

Pr. 8 Analógové frekvenčné filtre

Elektrický filter predstavuje zariadenie na tvarovanie frekvenčného obsahu signálov. Pre tieto filtre existuje veľké množstvo aplikácií pre filtre – výber užitočných signálov v celého frekvenčného spektra vstupných signálov, ofiltrovanie (potlačenie) šumu snímačov, v komunikačných systémoch filtre na potlačenie šumu, na oddelenie jedného komunikačného pásma od ostatných. obmedzenie šírky prenášaného pásma, v aplikáciách na záznam a prehrávanie zvukových signálov, v biomedicínskych systémoch pri prepojení fyziologických senzorov s diagnostickými zariadeniami, atď.

1 Rozdelenie frekvenčných filtrov

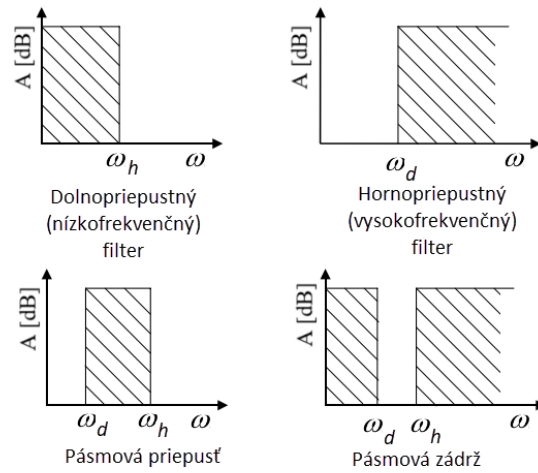
Filtre v závislosti od komponentov použitých pri ich fyzickej realizácii rozdeľujeme na pasívne a aktívne.

- **Pasívne filtračné obvody** obsahujú iba rezistory, kondenzátory a induktory. Tieto obvody môžu byť vysoko selektívne, keď sú straty nízke a odozva je vysoko rezonančná. Nemôžu však dodávať zosilnenie priepustného pásma väčšie ako jeden (teda viac ako 0 dB, okrem rezonančného javu).
- **Aktívne filtre** založené na operačných zosilňovačoch, ktoré sú zaväzbené rezistormi a kondenzátormi. Tieto filtre majú niekoľko výhod:
 - Poskytujú väčšie zosilnenie ako 1.
 - Možno ich navzájom kombinovať (zapájať do reťazcov – sériovo alebo paralelne) a tak získavať nové frekvenčné vlastnosti.
 - Nevyžadujú tlmivky, ktoré môžu byť v nf aplikáciách veľké, stratové a drahé.

Ideálny filter má v oblasti prechodného pásma amplitúdovú odozvu rovnú jednej (alebo s konštantným zosilnením) a všade inde nulové zosilnenie. Frekvencia, pri ktorej sa odozva mení z priepustného pásma na pásmo zádrže, sa označuje ako **medzná frekvencia**.

Z hľadiska, aké frekvencie filtre prepúšťa, resp. zadržiava, rozoznávame nasledovné druhy filtrov:

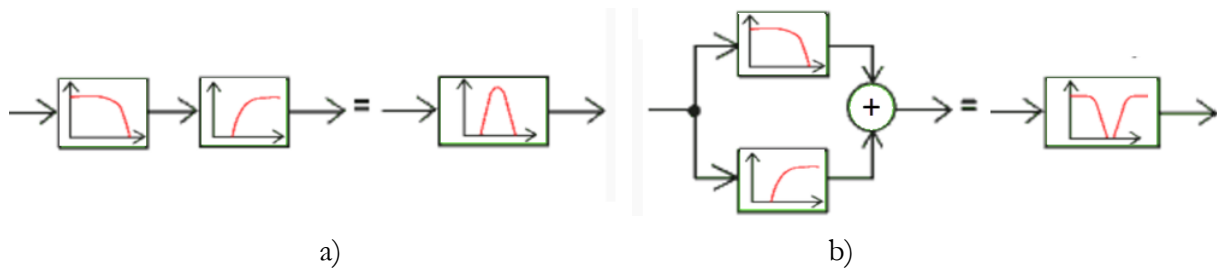
- **Ideálny dolnopriepustný filter** (Lowpass Filter) prepúšťa nízkofrekvenčné signály až do určitej frekvencie ω_d (d = dolná) a zadržiava signály za touto frekvenciou.
- **Ideálny hornopriepustný filter** (Highpass Filter) tlmí frekvenčné zložky až do určitej frekvencie ω_h (h = dolná) a prepustí signály za touto frekvenciou.
- Ak dolnopriepustný filter s medznou frekvenciou ω_h a hornopriepustný filter s medznou frekvenciou ω_d sú zapojené do série, pričom pre frekvencie platí $\omega_d < \omega_h$, potom dostávame **pásmový priepust** (Bandpass Filter).
- Ak dolnopriepustný a hornopriepustný filter sú zapojené paralelne a $\omega_d > \omega_h$, potom ide o **pásmovú zádrž** (Bandstop Filter).



Obr. 1 Druhy filtrov (ideálne filtre)

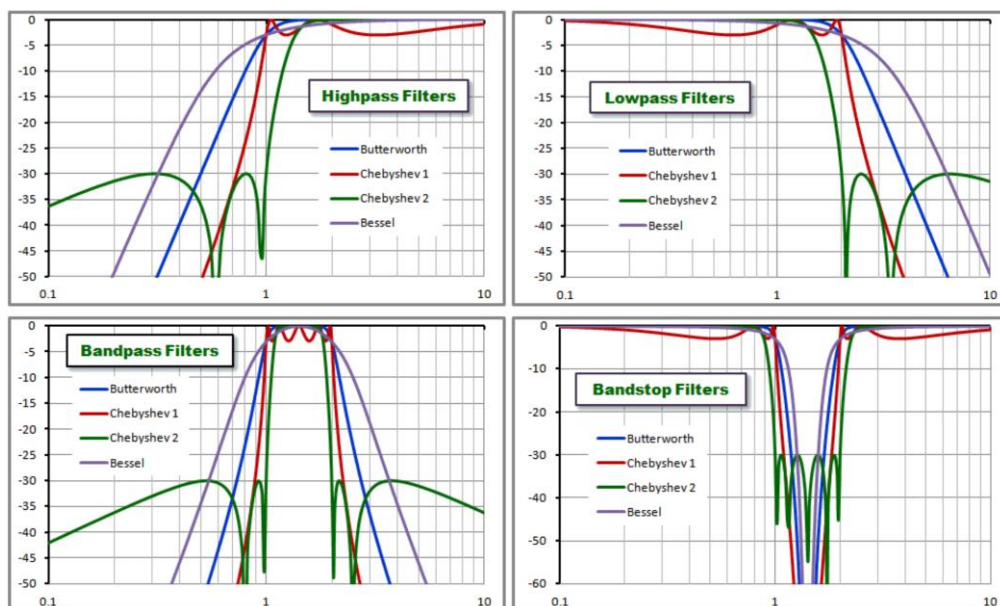
Pri vhodnej voľbe frekvencií, pri ktorých DP a HP prepúšťa, vytvoríme:

- pásmový priepust zo sériového zapojenia filtrov DP a HP (Obr. 2a)
- pásmovú zádrž pri paralelnom zapojení filtrov DP a HP (Obr. 2b)



Obr. 2 Vytvorenie: a) pásmovej priepusti, b) pásmovej zádrže

Vyššie definované idealizované filtre sa, bohužiaľ, nedajú ľahko realizovať. V reálnych systémoch prechod z priepustného pásma do pásma zádrže nebude okamžitý, ale vznikne tu **oblasť prechodu**. Tiež útlm (rozdiel medzi amplitúdou v priepustnom pásme a pásme, kde filter neprepúšťa signál) v praxi nebude nekonečný, ale bude mať určitú konečnú hodnotu. Logaritmicke frekvenčné charakteristiky najčastejšie používaných reálnych filtrov sú uvedené na Obr. 3.

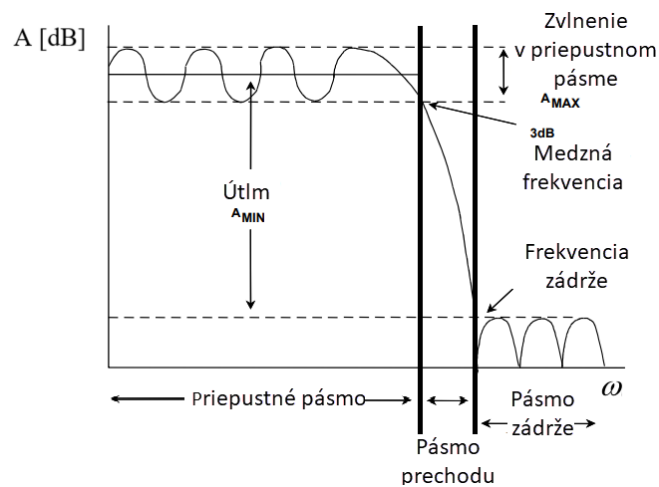


Obr. 3 LAFCH reálnych filtrov, [6]

2 Základné parametre filtra

Na Obr. 4 sú definované základné parametre filtra.

- **Medzná frekvencia** ω_c je frekvencia, pri ktorej frekvenčná charakteristika opúšťa pásmo priepustnosti (alebo bod -3 dB pre filter odozvy Butterworth).
- **Frekvencia pásma zádrže** ω_s je frekvenciou, pri ktorej sa dosiahne minimálny útlm v pásme zádrže.
- **Zvlnenie priepustného pásma** ΔA predstavuje zvlnenie v priepustnom pásme (napr. pri filtri typu Čebyšev 1). Podobne existuje aj zvlnenie v zádržnom pásme (napr. pri filtri typu Čebyšev 2)
- **Minimálny útlm pásma** (A_{min}) definuje minimálny útlm signálu v pásme zádrže.
- **Rád filtra** je daný počtom pólov menovateľa.



Obr. 4 Základné charakteristiky frekvenčného filtra (medzné frekvencie sa počítajú od hodnoty, kedy ALFCH pásma prechádza bodom vzdialeným o -3 dB pod dolnou hranicou priepustného pásma)

Filtre majú frekvenčne závislú odozvu, pretože impedancia kondenzátora alebo tlmivky sa mení s frekvenciou: $X_C(j\omega) = 1/(j\omega C)$ a $X_L(j\omega) = j\omega L$.

Pre každý elektrický obvod možno pomocou Ohmovho zákona a Kirchoffových zákonov zostaviť prenosovú funkciu, ktorej vlastnosti závisia od konfigurácie a parametrov obvodu, presnejšie – na vlastnostiach prenosovej funkcie; konkrétne na rozmiestnení pólov a núl:

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = K \frac{(s - n_m) \dots (s - n_1)}{(s - p_m) \dots (s - p_1)} \quad m \leq n$$

Póly prenosu p_i majú vplyv na kritické frekvencie (zlomy LFCH) a nuly prenosu n_i rozhodujú o tom, aký typ filtra daná prenosová funkcia predstavuje.

Stupeň menovateľa n predstavuje rád filtra. Pri každom póle sa mení pokles ALFCH o -20 dB/dek a naopak, pri každej nule je zlom ALFCH o +20 dB/dek.

Korene prenosu môžu byť jednoduché alebo komplexne združené. Pri komplexne združených koreňoch ide o dvojnásobný zlom, príp. aj o prevýšenie frekvenčnej charakteristiky v bode ALFCH odpovedajúcemu tejto dvojici pólov.

Kvôli stabilite sa všetky póly musia nachádzať v ľavej časti roviny. Ak v čitateli sa nachádza nula prenosu $s = 0$, potom prechodová charakteristika pre $t \rightarrow \infty$ v čitateli konverguje k nule.

Vychádzajúc zo štandardného prenosu sústavy II. rádu:

$$F(s) = \frac{b(s)}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2d}{\omega_0}s + 1}$$

zobrazíme rôzne typy filtrov v závislosti od polynómu v čitateli $b(s)$.

Do prenosovej funkcie zavedieme činiteľ akosti obvodu:

$$Q = \frac{1}{2d}$$

Pre jednotkové zosilnenie obvodu, t.j. polynóm v čitateli $b(s) = 1$, štandardný prenos proporcionálnej sústavy II. rádu bude:




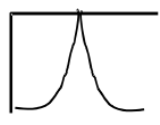

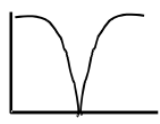


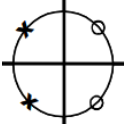
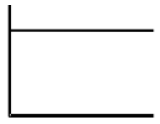
$$F(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

V Tab. 1 je uvedený prehľad rozdelenia filtrov na základe tvaru prenosovej funkcie, kde $a(s)$ je polynóm v menovateli štandardnej prenosovej funkcie II. rádu:

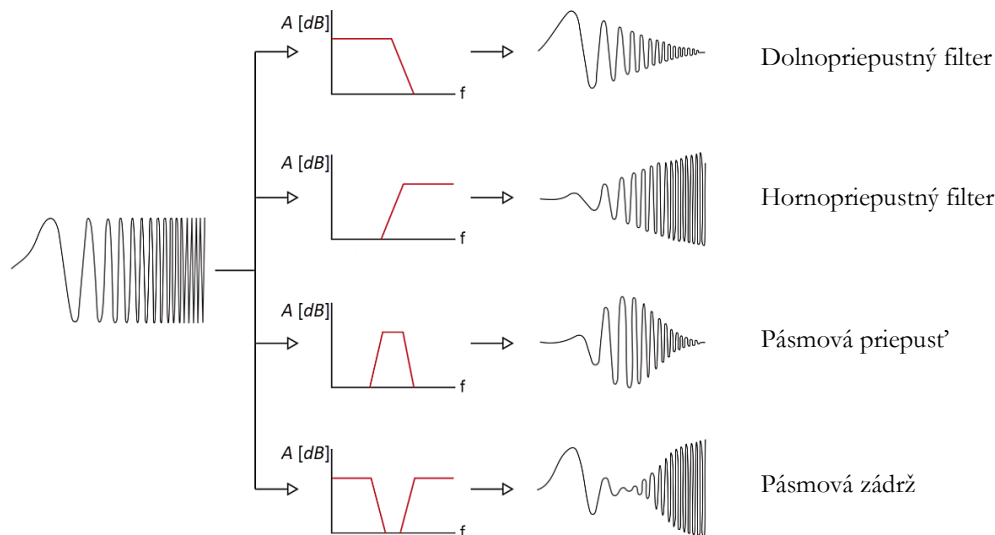
$$a(s) = \frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2d}{\omega_0}s + 1$$

Poznamenajme, že náhradou $s = \omega_0$ za $\omega_0 = s$ dostávame z dolnopriepustného filtra na hornopriepustný.

Tab. 1 Prenosové funkcie rôznych typov filtrov II. rádu

Typ filtra Prenosová funkcia	Prenosová funkcia $F(s)$	Rozmiestnenie pólov	Amplitúdová frekvenčná charakteristika
Dolnopriepustný (nízkofrekvenčný) filter	$F(s) = \frac{1}{a(s)} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$		
Pásmový priepust	$F(s) = \frac{2d}{\omega_0} s = \frac{\frac{\omega_0}{Q} s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$		
Pásmová zádrž	$F(s) = \frac{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega_z}{\omega_0}\right)^2}{a(s)} = \frac{s^2 + \omega_z^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$		
Hornopriepustný (vysokofrekvenčný) filter	$F(s) = \frac{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}{a(s)} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$		
Fázový filter	$\frac{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 - \frac{2d}{\omega_0}s + 1}{a(s)} = \frac{s^2 - \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$		

Veľmi názorný príklad prechodu signálu so zvyšujúcou sa frekvenciou cez jednotlivé typy filtrov je uvedený na Obr. 5 (ide o signál z boku chirp v schéma v programe Simulink).



Obr. 5 Prechod signálu s konštantnou amplitúdou a zvyšujúcou sa frekvenciou (v MATLABBe z bloku chirp) cez jednotlivé typy filtrov

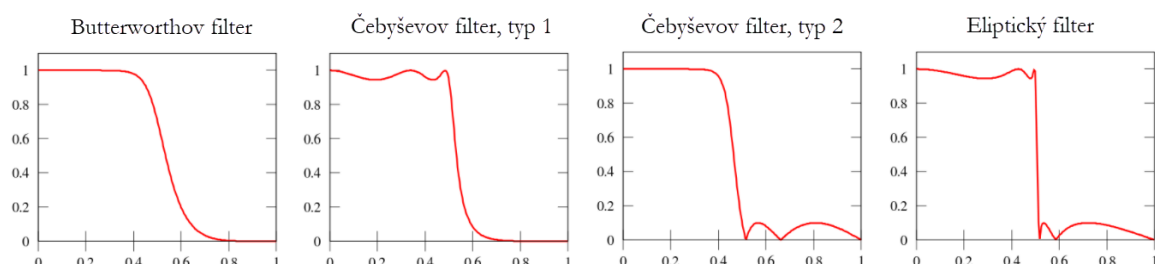
3 Špeciálne filtre

Často používanými filtermi v praxi sú špeciálne filtre, z nich najznámejšie sú (Obr. 6) [8]:

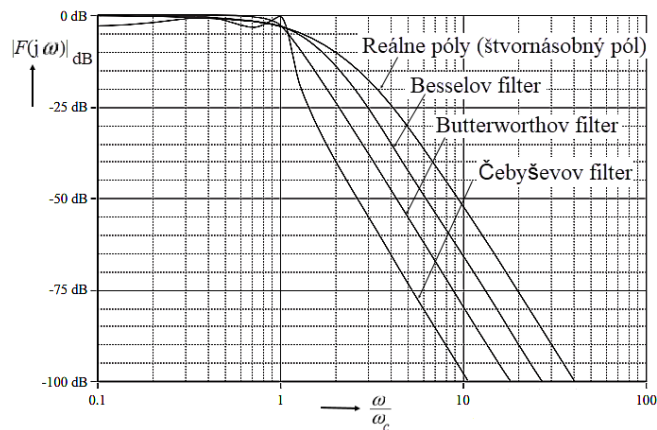
- [Butterworthov filter](#) – žiadne zvlnenie zosilnenia v priepustnom (PP) a nepriepustnom (NP) pásme, avšak pomalší prechod z priepustného do nepriepustného pásma
- [Chebyshev filter \(typu 1\)](#) – žiadne zvlnenie v NP, stredne rýchly prechod medzi PP a NP,
- [Chebyshev filter \(typu 2\)](#) – žiadne zvlnenie v PP, stredne rýchly prechod medzi PP a NP,
- [Bessel filter](#) – žiadne zvlnenie v PP ani v NP, pomalý prechod medzi PP a NP
- [Elliptic filter](#) – zvlnenie v PP, aj v NP, rýchly prechod medzi PP a NP

V ďalšom sú špeciálne filtre uvedené ako dolnopriepustné. No vhodnou transformáciou je možné získať na iné druhy filtrov: hornopriepustné filtre; filtre typu pásmová priepusť a filtre typu pásmová zadrž.

Pri filteroch nás zaujímajú predovšetkým frekvenčné vlastnosti, ktoré závisia od rozmiestnenia pólov v rovine koreňov, z čoho vyplývajú rôzne koeficienty charakteristických (tvoriacich) polynómov pri jednotlivých typoch filtrov. Tvar ALFCH niektorých typov filtrov je uvedený na Obr. 6. Tieto sa líšia jednak zvlnením v priepustnom, či prechodnom pásme, ale hlavne rýchlosťou prechodu medzi pásmom priepustnosti a zadrž (porovnaj napr. AFCH jednotlivých typov filtrov 4. rádu súborne uvedené na Obr. 7).



Obr. 6 Porovnanie tvarov logaritmickej frekvenčnej charakteristiky niektorých filtrov rovnakého rádu (vyjadrené pomocou tzv. normovaných charakteristík), [8]



Obr. 7 Priebehy logaritmickej frekvenčnej charakteristiky dolnopriepustného filtra štvrtého rádu pre rôzne typy filtrov

3.1 Butterworthov filter

Butterworthov filter (BF) nemá žiadne zvlnenie v priepustnom pásme frekvenčnej charakteristiky a ani v zádržnom pásme a preto sa niekedy nazýva aj filter s maximálne plochým priebehom amplitúdovej frekvenčnej charakteristiky. Butterworthov filter dosahuje svoju rovnosť na úkor relatívne širokého prechodného pásma z priepustného do zádržného pásma. Výhodou BF je maximálne plochý priebeh frekvenčnej charakteristiky a strmší priebeh frekvenčnej charakteristiky ako napríklad u Besselovho filtra. Nevýhodou sú prekmity v prechodovej charakteristike.

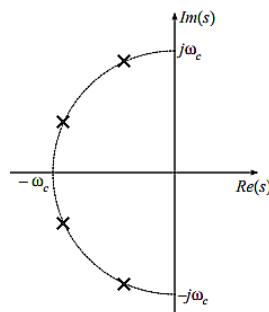
Princíp BF spočíva v zostavení charakteristického polynómu $B_N(s)$ z koreňov, ktoré sú rovnomerne rozmiestnené na polkružnici v zápornej polrovine koreňov (Obr. 8):

$$F(s) = \frac{1}{B_N(s)} \quad (3)$$

Pre póly tvoriace Butterworthov polynóm $B_N(s)$, rozmiestnené rovnomerne na kružnici s polomerom ω_c , možno odvodiť ich polohu:

$$s_k = \omega_c \left[\cos \frac{\pi(N+2k-1)}{2N} + j \sin \frac{\pi(N+2k-1)}{2N} \right] \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (14)$$

kde N je rád filtra.



Obr. 8 Póly Butterworthovho filtra 4. rádu

Po vyčíslení hodnôt pre jednotlivé mocniny operátora s dostávame Butterworthove polynómy uvedené v Tab. 1.

Tab. 1 Butherworthove polynómy pre jednotlivé rády Butterworthovho filtra (platí pre $\omega_c = 1$ rad/s)

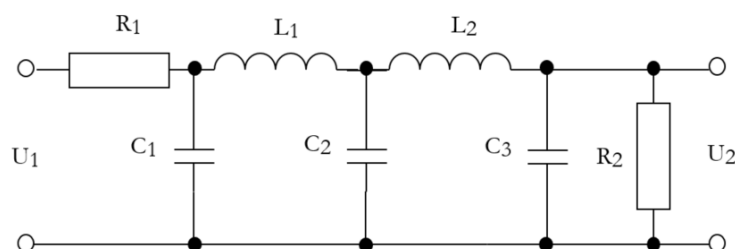
Rád filtra N	Butheworthov polynóm $B_N(s)$
1	$s + 1$
2	$s^2 + 1,41s + 1$
3	$s^3 + 2s^2 + 2s + 1$
4	$s^4 + 2,61s^3 + 3,41s^2 + 2,61s + 1$
5	$s^5 + 3,24s^4 + 5,24s^3 + 5,24s^2 + 3,24s + 1$

Ak sa požaduje iná hraničná frekvencia ako normalizovaná (t.j. $\omega_c \neq 1$ rad/s), koeficienty prenosu dostaneme dosadením s/ω_c namiesto s , ďalej dosadením s^2/ω_c^2 namiesto s^2 a podobne pre ďalšie mocniny operátora s , čo môžeme vidieť v Tab. 2.

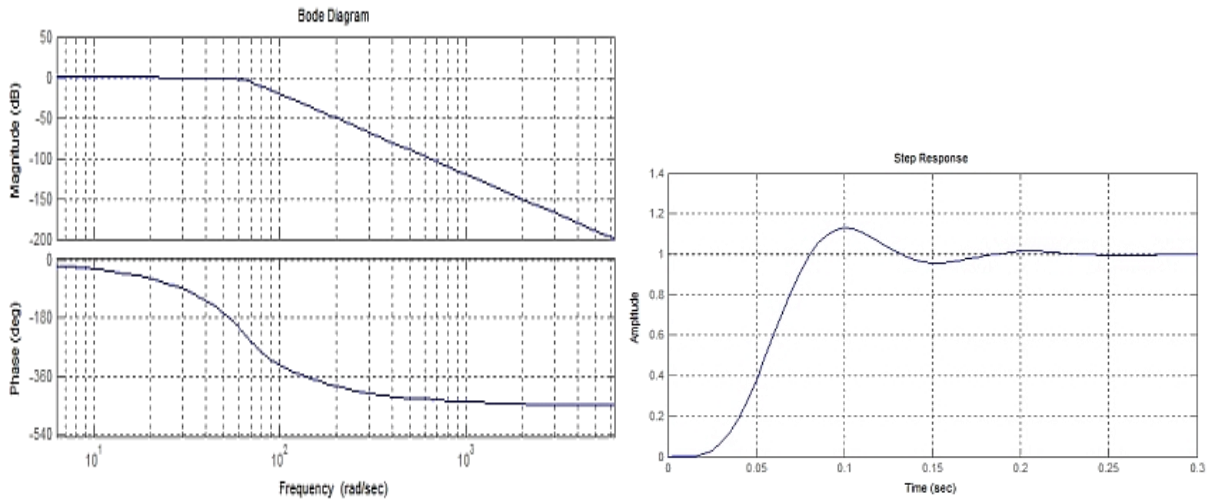
Tab. 2 Prenosové funkcie pre jednotlivé rády Butherworthovho filtra pre $\omega_c \neq 1$ rad/s)

Rád filtra N	Prenosová funkcia $F(s)$
1	$\frac{1}{\frac{s}{\omega_c} + 1}$
2	$\frac{1}{\frac{s^2}{\omega_c^2} + 1,41 \frac{s}{\omega_c} + 1}$
3	$\frac{1}{\frac{s^3}{\omega_c^3} + 2 \frac{s^2}{\omega_c^2} + 2 \frac{s}{\omega_c} + 1}$
4	$\frac{1}{\frac{s^4}{\omega_c^4} + 2,61 \frac{s^3}{\omega_c^3} + 3,41 \frac{s^2}{\omega_c^2} + 2,61 \frac{s}{\omega_c} + 1}$
5	$\frac{1}{\frac{s^5}{\omega_c^5} + 3,24 \frac{s^4}{\omega_c^4} + 5,24 \frac{s^3}{\omega_c^3} + 5,24 \frac{s^2}{\omega_c^2} + 3,24 \frac{s}{\omega_c} + 1}$

LFCH a PrCh pre Butherworthov dolnopriepustný filter 5. rádu podľa schémy na Obr. 9 sú uvedené na Obr. 10.



Obr. 9 Schéma zapojenia dolnopriepustného Butterworthovho filtra 5. rádu



Obr. 10 Bodeho logaritmickej frekvenčnej a prechodovej charakteristiky Butterworthovho filtra 5. rádu

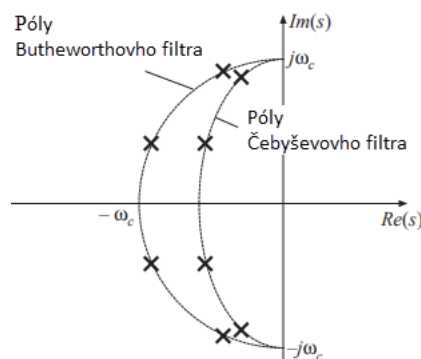
3.2 Čebyševov filter

Čebyševov filter má menšie prechodné pásmo ako Butterworthov filter čo sa prejaví zvlnením frekvenčnej charakteristiky v priepustnom pásme (filter typu 1), alebo v nepriepustnom pásme (filter typu 2). V ďalšom sa zaoberajme len filtrom typu 1 (poznatky pre filter typu 2 možno nájsť v literatúre). Tento filter minimalizuje výšku maximálneho zvlnenia, [3]. Výhodou týchto filtrov je strmší pokles frekvenčnej charakteristiky v oblasti za frekvenciou zlomu. Nevýhodou je zvlnenie frekvenčnej charakteristiky v priepustnom pásme a mierne zvlnená odozva prechodovej charakteristiky, [5].

Póly pre N -tý rád Čebyševovho filtra (Ob. 11) sú:

$$s_k = \left(\sin \left(\frac{\pi(2k-1)}{2N} \right) \sinh(b) + j \cos \left(\frac{\pi(2k-1)}{2N} \right) \cosh(b) \right)$$

kde: $b = \frac{1}{N} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)$



Obr. 11 Rozmiestnenie pólov Čebyševovho filtra 4. rádu

Všeobecne môžeme obrazový prenos pre Čebyševov filter zapísať ako:

$$F(s) = \frac{1}{C_N(s)}$$

kde $C_N(s)$ je Čebyševov polynóm pre rôznyi rád filtra v tvare podľa Tab. 4. Ak je potrebná frekvencia zlomu ω_c iná ako normalizovaná ($\omega_c = 1$), koeficienty obrazového prenosu dostaneme dosadením s/ω_c namiesto s , s^2/ω_c^2 namiesto s^2 a podobne pre ďalšie koeficienty, čo je uvedené v Tab. 3.

Tab. 3 Čebyševov polynóm $C_N(s)$ pre rôzny rád Čebyševovho filtra

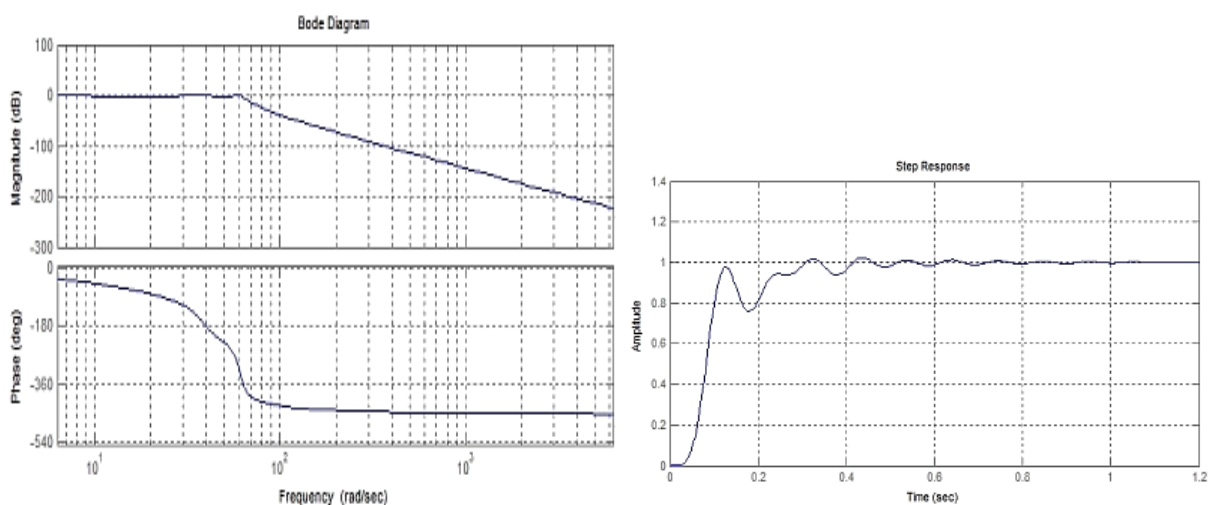
Rád filtra N	Čebyševov polynóm $C_N(s)$
1.	$s + 1$
2.	$1,41s^2 + 0,91s + 1$
3.	$3,98s^3 + 2,38s^2 + 3,7s + 1$
4.	$5,65s^4 + 3,29s^3 + 6,6s^2 + 2,29s + 1$
5.	$15,9s^5 + 9,11s^4 + 22,5s^3 + 8,71s^2 + 6,48s + 1$

Prenos Čebyševovho filtra je v tvare podľa Tab. 4.

Tab. 4 Obrazový prenos Čebyševovho filtra pre rôznu frekvenciu

Rád filtra N	Prenosová funkcia $F(s)$
1.	$\frac{1}{\frac{s}{\omega_c} + 1}$
2.	$\frac{1}{1,41 \frac{s^2}{\omega_c^2} + 0,91 \frac{s}{\omega_c} + 1}$
3.	$\frac{1}{3,98 \frac{s^3}{\omega_c^3} + 2,38 \frac{s^2}{\omega_c^2} + 3,7 \frac{s}{\omega_c} + 1}$
4.	$\frac{1}{5,65 \frac{s^4}{\omega_c^4} + 3,29 \frac{s^3}{\omega_c^3} + 6,6 \frac{s^2}{\omega_c^2} + 2,29 \frac{s}{\omega_c} + 1}$
5.	$\frac{1}{15,9 \frac{s^5}{\omega_c^5} + 9,11 \frac{s^4}{\omega_c^4} + 22,5 \frac{s^3}{\omega_c^3} + 8,71 \frac{s^2}{\omega_c^2} + 6,48 \frac{s}{\omega_c} + 1}$

ALFCH a PrCh Čebyševovho filtra 1. typu sú uvedené na Obr. 12.



Obr. 12 Bodeho frekvenčná charakteristika dolnopriepustného Čebyševovho filtra 5. rádu

3.3 Besselov filter

Besselov filter je optimalizovaný na dosiahnutie najlepšej prechodovej odozvy vďaka lineárnej fázovej charakteristike. Amplitúdová charakteristika je menej strmá ako napríklad pri Butterworthovom filtri. Výhodou týchto filtrov je dobrá časová odozva, dobre tmenie a malý prekmit. Jedinou nevýhodou je pokles frekvenčnej charakteristiky.

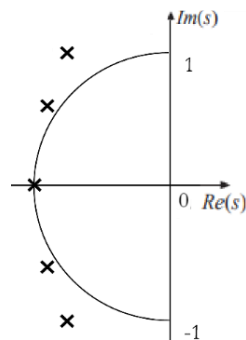
Prenos Besselovho filtra je v tvare:

$$F(s) = \frac{Ke_N}{Be_N(s)}$$

kde $Be_N(s)$ je Besselov polynóm rádu N a zosilnenie Ke_N sa volí tak, aby výsledný prenos filtra bol jednotkový. Jednotlivé koeficienty Besselovho polynómu majú tvar:

$$b_k = \frac{(2N - k) \cdot 2N - k!}{2^{N-k} k! (n - k)!}; k = 1, 2, \dots, N$$

Predchádzajúce filtre (Butterworthov a Čebyševov) majú uzavretú formu výrazu pre frekvenčné odozvy, z ktorých sa odvodzajú výrazy pre póly a nuly. Póly Besselovho filtra (Obr. 13) vypočítame jednoducho ako korene menovateľa prenosu.



Obr. 13 Póly Besselovho filtra 5. rádu

Koeficienty Besselovho polynómu $Be(s)$ a konštanty zosilnenia Ke_N (aby v priepustnom pásme bol jednotkový prenos) pre rôzny rád filtra pri normalizovanej frekvencii $\omega_c=1$ sú uvedené v Tab. 5.

Tab. 5 Konštanty čitateľa Ke_N a polynóm $Be_N(s)$ pre rôzny rád Besselovho filtra

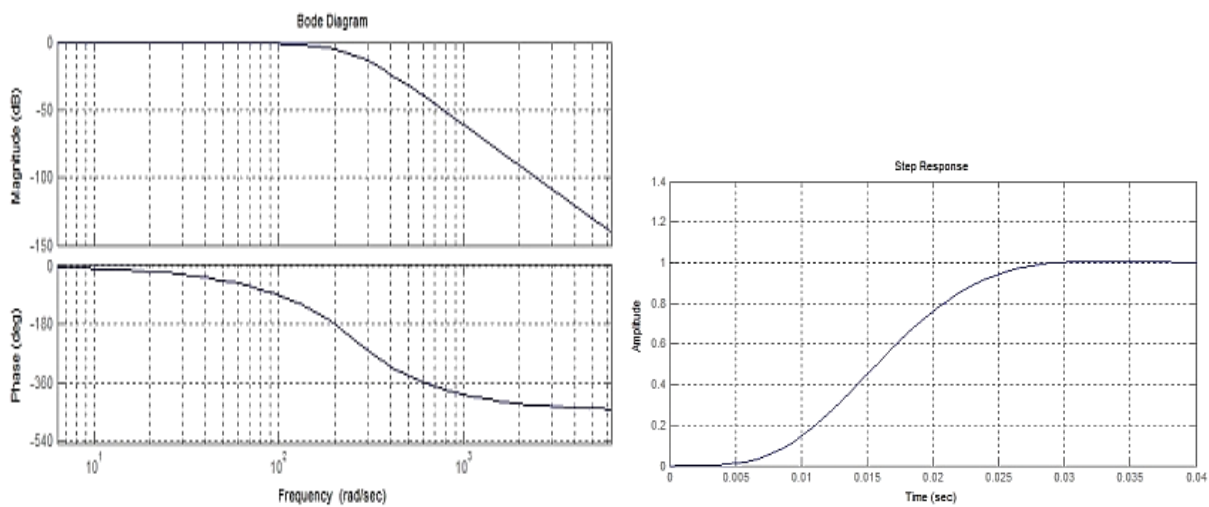
Rád filtra N	Besselov polynóm $Be_N(s)$	Ke_N
1.	$s + 1$	1
2.	$s^2 + 3s + 3$	3
3.	$s^3 + 6s^2 + 15s + 15$	15
4.	$s^4 + 10s^3 + 45s^2 + 105s + 105$	105
5.	$s^5 + 15s^4 + 105s^3 + 420s^2 + 945s + 945$	945

Prenos Besselovho filtra pre rôzny rád a frekvenciu zlomu ω_c je uvedený v Tab. 7.

Tab. 6 Obrazový prenos Besselovho filtra pre rôznu ω_c

Rád filtra N	$F(s)$
1.	$\frac{1}{\frac{s}{\omega_c} + 1}$
2.	$\frac{3}{\frac{s^2}{\omega_c^2} + 3\frac{s}{\omega_c} + 3}$
3.	$\frac{15}{\frac{s^3}{\omega_c^3} + 6\frac{s^2}{\omega_c^2} + 15\frac{s}{\omega_c} + 15}$
4.	$\frac{105}{\frac{s^4}{\omega_c^4} + 10\frac{s^3}{\omega_c^3} + 45\frac{s^2}{\omega_c^2} + 105\frac{s}{\omega_c} + 105}$
5.	$\frac{945}{\frac{s^5}{\omega_c^5} + 15\frac{s^4}{\omega_c^4} + 105\frac{s^3}{\omega_c^3} + 420\frac{s^2}{\omega_c^2} + 945\frac{s}{\omega_c} + 945}$

ALFCH a PrCh Besselovho filtra sú uvedené na Obr. 12.



Obr. 12 Bodeho logritmická frekvenčná charakteristika a prechodová charakteristika dolnopriepustného Besselovho filtra 5. rádu

4 Pasívne filtre s R L C prvkami

Každý druh filtra je popísaný prenosovou funkciou vyplývajúcou zo zapojenia (Tab. 7 - 10). Póly a nuly sa vypočítavajú u každého z týchto filtrov ako korene menovateľa a čitateľa obrazového prenosu.

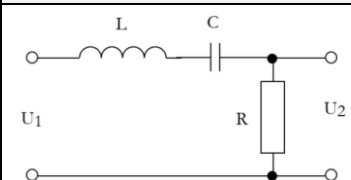
Tab. 7. Prenosové funkcie pasívnych elektrických dolnopriepustných filtrov

Filter	Schéma	Prenosová funkcia	Frekvencia zlomu
Dolnopriepustný RC filter		$F(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{sCR + 1} = \frac{1}{s + \frac{1}{CR}}$	$\omega_c = \frac{1}{RC}$
Dolnopriepustný LR filter		$F(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R}{sL + R} = \frac{\frac{R}{L}}{s + \frac{R}{L}}$	$\omega_c = \frac{R}{L}$
Dolnopriepustný RLC filter		$F(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$	$\omega_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$
Dolnopriepustný LCR filter		$F(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{\frac{R}{sC}}{sL + \frac{R}{R + \frac{1}{sC}}} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s\frac{1}{CR} + \frac{1}{LC}}$	$\omega_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

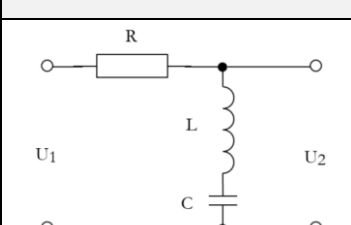
Tab. 8. Prenosové funkcie pasívnych elektrických dolnopriepustných filtrov

Filter	Schéma	Prenosová funkcia	Frekvencia zlomu
Hornopriepustný CR filter		$F(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R}{sCR + 1} = \frac{s}{s + \frac{1}{CR}}$	$\omega_c = \frac{1}{RC}$
Hornopriepustný RL filter		$F(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{sL}{sL + R} = \frac{s}{s + \frac{R}{L}}$	$\omega_c = \frac{R}{L}$
Hornopriepustný RCL filter		$F(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{sL}{sL + R + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$	$\omega_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

Tab. 9. Prenosová funkcia pasívneho elektrického filtra s pásmovou priepusťou

Filter	Schéma	Prenosová funkcia	Frekvencia zlomu
LCR filter s pásmovou priepusťou		$F(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R}{sL + R + \frac{1}{sC}} = \frac{s\frac{R}{L}}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$	$\omega_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

Tab. 10. Prenosová funkcia pasívneho elektrického filtra s pásmovou zádržou

Filter	Schéma	Prenosová funkcia	Frekvencia zlomu
RLC filter s pásmovou zádržou		$F(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{sL + \frac{1}{sC}}{sL + R + \frac{1}{sC}} = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$	$\omega_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

5 Aktívne filtre

5.1 Prenosová funkcia zaväzbeného operačného zosilňovača

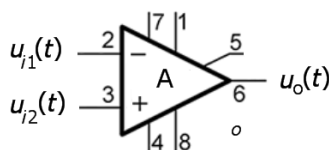
Na rozdiel od predchádzajúcich pasívnych elektrických obvodov budeme analyzovať vlastnosti aktívnych obvodov s operačnými zosilňovačmi. Ide o analógové zosilňovače s veľkým napät'ovým zosilnením. Aj keď ich používanie v súvislosti s rozvojom digitálneho spracovania signálov je na ústupe, predsa sú nezastupiteľné v mnohých oblastiach aplikácií a ešte nájdu oblasti ich aplikácií. So vstupnými napät'ovými signálmi môžu vykonávať rôzne matematické operácie ako inverzia, súčet, rozdiel, integrovanie, derivovanie násobenie konštantou.

Z nášho hľadiska je najdôležitejšie, že operačné zosilňovače môžu realizovať rôzne prenosové funkcie, [4]. Operačný zosilňovač má nasledujúce vlastnosti:

- Nekonečné napät'ové zosilnenie: $A \rightarrow \infty$ (ideálne)
- Nekonečná vstupná impedancia: $Z_i \rightarrow \infty$ (ideálne)
- Nulová výstupná impedancia: $Z_o \rightarrow 0$ (ideálne)
- Nekonečne široké frekvenčné pásmo – frekvenčná nezávislosť

Výstupné napätie je dané zosilnením rozdielu napätí na vstupoch (Obr. 2.3)

$$u_o(t) = A[u_{i2}(t) - u_{i1}(t)] \quad (1.1)$$



Legenda:

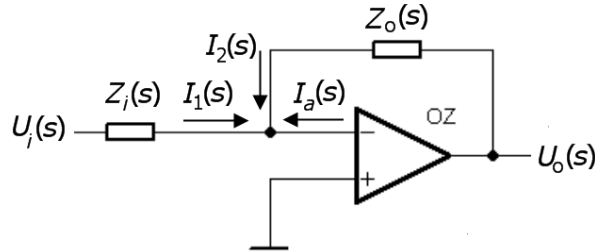
- 2 - neinvertujúci vstup
- 3 - invertujúci vstup
- 4, 7 - napájacie napätie
- 6 - výstup
- 1, 5 - korekcia napät'ovej nesymetrie

Obr. 1.1 Operačný zosilňovač

5.2 Invertujúci operačný zosilňovač

Ak vstupné napätie $u_{i2}(t) = 0$ (uzemnený neinvertujúci vstup), potom výstupné napätie OZ je dané (Obr. 2.4):

$$u_o(t) = -Au_{i1}(t) \quad (1.2)$$



Obr. 1.2 Zapojenie invertujúceho operačného zosilňovača

Keďže operačný zosilňovač má nekonečnú vstupnú impedanciu, vysoké zosilnenie, potom $I_a(s) = 0$, $u \approx 0$ a $I_1(s) = -I_2(s)$. Z toho vyplýva:

$$I_1(s) = \frac{U_i(s)}{Z_i(s)}; \quad I_o(s) = \frac{U_o(s)}{Z_o(s)} \quad (1.3)$$

a hľadaný prenos je:

$$F(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{Z_o(s)}{Z_i(s)} \quad (1.4)$$

Podľa toho, aké impedancie $Z_i(s)$ a $Z_o(s)$ sú zapojené, rozoznávame rôzne prenosové funkcie. Niektoré prenosové funkcie sú prehľadne uvedené v Tab. 2.1 (samozrejme, existujú aj zložitejšie zapojenia, tu neuvedené).

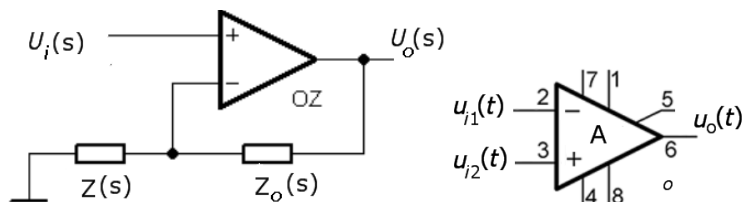
Tab. 1.6 Prehľad základných zapojení operačného zosilňovača pre modelovanie prenosových funkcií

Názov	$Z_i(s)$	$Z_o(s)$	Prenosová funkcia $F(s)$
Invertor	R_i	R_o	$F(s) = -\frac{R_o}{R_i}$
Sumátor	R_1, R_2, R_3	R_o	$F(s) = -\left(\frac{R_o}{R_1} + \frac{R_o}{R_2} + \frac{R_o}{R_3}\right)$
Integrátor (dolná priepusť)	R_i	C_o	$F(s) = -\frac{1}{R_i C_o s}$
Derivátor (horný priepusť)	R_i	R_o	$F(s) = -R_o C_i s$
P sústava I. rádu	R_i	R_o paralelne s C_o	$F(s) = -\frac{R_o/R_i}{1 + sR_o C_o}$
PI člen	R_i paralelne s C_i	R_o paralelne s C_o	$F(s) = -\frac{1}{sC_o R_i} + \frac{C_i}{C_o}$
PD člen	R_i paralelne s C_i	R_o	$F(s) = -\frac{R_i}{R_o}(1 + R_i C_i s)$
PID člen	R_i paralelne s C_i	R_o v sérii s C_o	$F(s) = -\frac{R_o(1 + sT_i)(1 + sT_o)}{R_i sT_o}$ $T_i = R_i C_i \quad T_o = R_o C_o$
PD sústava I. rádu	R_i paralelne s C_i	R_o paralelne s C_o	$F(s) = -\frac{R_i}{R_o} \frac{1 + R_i C_i s}{1 + sR_o C_o}$

5.3 Neinvertujúci operačný zosilňovač

V zapojení neinvertujúceho operačného zosilňovača (Obr. 2.5) platí podľa rov. (2.18):

$$U_o(s) = A[U_i(s) - U_1(s)] = A U_i(s) - \frac{Z(s)}{Z(s) + Z_o(s)} U_o(s) \quad (1.5)$$



Obr. 1.3 Zapojenie neinvertujúceho operačného zosilňovača

odkiaľ dostávame pre hľadaný prenos:

$$F(s) = \frac{Z(s) + Z_o(s)}{Z(s)} \quad (1.6)$$

Použitá a odporúčaná literatúra

- [1] The analysis and design of linear circuits, https://www.academia.edu/35800440/The_Analysis_and_Design_of_Linear_Circuits
- [2] Chapter 8 Analog Filters, <https://docplayer.net/20941924-Chapter-8-analog-filters.html>
- [3] Chapter 4: AC Circuits and Passive Filters, http://d6vsczyu1rky0.cloudfront.net/33619_b/wp-content/uploads/2020/03/AC-and-passive-filters.pdf
- [4] Problems of Chapter 4: Introduction to Passive Filters, http://agamenon.tsc.uah.es/Personales/philip/pagina_files/teaching/ac/docs/ExercisesU4.pdf
- [5] R.W. Ericson: Filter Circuits. [filter_slides.pdf \(weebly.com\)](#)
- [6] Filter Transfer Functions, <https://www.rfcafe.com/references/electrical/filters.htm>
- [7] Educational Material: 2.6 Filtering Basics, <https://www.vectornav.com/resources/filtering-basics>
- [8] Filter (signal processing), [https://www.wikiwand.com/en/Filter_\(signal_processing\)#/The_transfer_function](https://www.wikiwand.com/en/Filter_(signal_processing)#/The_transfer_function)