

Pr. 7: Viachmotnostné rotačné mechanické systémy

1. Moment zotrvačnosti telesa

Pre analytické zostavenie dynamického modelu rotačného mechanického systému potrebujeme poznať moment zotrvačnosti telesa. Moment zotrvačnosti závisí od tvaru a hmotnosti telesa, ale aj od osi otáčania, ktorá môže prechádzať ťažiskom telesa, mimo ťažiska i mimo samotného telesa.

Moment zotrvačnosti J je fyzikálna veličina, pre elementárnu veľkosť ktorej platí:

$$dJ = r^2 dm$$

kde dm je hmotnosť [kg] elementu telesa s hustotou ρ a elementárnym objemom dV :

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz, \text{ pričom pri rotačnom telese} \quad dz = r \cdot d\varphi$$

r je vzdialenosť [m] elementu $dx \cdot dy \cdot dz$ od uvažovanej osi rotácie

odkiaľ vyplýva:

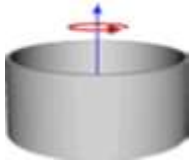
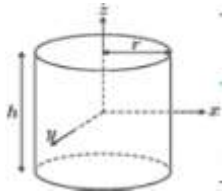
$$J = \int_m r^2 dm = \int_m r^2 \rho dV = \rho \int_0^l dy \int_0^{r(x)} dx \int_0^{2\pi} r^2 (r d\varphi)$$

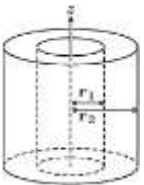
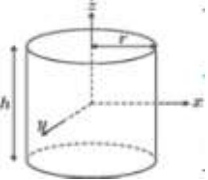
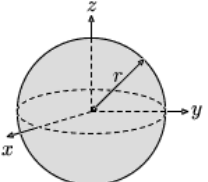
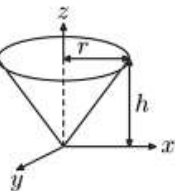
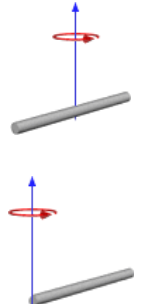
Moment zotrvačnosti valca o polomere $r(x) = r$ a dĺžke l je:

$$J = \rho l \int_0^r r^3 dx \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\rho l \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^r = \frac{\pi\rho l}{2} r^4 = \frac{\pi\rho l}{32} d^4 = \frac{\rho\pi r^2 l}{2} r^2 = \frac{m r^2}{2}$$

Momenty zotrvačnosti najčastejšie sa vyskytujúcich telies sú prehľadne uvedené v tabuľke:

Momenty zotrvačnosti niektorých telies

Popis	Tvar telesa	Moment zotrvačnosti
Dutá valcová plocha		$J = mr^2$
Plný valec		$J = \frac{1}{2}mr^2$ $J_x = J_y = \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2)$

Dutý hrubostenný valec		$J_z = \frac{1}{2} m (r_1^2 + r_2^2)$ $J_x = J_y = \frac{1}{12} m [3 (r_1^2 + r_2^2) + h^2]$
Plný valec		$J = \frac{1}{2} m r^2$ $J_x = J_y = \frac{1}{12} m (3 r^2 + h^2)$
Plná guľa		$J = \frac{2}{5} m r^2$
Kužeľ (pravouhlý)		$J_z = \frac{3}{10} m r^2$ $J_x = J_y = \frac{3}{5} m \left(\frac{r^2}{4} + h^2 \right)$
Tyč s dĺžkou l hmotnosťou m		S osou rotácie v strede: $J = \frac{1}{12} m l^2$ S osou rotácie na kraji: $J = \frac{1}{3} m l^2$ platí za predpokladu, že hmotnosť tyče je rozmiestnená rovnomerne

Vzájomné porovnanie moment zotrvačnosti gule J_g , valca J_v a kužeľa J_k :

$$\frac{J_g}{J_v} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{J_k}{J_v} = \frac{3}{5}$$

Záver: moment zotrvačnosti je menší, ak hmotnosť telesa je koncentrovaná pri osi rotácie a naopak.

Steinerova veta

Ak poznáme moment zotrvačnosti J_o telesa rotujúceho okolo vlastnej osi, potom pre moment zotrvačnosti telesa vzhľadom k paralelnej osi vo vzdialenosti x , použijeme *Steinerovu vetu*. Podľa nej, ak hmotnosť telesa je m , vzdialenosť osí je x a moment zotrvačnosti J vzhľadom na tú, ktorá neprechádza ťažiskom sa vypočíta:

$$J = J_o + m x^2$$

2. Rotačný mechanický systém bez prevodovky

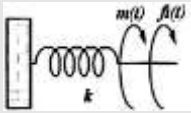
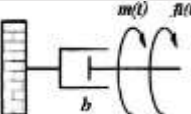
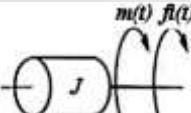
2.2 Rotačný mechanický systém s jedným stupňom voľnosti

Rotačné mechanické systémy sa riešia podobne ako translačné systémy:

- sila sa nahradí momentom $f(t) \sim m(t)$
- translačná rýchlosť sa nahradí uhlovou rýchlosťou . $v(t) \sim \omega(t)$
- dráha sa nahradí uhlom natočenia $x(t) \sim \theta(t)$

Aj pasívne prvky rotačného systému sú ekvivalentné pasívnym prvkom translačného systému: torzná pružina s koeficientom pružnosti k , torzný viskózný tlmič s koeficientom viskózneho tlmenia b a moment zotrvačnosti J .

Ako budiaci signál (vstupná veličina) tu vystupuje moment $m(t)$. Vlastnosti prvkov, vyjadrené matematicky, sú uvedené v tabuľke.

Prvok obvodu	Sila-dráha (analógia $m - C$)	v Laplaceovej transformácii	Rotačná mech. impedancia $Z_M(s) = \frac{\theta(s)}{M(s)}$
Torzná pružina 	$m(t) = k \theta(t)$	$M(s) = k \theta(s)$	$Z_{Mk}(s) = k$
Torzný tlmič (viskózný) 	$m(t) = b \frac{d\theta(t)}{dt}$	$M(s) = bs \theta(s)$	$Z_{Mb}(s) = bs$
Moment zotrvačnosti 	$m(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	$M(s) = Js^2 \theta(s)$	$Z_{MJ}(s) = Js^2$

Aby sme sa vyhli zavedeniu ďalších indexov, v tomto texte je uvedené rovnaké označenie parametrov k a b translačného a rotačného systému.

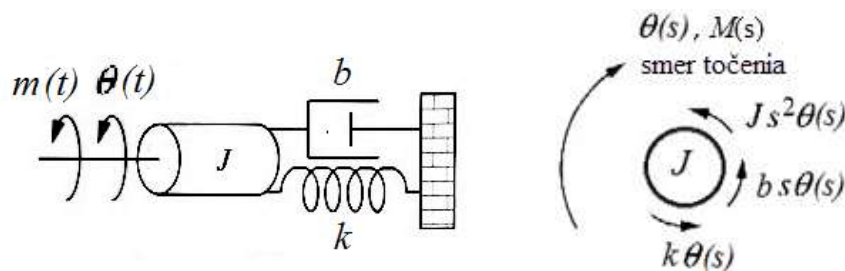
Nevadí to, pokiaľ pracujeme iba v jednom systéme; pri zmiešaných rotačno-translačných systémoch však je potrebné rozlišovať, pretože tieto parametre sa líšia aj rozmermi. Tieto sú prehľadne uvedené v tabuľke (index tr – translačný, rot – rotačný).

Sila-dráha (tzv. analógia $\mathbf{m} - \mathbf{c}$)	Translačný systém	Rotačný systém
Tuhosť pružiny	$[k_{tr}] = \text{N/m}$	$[k_{rot}] = \text{Nm/rad}$
Tlmenie tlmiča	$[b_{tr}] = \text{Ns/m}$	$[b_{rot}] = \text{Nms/rad}$

Počet stupňov voľnosti rotačného systému zistíme zo súčtu počtu telies, ktoré sa otáčajú, zatiaľ, čo ostatné sú v pokoji. Takto postupne preveríme celý systém.

Odvodenie prenosovej funkcie rotačného systému s jedným DOF

Odvodíme prenosovú funkciu rotačného telesa (mechanický rotačný systém s jedným stupňom voľnosti), ktoré je pripojené k pevnej podložke cez torznú pružinu paralelne s torzným tlmičom na ktoré pôsobí moment $\mathbf{m}(t)$.¹



Pozn.: ak zmysel momentu pôsobiaceho na rotujúce teleso a smer otáčania sú zhodné, daný moment je hnacím momentom. A naopak: ak moment pôsobí proti smeru otáčania, ide o záťažný moment.

Pred zostavením pohybových rovníc analyzujeme pôsobenie jednotlivých momentov – proti hnaciemu momentu ostatné predstavujú záťažové momenty

$$\sum M_i = M$$

teda:

$$Js^2\theta(s) + b_1s\theta(s) + k\theta(s) = M(s)$$

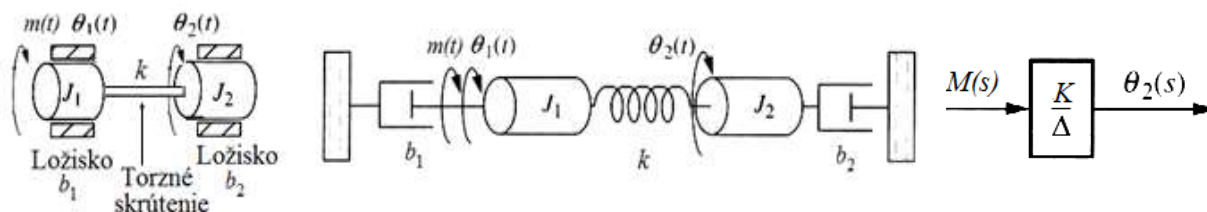
odkiaľ prenosová funkcia je:

$$\frac{\theta(s)}{M(s)} = \frac{1}{Js^2 + bs + k}$$

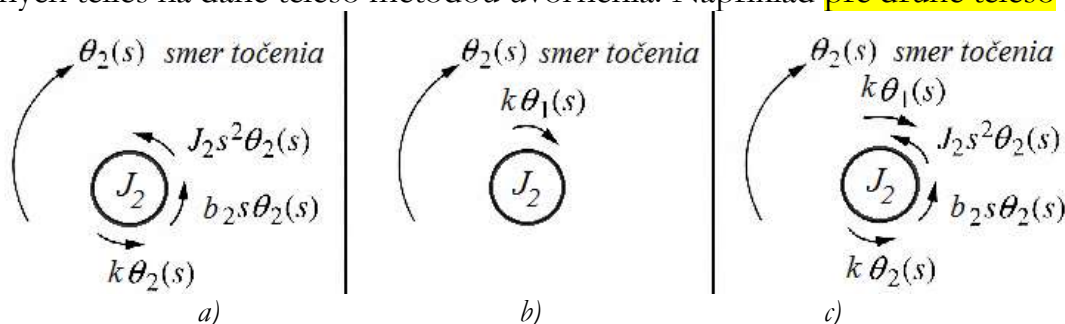
¹ Dynamika sústav telies, <https://knmts.fvt.tuke.sk/media/documents/63440b2158056457434d6a973d44d748.pdf>

2.3 Rotačný mech. systém s viacerými stupňami voľnosti

Pre zovšeobecnenie poznatkov zvolíme systém s dvoma stupňami voľnosti. Dve zotrvačné telesá sú spojené torznou pružinou. Obe telesá sú uložené v ložiskách, ktoré predstavujú viskózne tlmiče.



Pred zostavením pohybových rovníc pomocou metódy (postupného) uvoľňovania² rozkreslíme každé teleso zvlášť a zakreslíme momentové pôsobenie ostatných rotačných telies na dané teleso metódou uvoľnenia. Napríklad pre druhé teleso je to:



Pôsobenie momentov na druhé teleso: a) momenty pôsobiace na druhé teleso v dôsledku pohybu iba toho (druhého) telesa; b) momentové pôsobenie druhého telesa na prvé; c) výsledný momentový diagram

Podobne môžeme odvodiť momentový diagram pre prvé teleso.

Pre momentovú rovnováhu prvého a druhého telesa napíšeme rovnice, ktoré upravíme do tvaru:

$$(J_1 s^2 + b_1 s + k) \theta_1(s) - k \theta_2(s) = M(s)$$

$$-k \theta_1(s) + (J_2 s^2 + b_2 s + k) \theta_2(s) = 0$$

Ako pri translačnom mechanickom systéme i pri elektrickom systéme (pri aplikácii metódy slučkových prúdov, alebo metódy uzlových napätí), tak aj teraz môžeme zapísať pravidlo pre zostavovanie rovníc:

$\left[\begin{array}{c} \text{Suma impedancií} \\ \text{pripojených} \\ \text{k telesu 1} \end{array} \right] \theta_1(s) - \left[\begin{array}{c} \text{Suma impedancií} \\ \text{medzi} \\ \text{telesami 1 a 2} \end{array} \right] \theta_2(s) = \left[\begin{array}{c} \text{Suma momentov} \\ \text{pôsobiacich} \\ \text{na teleso 1} \end{array} \right]$
$- \left[\begin{array}{c} \text{Suma impedancií} \\ \text{medzi} \\ \text{telesami 1 a 2} \end{array} \right] \theta_1(s) + \left[\begin{array}{c} \text{Suma impedancií} \\ \text{pripojených} \\ \text{k telesu 2} \end{array} \right] \theta_2(s) = \left[\begin{array}{c} \text{Suma momentov} \\ \text{pôsobiacich} \\ \text{na teleso 2} \end{array} \right]$

² Dynamika mechanizmov

http://www.elearn.vsb.cz/archivcd/FS/DYN1/CD_dynamika/text/D10_dynamika_mechanismu.pdf

Obe rovnice možno zapísať v maticovom tvare:

$$\begin{bmatrix} J_1 s^2 + b_1 s + k & -k \\ -k & J_2 s^2 + b_2 s + k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1(s) \\ \theta_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Riešením tejto sústavy lineárnych rovníc (inverznou maticou, Cramerovým pravidlom, alebo jednoduchým dosadením z jednej rovnice do druhej) vypočítame uhol $\theta_2(s)$, odkiaľ dostaneme prenosovú funkciu, napr.:

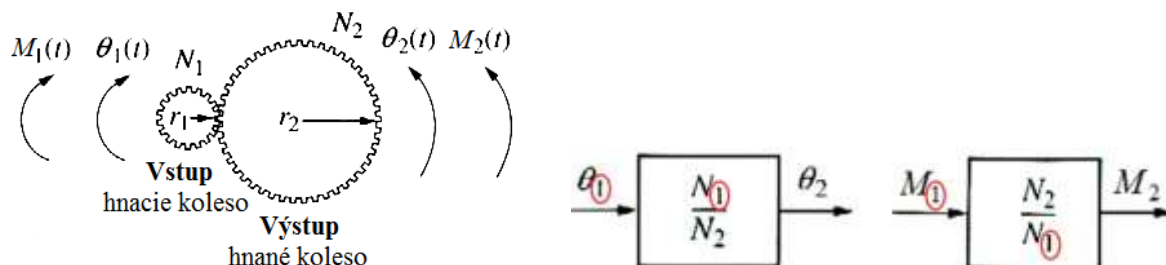
$$G(s) = \frac{\theta_2(s)}{M(s)} = -\frac{k}{\Delta}$$

kde Δ je determinant sústavy rovníc $\Delta = \begin{vmatrix} J_1 s^2 + b_1 s + k & -k \\ -k & J_2 s^2 + b_2 s + k \end{vmatrix}$

2.4 Rotačný mechanický systém s prevodovkou

Prepočet uhla natočenia, uhlovej rýchlosti a momentu

Rotačné mechanické systémy často obsahujú prevodovku, ktorú môžeme riešiť ako bezstratovú, alebo do modelu zahrnúť aj je straty. Najprv uvažujeme ideálnu lineárnu prevodovku bez vôle v zuboch. Jednostupňová prevodovka je principiálne nakreslená na obrázku.



Obvodová rýchlosť na obvode obidvoch ozubených kôl je rovnaká $v_1 = v_2$, je rovnaká aj dráha $x_1 = x_2$. Keďže $x = r\theta$, potom $r_1\theta_1 = r_2\theta_2$

Tiež $\omega = \dot{\theta}t$, teda $\omega_1 \sim \theta_1$ a $\omega_2 \sim \theta_2$. Pre prevod prevodovky potom odvodíme:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{N_2}{N_1} = j$$

kde j je prevodový pomer. Pri prevode do pomala je prevod $j > 1$ a naopak.

Uhol natočenia a uhlová rýchlosť sú nepriamo úmerné počtu zubov príslušného ozubeného kolesa prevodovky.

Vzťah medzi vstupným a výstupným momentom odvodíme na základe zachovania výkonu na vstupnej a výstupnej strane ($P = M\omega$):

$$M_1\omega_1 = M_2\omega_2$$

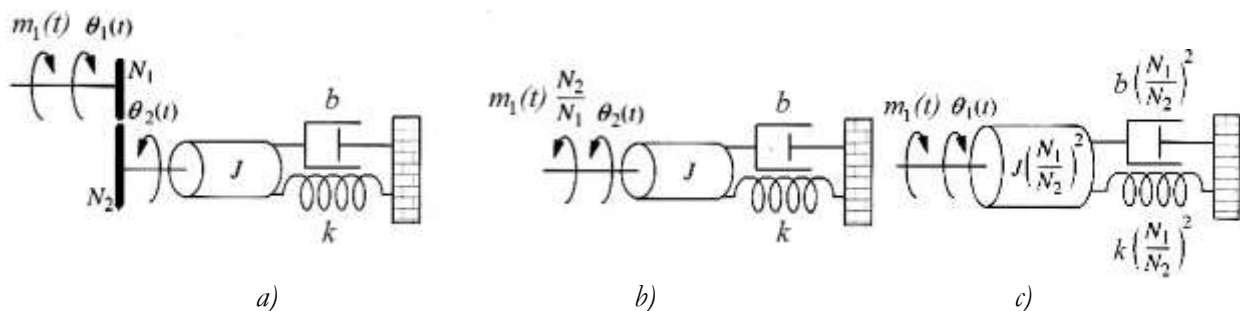
odkiaľ vyplýva, že **moment na hriadeľi je priamo úmerný počtu zubov príslušného ozubeného kola** prevodovky:

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{N_2}{N_1} = j$$

Prepočet parametrov pružného rot. systému z jedného hriadeľa na druhý

V ďalšom vyšetříme, ako sa menia mechanické impedancie rotačného mechanického systému pri ich prepočte z jedného hriadeľa cez prevodovku na druhý hriadeľ.

Urobme tu prepočet z výstupného hriadeľa (2) na vstupný (1):



Postupný prepočet mechanickej impedancie z výstupného hriadeľa cez prevodovku na
b) výstupný hriadeľ; c) vstupný hriadeľ

Moment na výstupnej strane prevodovky je:

$$M_2(s) = (Js^2 + bs + k) \theta_2(s)$$

Dosadíme na ľavú stranu: $M_2 = j M_1 = \frac{N_2}{N_1} M_1$ a na pravú: $\theta_2 = \frac{1}{j} \theta_1 = \frac{N_1}{N_2} \theta_1$

t.j.:

$$\frac{N_2}{N_1} M_1 = (Js^2 + bs + k) \frac{N_1}{N_2} \theta_1$$

Z tejto rovnice vyjadríme vzťah medzi momentom M_1 a odpovedajúcim uhlom natočenia θ_1 , pričom všetky veličiny z druhého hriadeľa sú prepočítané na prvý hriadeľ:

$$M_1(s) = (Js^2 + bs + k) \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \theta_1(s)$$

Keďže:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{j}$$

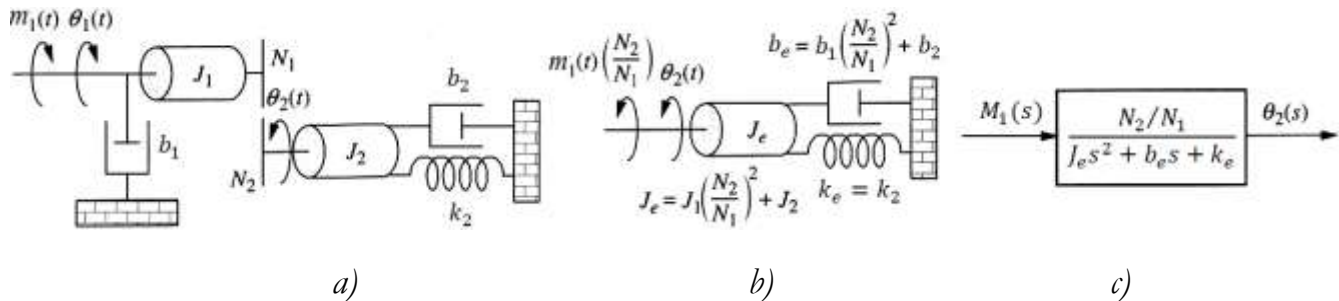
potom:

$$M_1(s) = \left(\frac{J}{j^2} s^2 + \frac{b}{j^2} s + \frac{k}{j^2}\right) \theta_1(s)$$

Tým sme prepočítali mechanické impedancie z výstupu (index 2) na vstup (index 1).

Príklad

Nájďme prenosovú funkciu dvojhmotnostného mechanického systému, ktorý je budený momentom M_1 , pričom výstupom zo systému je uhol natočenia výstupného hriadeľa θ_2 , t.j. $G(s) = \theta_2(s)/M_1(s)$.



Postupný výpočet prenosovej funkcie mechanického systému

Podobne môžeme prepočítať impedancie zo vstupného hriadeľa (1) na výstupný hriadeľ (2) násobením prevodom j^2 a tiež moment zo vstupného hriadeľa na výstupný násobením prevodom j . Pohybová rovnica pre výstupný hriadeľ je:

$$M_2(s) = M_1(s)j = (J_e s^2 + b_e s + k_e) \theta_2(s)$$

kde jednotlivé parametre s indexom *ekv* predstavujú ekvivalentný moment zotrvačnosti J_e , ekvivalentný koeficient tlmenia b_e a ekvivalentný koeficient tuhosti k_e :

$$J_e = J_1 j^2 + J_2; \quad b_e = b_1 j^2 + b_2; \quad k_e = k_2$$

Dosadením do vyššie uvedenej rovnice dostaneme hľadaný prenos:

$$G_{21}(s) = \frac{\theta_2(s)}{M_1(s)} = \frac{N_2/N_1}{J_e s^2 + b_e s + k_e} = \frac{j}{J_e s^2 + b_e s + k_e}$$

kde index 21 v prenose $G_{21}(s)$ znamená, že ide prenos medzi druhým výstupom $\theta_2(s)$ a prvým vstupom $M_1(s)$ (najprv píšeme index výstupu, potom vstupu)

Keďže:

$$\theta_2 = \frac{\theta_1}{j}$$

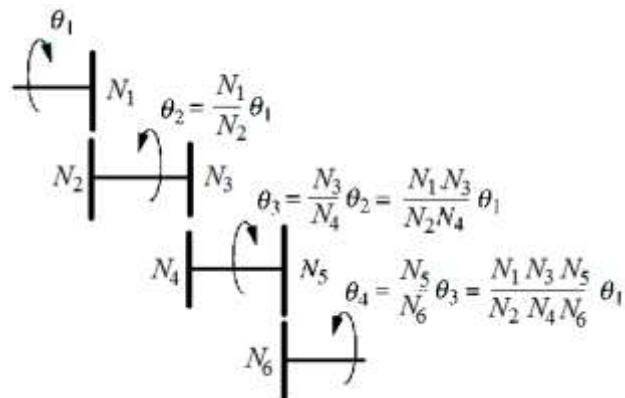
prenos medzi prvým výstupom a prvým vstupom je:

$$G_{11}(s) = \frac{\theta_1(s)}{M_1(s)} = \frac{1}{j} \frac{j}{J_e s^2 + b_e s + k_e} = \frac{1}{J_e s^2 + b_e s + k_e}$$

Prepočty pri viacstupňovej prevodovke

V prípade, ak sa požaduje veľký prevodový pomer medzi vstupným a výstupným hriadeľom, príslušné ozubené koleso by bolo veľmi veľké, čo by zhoršovalo dynamiku systému (t.j. malo by veľký moment zotrvačnosti, ktorý sa zväčšuje so štvrtou mocninou priemeru rotačného telesa). Preto sa používa viacstupňová prevodovka, ktorá obsahuje viac dvojíc menších ozubených kôl a výsledný prevod získame súčinom jednotlivých prevodov, $j = j_1 j_2 j_3$:

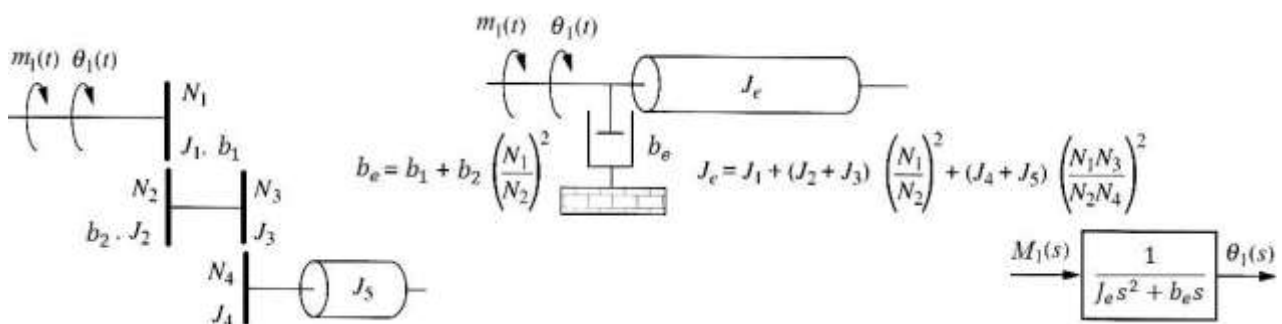
$$\theta_4 = \frac{N_1 N_3 N_5}{N_2 N_4 N_6} \theta_1 = \frac{1}{j_1 j_2 j_3} \theta_1 = \frac{1}{j} \theta_1$$



V skutočnosti mechanické prevodovky nie sú ideálne, bezstratové, ale každá prevodovka má mechanické straty viskóznym trením, čím sa znižuje účinnosť prevodovky. Tieto straty nahradzujeme príslušným koeficientom tlmenia pripojeným k danému hriadeľu (ozubenému kolesu).

Príklad

Nájďme prenosovú funkciu dvojhmotnostného systému s ideálnou prevodovkou $G(s) = \theta_2(s)/M_1(s)$, pričom v ložiskách vstupného hriadeľa je viskózne trenie b_1 a v prevodovke uvažujeme so stratami na druhom stupni, vyjadrenými tlmením b_2 .



Zavedieme mechanické impedancie, ktoré prepočítame na vstupný hriadeľ, θ_1 . Pri ich prepočte musíme uvažovať tiež príslušný prevodový pomer; tlmenie b_2 prepočítame cez prevod $b_2(N_1/N_2)^2 = b_2/j^2$.

Momenty zotrvačnosti J_3 a J_4 prepočítavame cez dva prevody:

$$(J_4 + J_5) \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4} \right)^2 = (J_4 + J_5) \frac{1}{(j_1 j_2)^2}$$

Dosadíme do pohybovej rovnice:

$$(J_e s^2 + b_e s) \theta_1(s) = M_1(s)$$

kde indexom e sú označené ekvivalentné veličiny:

$$J_e = J_1 + (J_2 + J_3) \frac{1}{j_1^2} + (J_4 + J_5) \frac{1}{(j_1 j_2)^2}$$

$$b_e = b_1 + b_2 \frac{1}{j_1^2}$$

Po dosadení vypočítame hľadanú prenosovú funkciu:

$$G(s) = \frac{\theta_1(s)}{M_1(s)} = \frac{1}{J_e s^2 + b_e s} = \frac{1}{s(J_e s + b_e)}$$