Pr.7 LOGARITMICKÉ FREKVENČNÉ CHARAKTERISTIKY

1 Asymptotické logaritmické frekvenčné charakteristiky lineárnych sústav

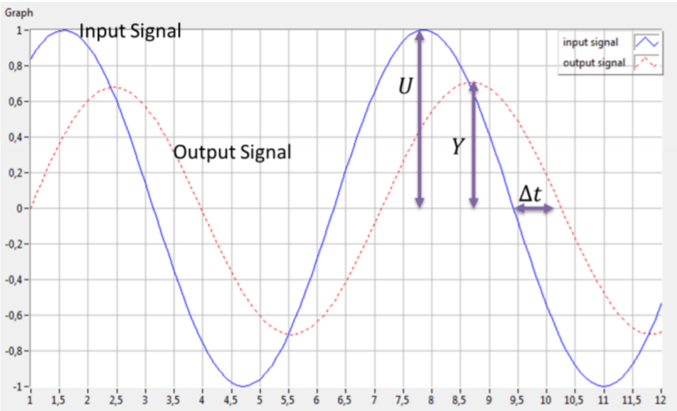
1.1 Čo vyjadruje frekvenčná charakteristika?

Sústava zadaná prenosovou funkciou:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Na sústavu privádzame harmonický signál $u(t) = U \sin \omega t$. Nech amplitúda $U = 1$.

Výstupný signál je: $y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi)$



Zosilnenie:

$$A(\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)} = \frac{Y}{U}$$

Fázu vieme určiť z časového priebehu nasledovne: $\varphi = -\omega.\Delta t$

kde Δt – časové oneskorenie – na priebehu od $u(t)$ po $y(t)$.

1.2 Komplexná (Nyquistova) frekvenčná charakteristika (KFCh)

Z frekvenčného prenosu pre s=jω … $F(j\omega)$ určíme reálnu a imaginárnu časť

$$\mathrm{Re}(\omega) = \mathrm{Re}[F(j\omega)] \quad \text{a} \quad \mathrm{Im}(\omega) = \mathrm{Im}[F(j\omega)]$$

odkiaľ je amplitúda $|F(j\omega)| = A(\omega) = \sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)}$

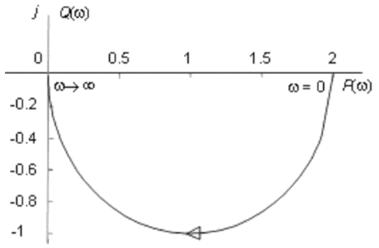
a fáza

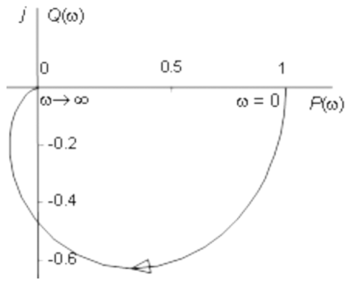
$$\varphi = arctg \frac{\mathrm{Im}(\omega)}{\mathrm{Re}(\omega)}$$

Pre sústavu I. rádu:

$$F(s) = \frac{K}{1+sT}; \qquad s = j\omega; \qquad F(j) = \frac{K}{1+j\omega T} \cdot \frac{1-j\omega T}{1-j\omega T} = \frac{K}{1+\omega^2 T^2} - j\frac{K\omega T}{1+\omega^2 T^2}$$

Po zobrazení v komplexnej rovine dostávame Nyquistovu komplexnú frekvenčnú charakteristiku (pre I. a II. rád):





1.3 Logaritmická frekvenčná charakteristika (Bodeho) (LFCh)

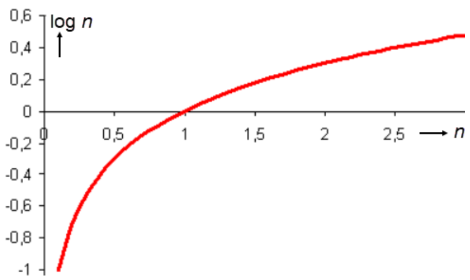
LFCh sa líši od charakteristiky v komplexnej rovine (Nyquist) tým, že nie je možné súčasne zobrazovať reálnu aj imaginárnu časť a teda nie je možné zobrazovať súčasne modul (amplitúdu) a argument (fázu) frekvenčného prenosu.

Preto dostávame dve charakteristiky – pre:

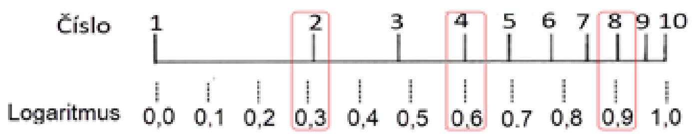
- fázu – fázovú (FLFCh) $\varphi(\omega)$
- modul (amplitúdu) – amplitúdovú (ALFCh) $A_{dB}(\omega) = |F(j\omega)|_{dB} = 20\log|F(j\omega)|$ [dB]

Charakteristika $|F(j\omega)|_{dB}$ je amplitúdová logaritmická frekvenčná charakteristika (ALFCh) a vo väčšine prípadov ide o postačujúcu charakteristiku:

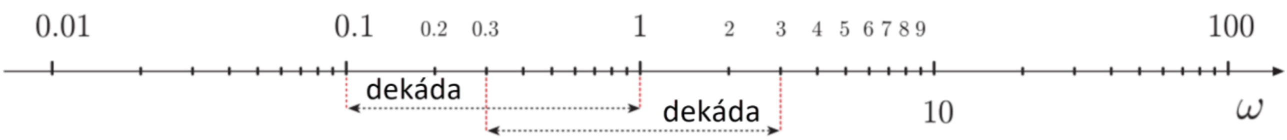
- Na os x sa vynášajú hodnoty kruhovej frekvencie ω (pozor, nie uhlovej!) v rad/s. Keďže radián je bezrozmernou mierou, v literatúre sa niekedy uvádza len jednotka s^{-1} (alebo 1/s). Vzťah medzi kruhovou frekvenciou a frekvenciou [Hz] je $\omega = 2\pi f$. Hodnoty ω sa vynášajú na logaritmickú stupnicu (v logaritmickej mierke) – ide o stupnicu, kde každá dekáda má rovnakú dĺžku. Označenie vodorovnej osi je log ω. Na logaritmickej stupnici sa nenachádza nula (ani záporné hodnoty)!



Logarigmická funkcia



Logaritmická stupnica

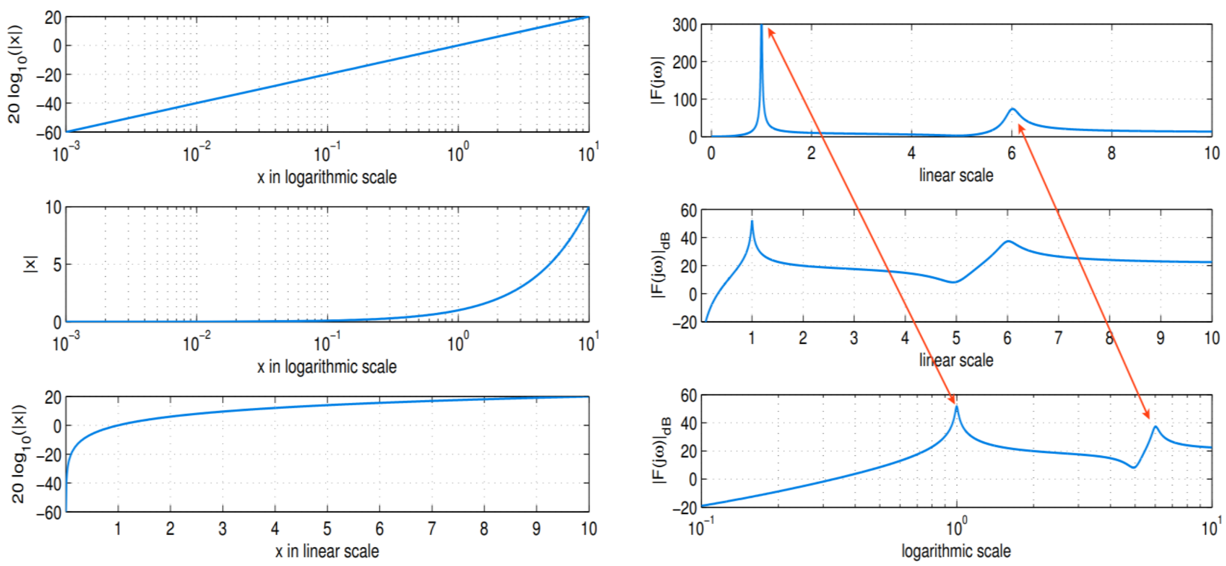


Výhoda zobrazovania frekvenčných charakteristík v logaritmickej mierke spočíva v tom, že takto možno zobraziť veľký rozsah ako frekvencií, tak i amplitúd.

- Na os *y* sa vynášajú hodnoty modulu $|F(j\omega)|$ v dB. Stupnica je v tomto prípade lineárna, logaritmická je len veličina: decibely [dB].
  Pre prevod hodnoty modulu $|\boldsymbol{F}(j\omega)|$ na hodnotu modulu v decibeloch $|\boldsymbol{F}(j\omega)|_{dB}$ platí:

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log |F(j\omega)|$$

Porovnajme zobrazenie frekvenčných charakteristík v rôznych mierkach na horizontálnej i zvislej osi:



Zobrazenie frekvenčných charakteristík v rôznych mierkach

Najprehľadnejšie zobrazenie FCh je v type grafu na obrázku vpravo dole [dB] ↔ log ω.

Hodnoty logaritmov

Os nezávisle premennej ω. má logaritmickú stupnicu (po dekádach)

x	log (x)
1	0,000
2	0,301
3	0,477
4	0,602
5	0,699
6	0,778
7	0,845
8	0,903
9	0,954
10	1,000

Pre vyššie hodnoty čísiel pridávame mantisu – napr. pre čísla > 100 je mantisa 2:

x	log (x)
log 100	2,000
log 200	2,301
log 300	2,477
log 400	2,602
log 500	2,699
log 600	2,778
log 700	2,845
log 800	2,903
log 900	2,954
log 1000	3,000

Základné pravidlá logaritmovania využívané pri výpočtoch ALFCh**:**

Logaritmus podielu (m>0, aj n>0):

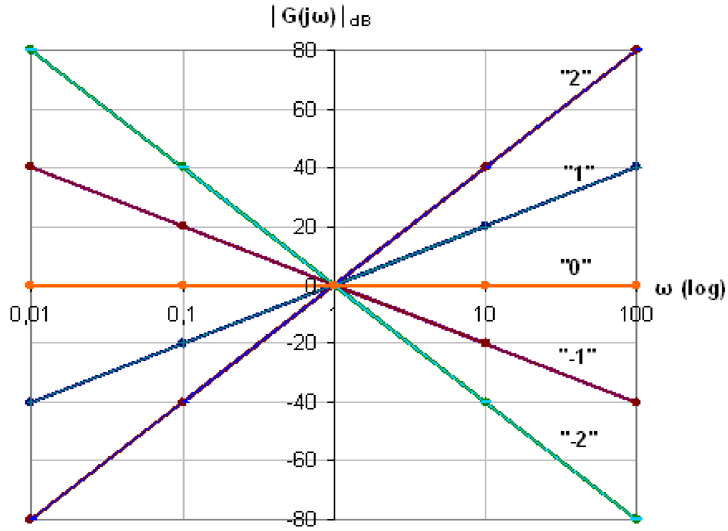
$$\log\frac{m}{n} = \log m - \log n$$

Logaritmus súčinu:

$$\log(m.n) = \log m + \log n$$

1.4 Všeobecná charakteristika priebehov ALFCh a FLFCh

V lineárnom systéme sa charakteristiky dajú aproximovať asymptótami s násobkami sklonov $\pm n$.20 dB/dek. Na obrázku sú znázornené možné sklony ALFCh.



Typy (sklony) logaritmických frekvenčných charakteristík

Priebeh FLFCh v závislosti od logaritmu kruhovej frekvencie určíme približne nasledovne:

Typ charakteristiky	Stúpanie/pokles ALFCh	Hodnota FLFCh konverguje ku:
+2	stúpa o 40 dB/dek	$\varphi = +180\,°$
+1	stúpa o 20 dB/dek	$\varphi = +90\,°$
0	je rovnobežná s osou ω	$\varphi = 0\,°$
-1	klesá o 20 dB/dek	$\varphi = -90\,°$
-2	klesá o 40 dB/dek	$\varphi = -180\,°$

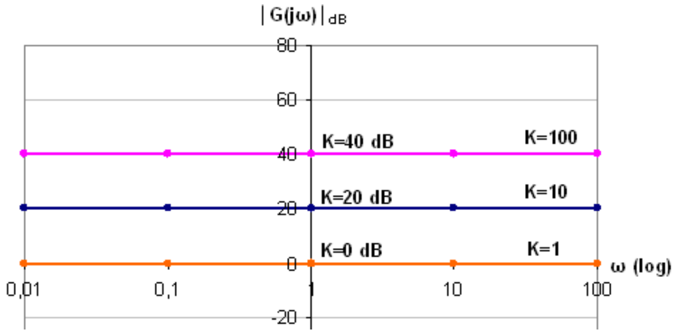
Pozn.: fázová logaritmická frekvenčná charakteristika má v mnohých prípadoch len doplnkový význam a pokiaľ nechceme niečo pomocou tejto charakteristiky zdôrazniť, tak sa spravidla ani nevynáša.

Pre väčšinu technických systémov (tzv. s neminimálnou fázou, t.j. s kladnou reálnou časťou zrýchľujúcich členov) sa fázová charakteristika dá jednoznačne určiť priamo z logaritmickej amplitúdovej charakteristiky. Je to možné preto, že v lineárnom systéme sa dajú charakteristiky aproximovať asymptotami s násobkami sklonov n . 20 dB/dek.

1.5 Bodeho diagramy základných dynamických členov

1.5.1 Proporcionálny člen (zosilnenie)

$F(s) = K$; $F(j\omega) = K$; $|F(j\omega)| = K$; $|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log K$



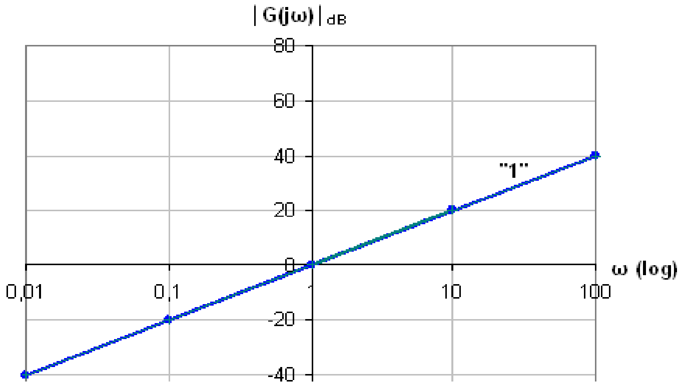
Logaritmická amplitúdová frekvenčná charakteristika proporcionálneho člena

1.5.2 Ideálny derivačný člen

$F(s) = s$; $F(j\omega) = j\omega$; $|F(j\omega)| = \omega$; $|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log \omega$

Zdrojové údaje pre ALFCh:

ω	0,01	0,1	1	10	100
$\lvert F(j\omega)\rvert_{dB}$	-40	-20	0	20	40



ALFCh derivačného člena

Z grafu vidno,

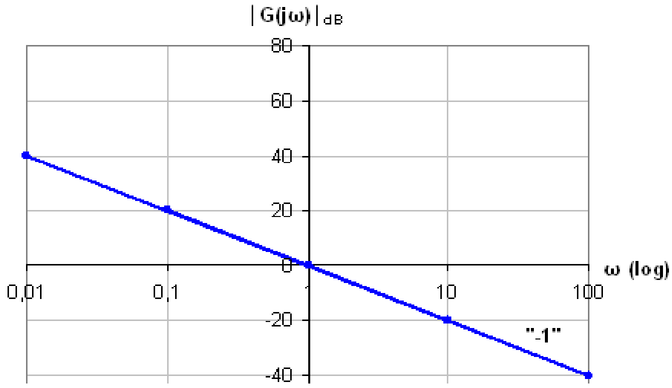
- že pri hodnotách menších ako 1 rad/s ide o zoslabovanie signálu,
- pri hodnotách väčších ako 1 rad/s ide o zosilňovanie.

1.5.3 Integračný člen

$F(s) = 1/s$; $F(j\omega) = 1/j\omega$; $|F(j\omega)| = 1/\omega$; $|F(j\omega)|_{dB} = 20\,(\log 1 - \log\omega) = -20\log\omega$

Zdrojové údaje pre ALFCh:

ω	0,01	0,1	1	10	100
$\lvert F(j\omega)\rvert_{dB}$	40	20	0	-20	-40



ALFCh integračného člena

Z uvedeného grafu je vidieť, že:

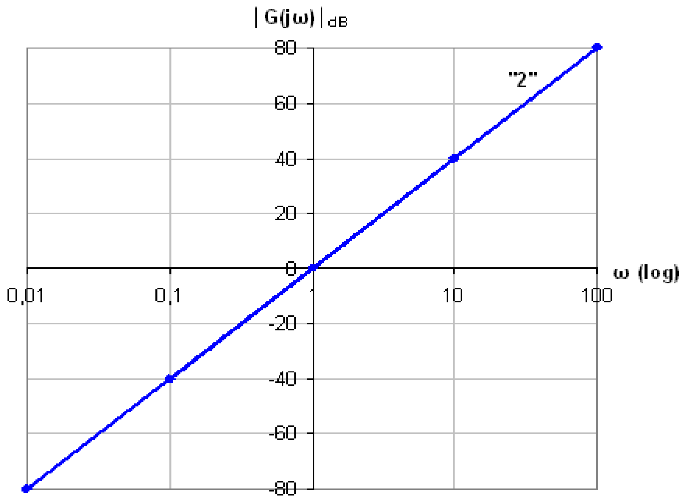
- pri hodnotách kruhovej frekvencie menších ako 1 rad/s ide v systéme s integračným prenosom ide o zosilňovanie signálu a
- pri hodnotách väčších ako 1 rad/s ide o zoslabovanie.

1.5.4 Derivačný člen 2. rádu

$F(s) = s^2$; $\boldsymbol{F(j\omega) = (j\omega)^2}$; $|\boldsymbol{F(j\omega)}| = \omega^2$; $|F(j\omega)|_{dB} = 20.\log\omega^2 = 20.(2.\log\omega) = 40.\log\omega$

Zdrojové údaje pre ALFCh:

ω	0,01	0,1	1	10	100
$\lvert F(j\omega)\rvert_{dB}$	-80	-40	0	40	80



Logaritmická amplitúdová frekvenčná charakteristika derivačného člena 2. rádu

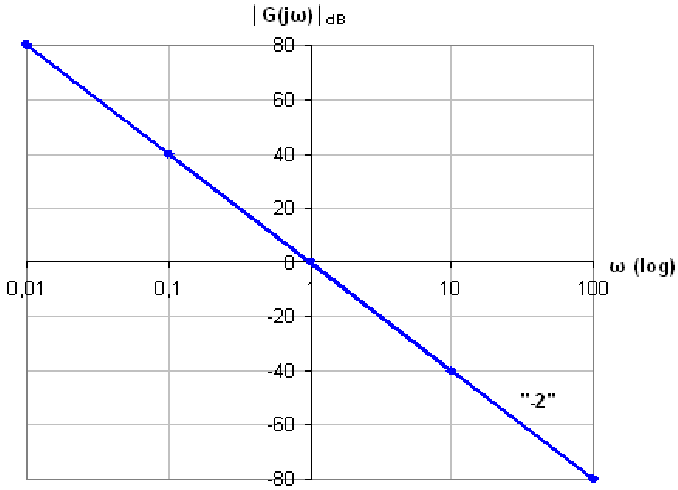
1.5.5 Integračný člen 2. rádu

$F(s) = \dfrac{1}{s^2}$ $F(j\omega) = \dfrac{1}{(j\omega)^2}$ $F(s) = \dfrac{1}{\omega^2}$

$$|F(j\omega)|dB = 20.\log(1/\omega^2) = 20(\log 1 - 2.\log\omega) = -40\log\omega$$

Zdrojové údaje pre ALFCh:

ω	0,01	0,1	1	10	100
$\lvert F(j\omega)\rvert_{dB}$	80	40	0	-40	-80



ALFCh integračného člena 2. rádu

1.5.6 Sústava 1. rádu (zotrvačný člen)

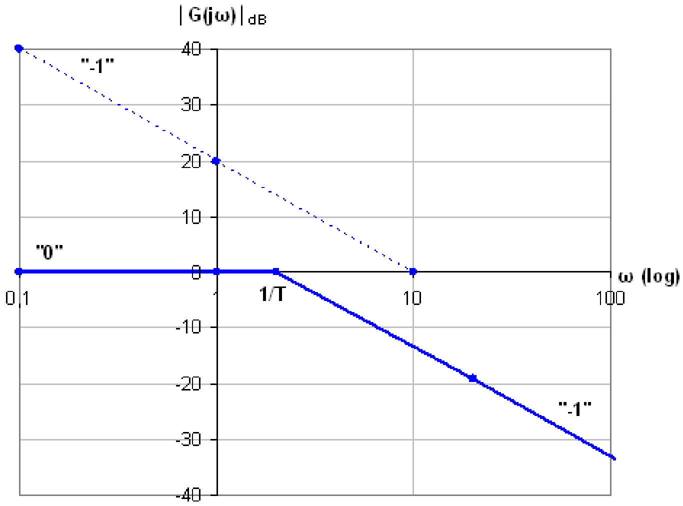
$F(s) = \dfrac{1}{sT+1}$ $F(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega T + 1}$ $|F(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + (T\omega)^2}}$

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20.\log 1 - 20.\log\sqrt{1^2 + (T\omega)^2} = 0 - 20.\log\sqrt{1^2 + (T\omega)^2}$$

Keďže pre takýto výraz nemôžme použiť vety o logaritmoch a nepoznáme hodnotu výrazu pod odmocninou, <u>charakteristiku určíme prostredníctvom asymptotického zobrazenia pre dve frekvenčné oblasti</u>:

- Pre $1 \gg (T\omega)^2$ bude $|F(j\omega)|_{dB} = 0 - 20.\log\sqrt{1^2} = 0$
  a teda logaritmická charakteristika pre túto časť bude typu „0“.
- Pre $1 \ll (T\omega)^2$ bude $|F(j\omega)|_{dB} = 0 - 20.\log\sqrt{(T\omega)^2} = -20.\log(T\omega)$
  a logaritmická charakteristika bude typu „-1“.

Charakteristika sa bude z typu „0“ meniť na typ „1“ vtedy, keď bude: $1 = (T\omega)^2$, po úprave $\omega = 1/T$, t.j. ω rozdeľuje frekvenčnú os na už uvedené dve oblasti a volá sa **frekvencia zlomu**.



ALFCh zotrvačného člena 1. rádu

Animácia sústavy I. rádu

Skutočná charakteristika sa k tejto charakteristike asymptoticky približuje. Pri frekvencii zlomu $\omega = 1/T$ chybu medzi skutočnou charakteristikou a jej asymptotickým priebehom vypočítame ak určíme hodnotu výrazu $|F(j\omega)|_{dB}$ pre frekvenciu zlomu: (miesto $T.\omega$ do vzťahu zapíšeme $T.1/T$)

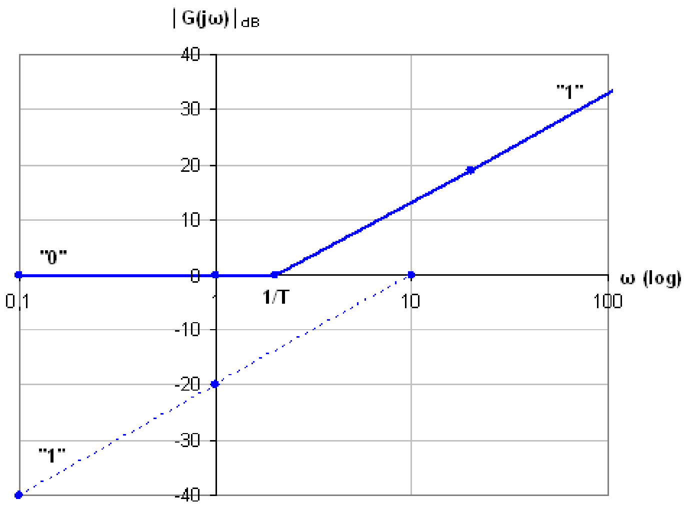
$$|F(j\omega)|_{dB} = -20.\log\sqrt{1 + (T.1/T)^2} = -20.\log\sqrt{2} = -3 \text{ dB}.$$

Je teda zrejmé, že skutočná hodnota charakteristiky v bode zlomu asymptot na frekvencii $\omega = 1/T$ je o 3 dB nižšie, čo je z technického hľadiska zanedbateľná hodnota.

1.5.7 PD prenos 1. rádu (zrýchľujúci člen)

$F(s) = sT + 1$; $F(j\omega) = j\omega T+1$; $|F(j\omega)| = \sqrt{1^2 + (T\omega)^2}$ $|F(j\omega)|_{dB} = 20.\log\sqrt{1^2 + (T\omega)^2}$

Ostatné urobíme analogicky ako pri zotrvačnom členu, teda určíme frekvenciu zlomu a rozdelíme frekvenčnú oblasť na dve časti, ktoré teraz určujú asymptoty so sklonmi „0“ a „+1“, v bode zlomu je skutočná charakteristika posunutá o 3 dB vyššie.



ALFCh pre zrýchľujúci (PD) člen 1. rádu

Animácia PD sústavy I. rádu

1.5.8 Kmitavá sústava II. rádu

a) Sústava II. rádu s komplexne združenými koreňmi

Pri sústave II. rádu s komplexne združenými koreňmi so štandardným prenosom:

$$F(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2}s^2 + \frac{2d}{\omega_0}s + 1} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2}$$

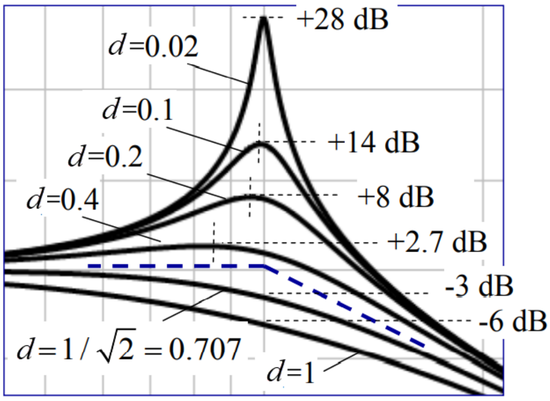
na priebehu na ALFCh pri rezonančnej frekvencii $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-d^2}$ (čo je imaginárna časť koreňa) dochádza k rezonančnému prevýšeniu.

Možno odvodiť, že prevýšenie charakteristiky pri tejto frekvencii je rovné:

$$\left|F(j\omega_p)\right| = \frac{1}{2d} \quad \Rightarrow \quad -20\log(2d) \quad [\mathrm{dB}]$$

V závislosti od činiteľa tlmenia táto hodnota môže byť kladná alebo záporná (teda či 2d je väčšie alebo menšie ako 1). Pre hodnotu $d = 0{,}5$ je nulová pretože: $20\log(2d) = 20\log 1 = 0$ dB

Pre rôzne tlmenie d možno takto odvodiť rôzne hodnoty prevýšenia:



d	$\lvert G(j\omega_0)\rvert$	ω_p / ω_0	$\lvert G(j\omega_p)\rvert$
0.02	+28 dB	~1	+28 dB
0.05	+20 dB	0.997	+20 dB
0.1	+14 dB	0.990	+14dB
0.2	+8 dB	0.959	+8.1 dB
0.4	+1.9 dB	0.825	+2.7dB
0.5	0 dB	0.707	+1.3 dB
0.707	-3 dB	0	0 dB
1	-6 dB	—	—

Priebeh ALFCh v okolí rezonančnej frekvencie v závislosti od činiteľa tlmenia d

Hodnota frekvencie pri maxime rezonančného prevýšenia ω_p pre rôzne tlmenie d nesúhlasí presne s kruhovou frekvenciou ω_0. Riešením charakteristickej rovnice štandardného prenosu:

$$\frac{1}{\omega_0^2}s^2 + \frac{2d}{\omega_0}s + 1 = 0$$

dostaneme korene: $s_{1,2} = -d\omega_0 \pm \mathrm{j}\,\omega_0\sqrt{1-d^2}$

Frekvencie kmitania ω_p, pri ktorej je maximum prekmitu, zodpovedá imaginárnej zložke:

$$\omega_p = \omega_0\sqrt{1-d^2}$$

Teda čím je koeficient tlmenia d väčší, tým je frekvencia kmitania menšia a maximum ALFCh sa v oblasti rezonančného prevýšenia posúva mierne doľava.

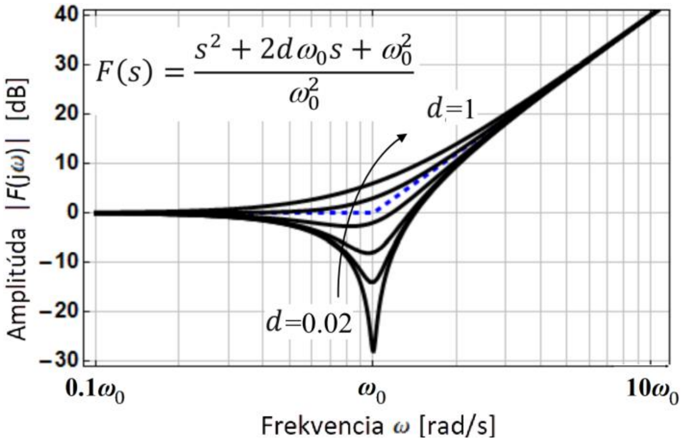
Animácia kmitavej sústavy II. rádu

b) Derivačná sústava s deriváciou II. rádu s komplexne združenými koreňmi

V prípade, ak prenosová funkcia má komplexne združenú dvojicu núl prenosu:

$$F(s) = \frac{s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2}{\omega_0^2}$$

potom dostávame nasledovnú ALFCh (inverzný graf voči predchádzajúcemu):



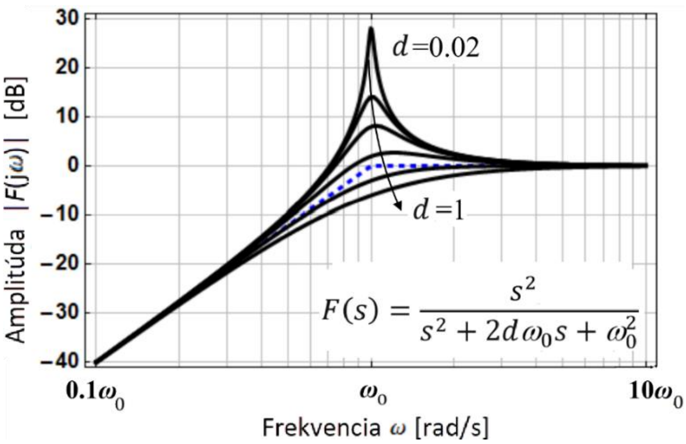
Priebeh ALFCh prenosovej funkcie $F(s) = \frac{s^2+2d\omega_0 s+\omega_0^2}{\omega_0^2}$

c) Derivačná sústava II. rádu s deriváciou II. rádu s komplexne združenými koreňmi

Podobne pre prenosovú funkciu v tvare:

$$F(s) = \frac{s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2}{s^2}$$

je ALFCh nasledovná:



Priebeh ALFCh prenosovej funkcie $\boldsymbol{F(s)} = \frac{s^2+2d\omega_0 s+\omega_0^2}{s^2}$

1.6 Logaritmické amplitúdové charakteristiky zložitejších prenosov

Príklad určenia logaritmickej amplitúdovej charakteristiky zložitého prenosu:

$$F(s) = \frac{sK}{Ts+1}$$

Tento prenos môžeme rozpísať na tvar:

$$F(s) = s.K \,.\, 1/(Ts+1)$$

Po takejto úprave výrazu sú zrejmé typové dynamické členy.

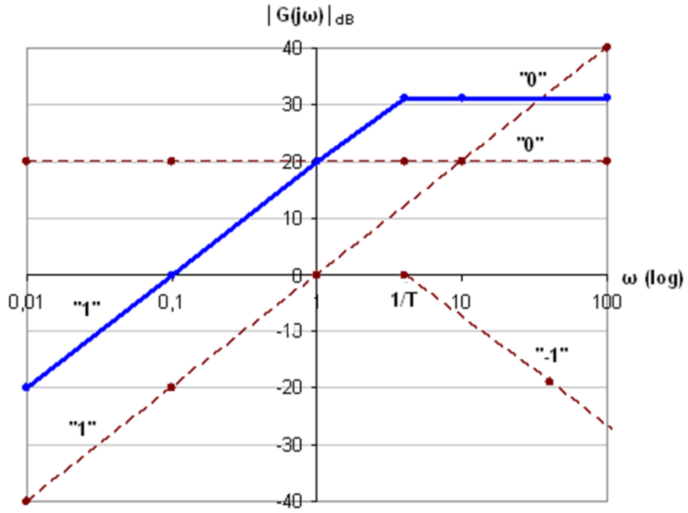
Prenos je zložený (1) z derivácie, (2) zo zosilnenia a (3) zo zotrvačnosti 1. rádu

$$|F(j\omega)|_{dB} = \text{derivačný člen} + \text{proporcionálny člen} + \text{zotrvačný člen}$$

Keď poznáme charakteristiku týchto členov, potom ho môžeme rozpísať na tvar:

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20.\log\omega + 20.\log K - 20.\log 1/\sqrt{1^2 + (T\omega)^2}$$

Nech $K = 10$, potom výsledná logaritmická frekvenčná charakteristika má tvar:



Logaritmická charakteristika prenosu $F(s) = \frac{sK}{Ts+1}$ pre $K = 10$, $T = 5$ s

Charakteristika pre prvú časť je zložená z charakteristiky derivačného člena so sklonom „1“ a z charakteristiky proporcionálneho člena so sklonom „0“. Výsledná charakteristika (asymptóta) má pre frekvencie väčšie ako 1/T sklon: „1“+„0“ = „1“. Charakteristika je posunutá vyššie kvôli K, o hodnotu $20.\log K$. To sa najlepšie vynesie tak, že charakteristika prechádza bodom K_{dB} nad kruhovou frekvenciou rovnou 1.

V druhej charakteristike zobrazíme asymptóty sústavy 1. rádu s jendotkovým zosilnením, kde od bodu $\omega = 1/T$ sa začne prejavovať aj zotrvačnosť (preto pokles -20 db/dek, čo zodpovedá typu charakteristiky „-1“).

Po zložení všetkých charakteristík výsledná charakteristika pre $\omega > 1/T$ bude mať sklon „1“ + „0“ + „-1“ = „0“.

1.6.1 Postup pri zostavovaní ALFCh z prenosovej funkcie

Prenos zložitých lineárnych systémov možno zapísať napríklad v tvare s vyjadrenými časovými konštantami:

$$\boldsymbol{F(s)} = \frac{\boldsymbol{Ks\,(1+T_1 s)}}{\boldsymbol{(1+T_2 s)\;(1+2dsT_3+T_3 s^2)}}$$

Presná amplitúdová logaritmická frekvenčná charakteristika je určená výrazom:

$|F(j\omega)|_{dB}$ = + 20.log $|j\omega K|$ + 20.log $|1+j\omega T_1|$ – 20.log $|(1+j\omega T_2)^2|$ – 20.log $|1+2dj\omega T_3+(j\omega T_3)^2|$

a fázová charakteristika :

$\varphi(\omega)$ = 0 + arctan (ωT_1) – 2 arctan ($1+\omega T_2$) – arctan [$1+2dj\omega T_3+(j\omega T_3)^2$]

Príklad:

Pri rýchlom zobrazení ALFCh pomocou asymptot postupujeme nasledovne.

Pre jednoduchosť a prehľadnosť označíme časové konštanty T_1, T_2 a T_3 v poradí od najväčších hodnôt po najmenšie:

$$T_1 > T_2 > T_3$$

Potom určíme frekvencie zlomu zodpovedajúce týmto konštantám:

$$\omega_{01} = 1/T_1,\;\; \omega_{02} = 1/T_2,\;\; \omega_{03} = 1/T_3$$

pre ktoré tak bude platiť, že sú zoradené od najmenších hodnôt frekvencií po najväčšie, teda $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$. Vieme, že na týchto uhlových frekvenciách nastáva zlom asymptot a teda môžeme zostrojiť asymptotickú amplitúdovú charakteristiku.

Začneme od najnižších frekvencií:

- prenos má jednonásobný pól v počiatku (s = 0; pretože čisté s v čitateli = derivácia signálu) a teda **prvá asymptota** bude mať sklon -20 dB/dek. Jej poloha je určená tým, že pre ω = 1 musí prechádzať bodom so súradnicou 20.log K alebo (čo dá to isté) pretína os 0 dB pri kruhovej frekvencii $\omega = K$.

  Pozn.:

  – ak prenos nemá pól v počiatku začína amplitúdová charakteristika asymptotou so sklonom 0 dB/dek posunutou o 20.log K, kde K je zosilnenie systému (statický systém).

  – V prípade nuly prenosu („čisté s“ v čitateli – integrácia), má prvá asymptota sklon „+1“.

  – Pri väčších mocninách „n“ núl či pólov prenosu sú sklony prvej asymptoty +/- „n“.

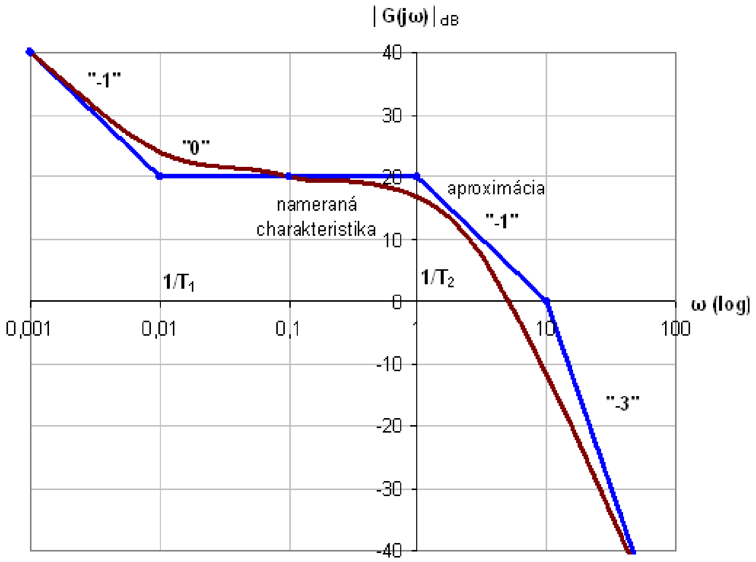
- **Prvá asymptota** prebieha od najnižších uhlových frekvencií $\boldsymbol{\omega}$ až do kruhovej frekvencie $\boldsymbol{\omega_1}$ = $1/T_1$ odpovedajúcej prvému členu ($1+\boldsymbol{\omega_1}T_1$) v čitateli.

- Pri kruhovej frekvencii $\omega = \omega_1$ nastáva **zlom asymptôt**. Nová asymptota má sklon o +20 dB/dek väčší ako predchádzajúca asymptota, teda výsledný sklon bude 0 dB/dek.

Pozn.: Vo všeobecnosti nová asymptota má sklon väčší alebo menší vždy o ± 20 dB/dek; podľa toho, či je príslušný člen $(1+j\omega T)$ v čitateli alebo v menovateli.

- Ak člen obsahuje dvojnásobný koreň, mení sa sklon asymptoty pri $\omega = 1/T$ o ± 40 dB/dek,
- Ak prenos obsahuje kvadratický člen $(1+2dj\omega T+(j\omega T)^2)$, mení sa sklon asymptoty pri kruhovej frekvencii zlomu $\omega = 1/T$ o ± 40 dB/dek.

Výsledný priebeh logaritmickej frekvenčnej charakteristiky získame vkreslením plynulej krivky do asymptót.



Amplitúdová logaritmická frekvenčná charakteristika prenosu $F(s) = \frac{K(1+T_1 s)}{(1+T_1 s)^2(1+2dsT_3+T_3 s)^2}$

Pozn.: vhodnejšie je pracovať v tzv. normalizovanom tvare:, t.j. zaviesť:

$$F(s) = \frac{K(1+T_1 s)}{s\,(1+T_2 s)\,(1+2dsT_3+s^2T_3^2)} = \frac{K\left(1+\frac{s}{\omega_{01}}\right)}{s\left(1+\frac{s}{\omega_{02}}\right)\left[1+2ds\frac{s}{\omega_{03}}+\left(\frac{s}{\omega_{03}}\right)^2\right]}$$

čím priamo v menovateli pre s dostávame hodnoty frekvencií zlomov charakteristiky. Výsledný priebeh logaritmickej frekvenčnej charakteristiky získame vkreslením plynulej krivky do asymptót.

1.7 Príklady na konštrukciu ALFCh

Príklad 1 na normalizáciu prenosu:

$$F(s) = \frac{5(s+2)}{(s+10)(s+100)} = 5\frac{2}{10.100}\frac{1+\frac{s}{2}}{(1+\frac{s}{10})(1+\frac{s}{100})} = 0{,}01\frac{1+\frac{s}{2}}{(1+\frac{s}{10})(1+\frac{s}{100})}$$

Zosilnenie sústavy je 0,01, čo zodpovedá amplitúde -40 dB.
Body zlomu sú: $\omega_{01} = 2$ rad/s, $\omega_{02} = 10$ rad/s, $\omega_{03} = 100$ rad/s.

Príklad 2: Nájsť asymptoty ALFCh pre prenos:

$$F(s) = \frac{10(s+10)}{s+1}$$

Upravíme na normalizovaný tvar:

$$F(s) = 10.\frac{100}{1}\,\frac{1+\dfrac{s}{100}}{1+\dfrac{s}{1}}$$

Rozložíme na jednotlivé časti:

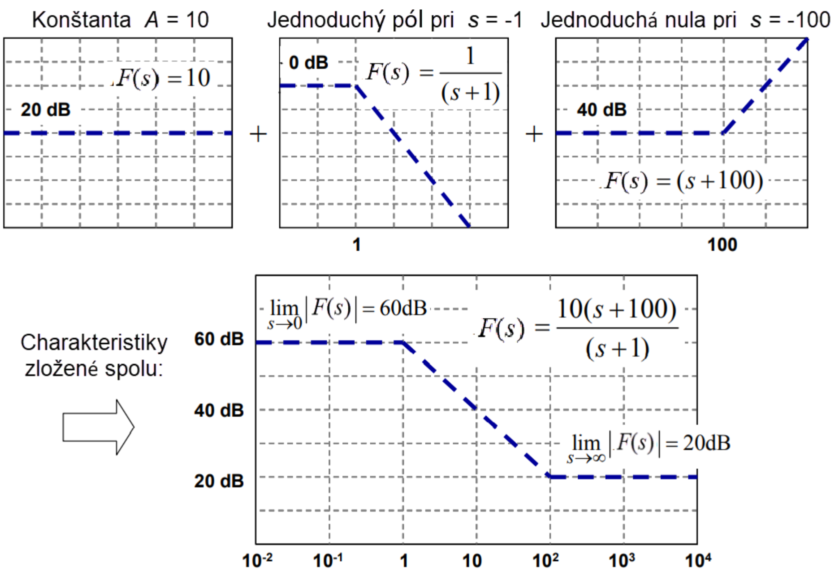
$$|F(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log(1\,000) + 20\log\left(1+\frac{s}{100}\right) + 20\log\left(\frac{1}{1+\frac{s}{1}}\right)$$

Frekvenčné odozvy dielčích podsystémov sú znázornené na obrázku Vo výslednej odozve sa priebeh zlomí smerom nadol v mieste pólu ($\omega = 1$), potom sa znova vyrovná, keď frekvencia dosiahne nulu prenosu ($\omega = 100$); zlom smerom dole spôsobný prvým pólom sa zruší zlomom nuly prenosu smerom nahor.

Pri nízkych frekvenciách (pre $\omega \to 0$) veľkosť prenosovej funkcie je konštanta predstavujúca súčet hodnôt (v dB) z nízkofrekvenčnej asymptóty každého jednotlivého člena:

$$20\log(1000) = +60 \text{ dB}.$$

V oblasti vysokých frekvencií ($s \to \infty$) sa prenosová funkcia v prenose blíži k limitnej hodnote 10 (~ 20 dB).



Skladanie výslednej ALFCh z charakteristík dielčích prenosov

Z tohto príkladu vyplývajú jednoduché pravidlá pre generovanie asymptót Bodeho grafov:

<u>pri postupe od nízkych frekvencií ku vysokým</u> pri narazení na pól nastáva pokles charakteristiky o 20 dB/dek, pri výskyte nulu prenosu sa charakteristika zvýši o +20 dB/dek.

Ak v oblasti nízkych frekvencií má amplitúda konštantnú hodnotu, nevzniká problém.

Pri inom rozmiestnení núl a pólov však treba počítať podľa nasledovného príkladu.

Príklad 3: Nájsť asymptóty ALFCh pre prenos: $F(s) = \dfrac{10s}{s+1}$

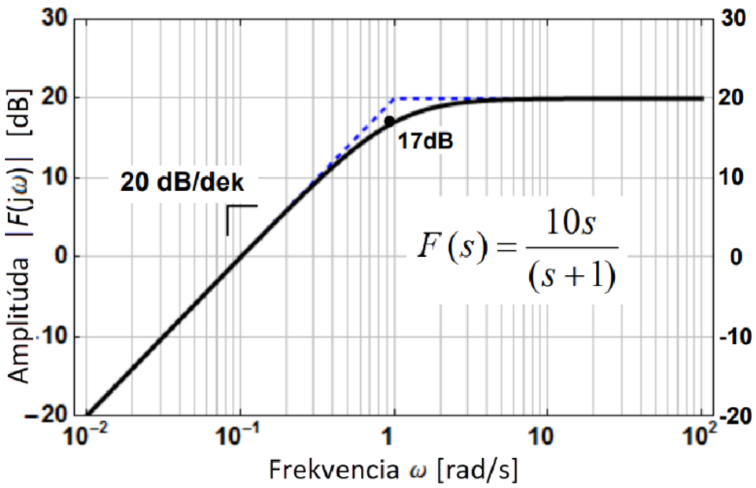
Prvá vec, ktorú si treba všimnúť, je, že frekvenčná odozva začne na vzostupnej trajektórii kvôli nule pri $s = 0$. Sklon ALFCh sa zvyšuje po každej nule (o + 20dB/dek) a keďže vždy vykresľujeme frekvenciu na logaritmickej stupnici, nikdy nemôžeme zahrnúť bod pre $\omega = 0$. Charakteristika musí začínať so sklonom +20 dB/dek.

Keď prídeme k ďalšiemu bod zlomu, ktorý prislúcha pólu $s = -1$. sklon sa zníži o 20 dB/dek a charakteristika sa vyrovná. Výsledkom je hornopriepustný filter. Otázkou je, ako treba posunúť asymptóty vo vertikálnom smere.

K tomu potrebujeme nejaký vzťažný bod na začiatok priebehu. V tomto prípade sa ako najvhodnejšie javí začínať na vysokých frekvenciách a postupovať smerom k nízkym frekvenciám.

Pri $\omega \gg 10$ amplitúda sa limitne blíži ku hodnote:

$$\lim_{\omega\to\infty} |F(j\omega)| = \lim_{s\to\infty} |F(s)| = 10, \quad \text{alebo } 20 \text{ dB}$$



ALFCh pre prenos $\boldsymbol{F(s)} = \frac{\mathbf{10s}}{\boldsymbol{s+1}}$

Príklad 4: Ak prenosová funkcia má n-násobné nuly/póly, dochádza ku zlomu $\pm n.20$ dB/dek.:

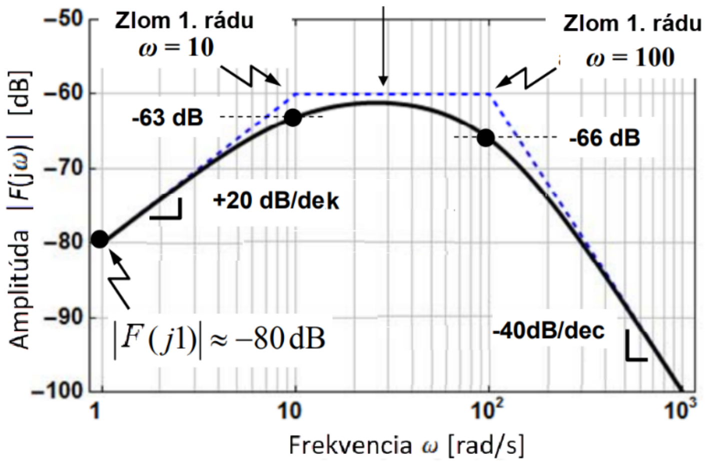
$$F(s) = \frac{10s}{(s+10)\,(s+100)^2}$$

Najskôr charakteristiku analyzujeme po kvalitatívnej stránke: prenos má nulu pri $s = 0$, jednoduchý pól pri $s = -10$ a dvojnásobný pól $s = -100$.

- tvar prvej časti charakteristiky (pre $\omega < 100$) je podobný tomu z predchádzajúceho príkladu, začínajúc so sklonom +20 dB/dek;
- pri kruhovej frekvencii $\omega = 10$ sa charakteristika vyrovnáva;
- dvojnásobný pól $\omega = 100$ spôsobí, že sa sklon charakteristiky klesne o -40 dB/dek.

Analyzovaná prenosová funkcia má tvar pásmovej priepuste. Jediným problémom je horizontálny posun charakteristík. V tomto príklade nemožno použiť postupy z predchádzajúcich príkladov. Existujú dva spôsoby riešenia.

Prvý spôsob spočíva vo voľbe vhodného bodu frekvenčnej charakteristiky čo najďalej od bodov zlomu (aspoň o jednu dekádu) – tam, kde sa asymptóta a charakteristika k sebe približujú a v tomto bode sa vyčísli prenosová funkcia a združené asymptóty sa posunú do tohto bodu.



ALFCh pre prenosovú funkciu $\boldsymbol{F(s)} = \frac{\mathbf{10}s}{(s+\mathbf{10})\,(s+\mathbf{100})^2}$

Napr. pre $\omega = 1$ je hodnota funkcie:

$$F(j1) = \frac{10(j1)}{(j1+10)\,(j1+100)^2}$$

Túto hodnotu vyhodnotíme nasledovne:

$$|F(j1)| = \frac{10|j1|}{|j1+10|\,|j1+100|^2} = \frac{10}{\sqrt{1^2+10^2}\,\left(\sqrt{1^2+100^2}\right)^2} \approx \frac{10}{10.\,100^2} = 10^{-4} \Rightarrow -80\text{ dB}$$

(presná hodnota je $-80{,}04$ dB)

Do toho to bodu umiestnime prvú asymptótu so sklonom +20 dB/dek a ďalej dodržiavame základné pravidlá zmeny sklonu pre každý pól a nulu prenosu.

Druhý spôsob spočíva v tom, že sa zameriame na asymptotické správanie každého člena v prenosovej funkcii. Na ktorejkoľvek frekvencii funkciu rozdelíme prenosovú funkciu na dve časti, pričom:

- zoskupíme všetky póly a nuly, ktoré ležia na alebo pod zvolenou frekvenciou,
- a zoskupíme všetky členy s pólmi a nulami, ktoré ležia nad touto frekvenciou.

Konkrétne pri frekvencii zodpovedajúcej nad prvý, pólom (pre $\omega = 10$) môžeme napísať:

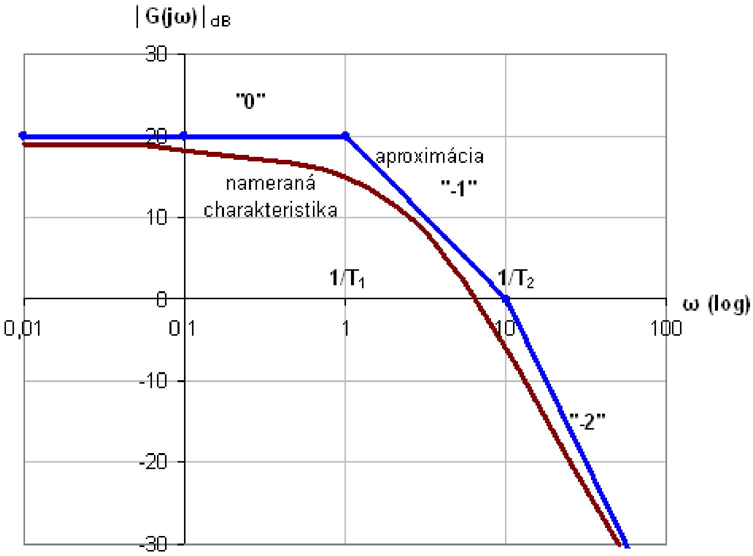
$$|F(s)| = \underbrace{\overbrace{\left|\frac{10s}{(s+10)}\right|}^{\text{výrazy s pólmi a nulami pod } \omega = 10}}_{\approx 10 \text{ pre } \omega \gg 10} \cdot \underbrace{\overbrace{\left|\frac{1}{(s+100)^2}\right|}^{\text{výrazy s pólmi a nulami nad } \omega = 10}}_{\approx 10^{-4} \text{ pre } \omega \ll 10} \approx 10.\,10^{-4} = 10^{-3} \Rightarrow -60\text{ dB}$$

hornopriepustný (vysokofrekvenčný) filter | dolnopriepustný nízkofrekvenčný filter

Z hľadiska filtrov ide funkciu pásmový priepust.

Zostavenie prenosu z priebehu ALFCh

Úlohou však môže byť aj zápis prenosu z danej (nameranej) logaritmickej charakteristiky. Túto aproximujeme polpriamkami so sklonom *n*.20 dB/dek a potom analogickým, ale opačným postupom ako pri zákrese, čítame charakteristiku a zapisujeme jej prenosovú funkciu:



ALFCh získaná aproximáciou nameranej charakteristiky

Z grafu vidíme, že do bodu $1/T_1$ je charakteristika typu „0“, ide teda o proporcionálny člen.

Od bodu $1/T_1$ sa začne prejavovať zotrvačný člen; podobne od bodu $1/T_2$ sa začne prejavovať ďalší zotrvačný člen a teda môžeme zapísať odhadovaný prenos nášho systému:

$$F(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

Použitá a odporúčaná literatúra

[1] Bode Plots Overview, https://lpsa.swarthmore.edu/Bode/Bode.html

[2] 11: Frequency Responses, 01100_Freqresp.pdf (ic.ac.uk)

[3] Introduction to Bode Plot, bodeplot.doc (utah.edu)

[4] Frequency Response and Bode Plots, https://web.njit.edu/~levkov/classes_files/ECE232/Handouts/Frequency%20Response.pdf

[5] Impedances and filters. A way to analyze RC circuits, https://web.stanford.edu/class/archive/engr/engr40m.1178/reader/chapter7.pdf

[6] Asymptotické logaritmické frekvenčné charakteristiky, http://www.senzorika.leteckafakulta.sk/?q=node/297

[7] Bode Plot, http://wikis.controltheorypro.com/File:Clipboard.png

[8] Series RLC Circuit Impedance Calculator, https://www.translatorscafe.com/unit-converter/en-US/calculator/series-rlc-impedance/