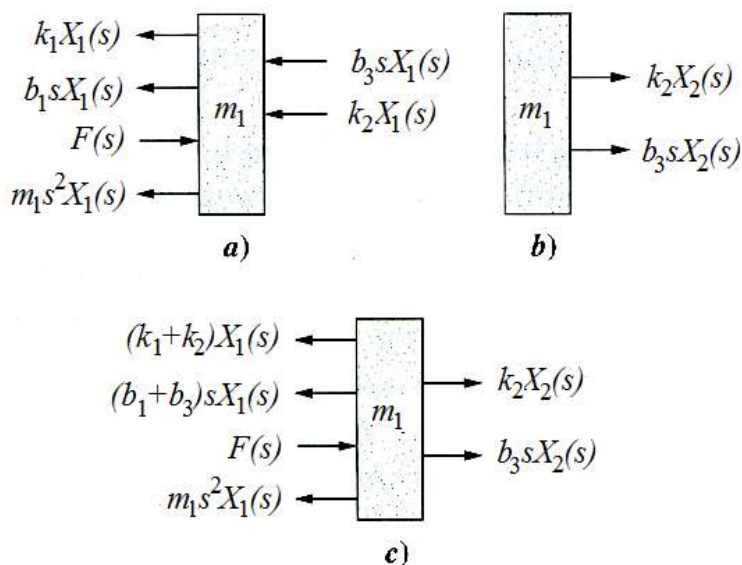
Zovšeobecňujeme vyššie uvedené pre zložitejší mechanický systém s dvoma stupňami voľnosti.



Pre zistenie vplyvu jednotlivých síl v systéme použijeme metódu uvoľnenia - osamotníme každé teleso a nakreslíme na ňu pôsobiace sily (sílový diagram).

Sily pôsobiace na prvé teleso:

- Prvé teleso sa pohybuje, druhé stojí (obr. a)
(sily pôsobiace vlastné teleso v dôsledku jeho pohybu)
- Prvé teleso stojí, druhé sa pohybuje (obr. b)
(sily pôsobiace na vlastného teleso v dôsledku pohybu susedného telesa)
- Všetky sily pôsobiace na prvé teleso (obr. c)

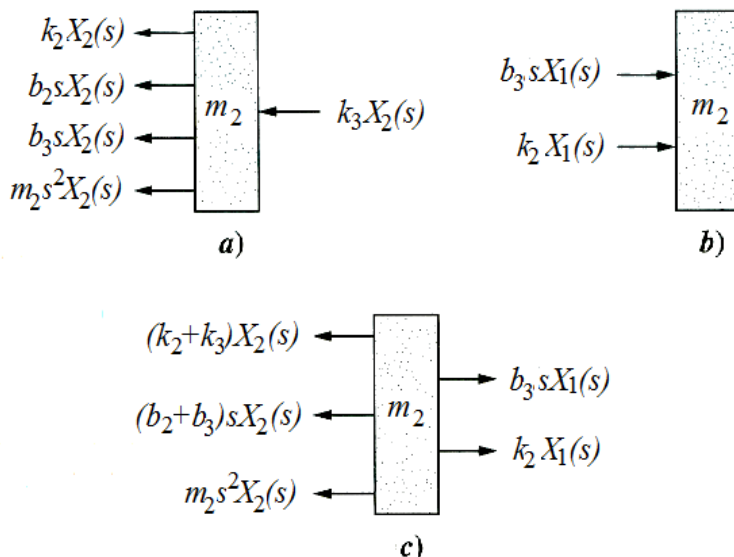


Z rozkladu síl zostavíme **pohybovú rovnicu telesa** v Laplaceovej transformácii:

$$[m_1 s^2 + (b_1 + b_3)s + (k_1 + k_2)]X_1(s) - (b_3 s + k_2)X_2(s) = F(s)$$

Sily pôsobiace na druhé teleso:

- Prvé teleso stojí, druhé sa pohybuje
(sily pôsobiace vlastné teleso v dôsledku jeho pohybu)
- Druhé teleso stojí, prvé sa pohybuje
(sily pôsobiace na vlastného teleso v dôsledku pohybu susedného telesa)
- Všetky sily pôsobiace na druhé teleso



$$- (b_3 s + k_2) X_1(s) + [m_2 s^2 + (b_2 + b_3) s + (k_2 + k_3)] X_2(s) = 0$$

V týchto dvoch rovniciach sú neznámymi dráhy telies $X_1(s)$ a $X_2(s)$.

Rovnice môžeme, analogicky k rovniciam elektrického obvodu, zapísať slovne:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} \text{Suma impedancií} \\ \text{pripojených} \\ \text{k telesu 1} \end{array} \right] X_1(s) - \left[\begin{array}{c} \text{Suma impedancií} \\ \text{medzi} \\ \text{telesami 1 a 2} \end{array} \right] X_2(s) = \left[\begin{array}{c} \text{Suma síl} \\ \text{pôsobiacich} \\ \text{na teleso 1} \end{array} \right] \\ & - \left[\begin{array}{c} \text{Suma impedancií} \\ \text{medzi} \\ \text{telesami 1 a 2} \end{array} \right] X_1(s) + \left[\begin{array}{c} \text{Suma impedancií} \\ \text{pripojených} \\ \text{k telesu 2} \end{array} \right] X_2(s) = \left[\begin{array}{c} \text{Suma síl} \\ \text{pôsobiacich} \\ \text{na teleso 2} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Maticový zápis týchto rovníc je nasledovný:

$$\begin{bmatrix} m_1 s^2 + (b_1 + b_3) s + (k_1 + k_2) & -(b_3 s + k_2) \\ -(b_3 s + k_2) & m_2 s^2 + (b_2 + b_3) s + (k_2 + k_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}(s) = \mathbf{f}(s)$$

kde $\mathbf{M}$ je matica mechanických impedancií, $\mathbf{x}(s)$ je vektor neznámych posunutí (dráh) telies a $\mathbf{f}(s)$ je vektor síl pôsobiacich na jednotlivé telesá.

Maticovú rovnicu vyriešime niektorou z metód riešenia lineárnych rovníc:

- 1) pomocou Cramerovho pravidla,
- 2) pomocou inverznej matice alebo
- 3) dosadzovaním.

Cramerovo pravidlo:

$$X_1(s) = \frac{\det \begin{bmatrix} \textcolor{red}{F(s)} & -(b_3s + k_2) \\ 0 & m_2s^2 + (b_2 + b_3)s + (k_2 + k_3) \end{bmatrix}}{\det M}$$

$$X_2(s) = \frac{\det \begin{bmatrix} m_1s^2 + (b_1 + b_3)s + (k_1 + k_3) & \textcolor{red}{F(s)} \\ -(b_3s + k_2) & 0 \end{bmatrix}}{\det M}$$

Pre vyriešenie maticovej rovnice výhodou využijeme symbolický počet v MATLAbE (v matici mechanických impedancií sa nachádzajú mocniny operátora s a preto numerické riešenie nie je možné).

Prenosové funkciu dostaneme vydelením dráhy silou: $G_1(s) = \frac{X_1(s)}{F(s)}$, $G_2(s) = \frac{X_2(s)}{F(s)}$

Ak je známy prenos medzi pôsobiacou silou $F(s)$ a polohou telesa $X(s)$, potom môžeme vypočítať prenos medzi silou a rýchlosťou telesa:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \qquad V(s) = \frac{1}{s} X(s)$$

potom ľahko môžeme určiť prenos medzi silou a rýchlosťou telesa:

$$G_v(s) = \frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{s} \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s} G_x(s)$$

Maticovú rovnicu:

$$\begin{bmatrix} m_1s^2 + (b_1 + b_3)s + (k_1 + k_2) & -(b_3s + k_2) \\ -(b_3s + k_2) & m_2s^2 + (b_2 + b_3)s + (k_2 + k_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

môžeme zapísať nasledovne (tu zapíšeme bez argumentu s):

$$s^2 \begin{bmatrix} \textcolor{red}{m_1} & 0 \\ 0 & \textcolor{red}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \textcolor{blue}{b_1} + \textcolor{blue}{b_3} & -\textcolor{blue}{b_3} \\ -\textcolor{blue}{b_3} & \textcolor{blue}{b_2} + \textcolor{blue}{b_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \textcolor{green}{k_1} + \textcolor{green}{k_2} & -\textcolor{green}{k_2} \\ -\textcolor{green}{k_2} & \textcolor{green}{k_2} + \textcolor{green}{k_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

Je to vlastne maticová diferenciálna rovnica II. rádu v tvare:

$$(\textcolor{red}{M}s^2 + \textcolor{blue}{B}s + \textcolor{green}{K}) \mathbf{x}(s) = \mathbf{f}(s)$$

kde $\mathbf{M}$ – predstavuje maticu obsahujúcu hmotnosti systému

$\mathbf{B}$ – matica tlmení (tlmiacich členov) systému

$\mathbf{K}$ – matica pružností (pružných členov) systému

$\mathbf{x}(s)$ – vektor neznámych posunutí systému

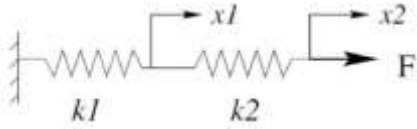
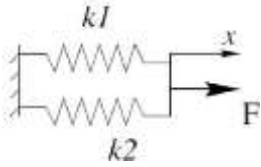
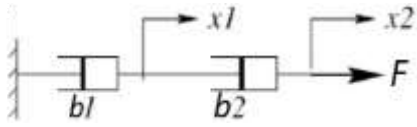
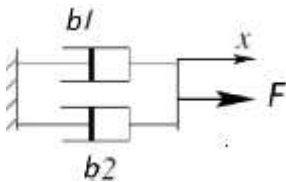
$\mathbf{f}(s)$ – vektor síl pôsobiacich na jednotlivé telesá

Pre uvedenú DR II. rádu existujú štandardné metódy jej riešenia, čím možno zautomatizovať a zovšeobecniť analýzu lineárnych systémov.

Animácie: Mass-Spring System, <https://www.math24.net/mass-spring-system/>
Two-mass spring system animation, <https://www.geogebra.org/m/Jpp4QnRX>

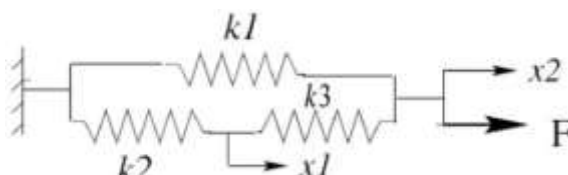
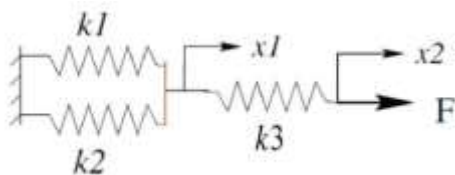
1.3. Sériové a paralelné zapojenie tlmičov a pružín

Dve pružiny môžu byť zapojené:

do série	paralelne
	
$k_1 x_1 = k_2 x_2 = F$ $x_1 = \frac{F}{k_1} \quad x_2 = \frac{F}{k_2} \quad F = k_{eq} x$ $x = x_1 + x_2 \Rightarrow \frac{F}{k_{eq}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$ $k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$	$k_1 x + k_2 x = F$ $(k_1 + k_2) x = F$ $k_{eq} x = F$ $k_{eq} = k_1 + k_2$
 $b_{eq} = \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2}$	 $b_{eq} = b_1 + b_2$

Pozn. Výsledné vzťahy sú analogické sériovému a paralelnému zapojeniu kondenzátorov.

Príklady: vyriešte ekvivalentnú tuhosť pružiny pre nasledovné zapojenia:



Niektoré príklady riešenia viachmotnostných systémov s pružným spojením na internete:

- **System Dynamics and Control: Module 4 - Modeling Mechanical Systems**
<https://www.youtube.com/watch?v=MN3RJWcJKnk&t=2s>
- **Dynamics and Control: Module 4b - Modeling Mechanical Systems Examples**
<https://www.youtube.com/watch?v=9ipdIWxBLNw>
- **Problem on Mechanical Translational System Including Friction**
<https://www.youtube.com/watch?v=UX8TeVdinOw>