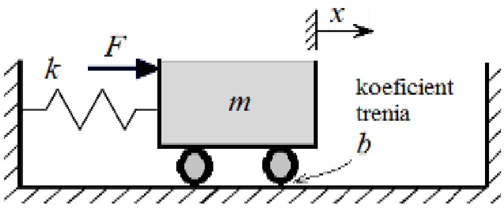
Pr. 9 Modelovanie mechanických systémov v stavovom priestore

1. Stavový model mechanického systému

1.1. Analytické zostavenie stavového modelu translačného mechanického systému 1DOF

Aj pre mechanické systémy opísané diferenciálnymi rovnicami možno odvodiť ich stavové modely. Stavovými veličinami sú tu spravidla rýchlosti a posunutia telies (rotačné/translačné). Uveďme niekoľko príkladov na zostavenie stavového popisu mechanického systému.

Jednoduchý translačný systém v ktorom je pružina s koeficientom tuhosti k je pripojená paralelne ku tlmiču b je opísaný diferenciálnymi rovnicami,:



$$m\frac{dv}{dt} + kx + bv = F$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

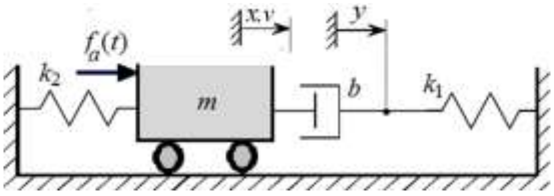
odkiaľ po krátkom výpočte a usporiadaní výsledkov do rovníc do maticovej formy dostávame stavový zápis:

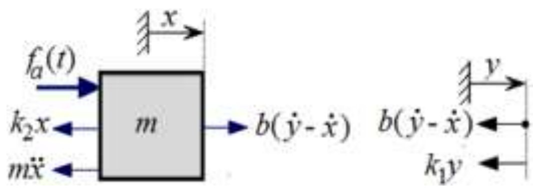
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -\mathrm{b}/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} F$$

$$u_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + [0]F$$

V translačných mechanických systémoch stavovými veličinami spravidla sú dráhy jednotlivých telies a ich derivácie (rýchlosti); v rotačných systémoch uhly natočení telies a jeho derivácia podľa času.

Napr. pre translačný systém na nasledujúcom obrázku[1] ide o 3 zásobníky energie: kinetickej, uloženej v zotrvačnej hmote a v potenciálnej, ktorá je uložená v obidvoch pružinách. Pre tieto 3 zásobníky energie môžeme napísať nasledovné vzťahy.





Metódou uvoľňovania získame matematický model zariadenia: dynamickú rovnicu pre pohyb vozíka, na ktorý pôsobí sila $f_a(t)$:

$$m\,\ddot{x} + b\dot{x} + k_2 x - b\dot{y} = f_a$$

(**Chyba! Dokument neobsahuje žiadny text so zadaným štýlom.**.1)

Diferenciálnu rovnicu II. rádu rozpíšeme na dve diferenciálne rovnice I. rádu zavedením stavových veličín (máme na mysli, že $\dot{x} = v$):

(**Chyba! Dokument neobsahuje žiadny text so zadaným štýlom.**.2)

$$x = q_1, \quad \dot{x} = \dot{q}_1 = q_2, \qquad \text{potom} \quad \dot{q}_2 = \ddot{x}, \qquad \text{a} \quad y = q_3$$

(**Chyba! Dokument neobsahuje žiadny text so zadaným štýlom.**.3)

$$\dot{q}_2 = \ddot{x} = \frac{1}{m}(f_a - b\dot{x} - k_2 x + b\dot{y}) = \frac{1}{m}(f_a - bq_2 - k_2 q_1 + bq_3)$$

(**Chyba! Dokument neobsahuje žiadny text**

[1] Control System Engineering-Ii (3-1-0), Lecture Notes. State space analysis, https://www.vssut.ac.in/lecture_notes/lecture1450172554.pdf
Difficulties going to State Space from System Diagram, https://lpsa.swarthmore.edu/Representations/SysRepSS_Difficult.html

so zadaným štýlom..4)

Pre pružinu a tlmič v pravej časti obrázku platí:

$$b\dot{y} + k_1 y - b\dot{x} = 0$$

$$\dot{q}_3 = \dot{y} = \frac{1}{b}(-k_1 y + bq_2) = \frac{1}{b}(-k_1 q_3 + q_2)$$

(**Chyba! Dokument neobsahuje žiadny text so zadaným štýlom.**.5)

Diferenciálne rovnice I. rádu so stavovými veličinami q_1, q_2, q_3 zapíšeme v štandardnom tvare stavového popisu pre SISO systém:

$$\dot{q} = Aq + bu$$

$$y = c^T q + du$$

(**Chyba! Dokument neobsahuje žiadny text so zadaným štýlom.**.6)

kde:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ v \\ y \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k_2}{m} & -\frac{b}{m} & \frac{b}{m} \\ 0 & 1 & -\frac{k_1}{b} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

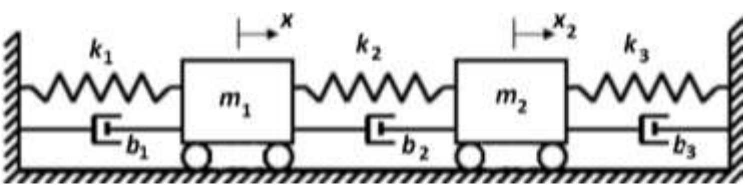
(**Chyba! Dokument neobsahuje žiadny text so zadaným štýlom.**.7)

Prvky vektora c^T závisia od voľby výstupnej veličiny. Ak výstupom je $y = q_3$ potom:

$$c^T = [0 \quad 0 \quad 1] \qquad\qquad d = 0$$

1.2. Stavový model translačného systému s 2DOF

Pri odvodení stavového modelu viachmotnostného systému postupujeme podobne[2]:



2 State Space Model for Spring-Mass-Damper - Simulation of Mechanical Systems - Lecture Notes https://www.docsity.com/en/state-space-model-for-spring-mass-damper-simulation-of-mechanical-systems-lecture-notes/409397/

State-Space model of a mechanical system in MATLAB/Simulink, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705812046267

1) Zostavíme pohybové rovnice systému:

$$s^2 m_1 X_1 + (k_1 + s b_1) X_1 + (k_2 + s b_2)(X_1 - X_2) = F$$

$$s^2 m_2 X_2 + (k_3 + s b_3) X_2 + (k_2 + s b_2)(X_2 - X_1) = 0$$

2) Vyjadríme najvyššiu deriváciu a pravú stranu rozpíšeme po jednotlivých členoch:

$$s m_1 s X_1 = F - k_1 X_1 - b_1 s X_1 - k_2 X_1 + k_2 X_2 - b_2 s X_1 + b_2 s X_2$$

3) Zavedieme substitúcie: $sX_1 = X_3$, $sX_2 = X_4$, pričom $sX_1 = V_1$, $sX_2 = V_2$, takže stavový vektor bude:

$$x = [X_1\ X_2\ V_1\ V_2]^T$$

4) Rovnica po zavedení substitúcií je:

$$m_1 s X_3 = F - (k_1 + k_2) X_1 - (b_1 + b_2) X_3 + k_2 X_2 + b_2 X_4$$

Podobne upravíme druhú pohybovú rovnicu:

$$m_2 s X_4 = -(k_2 + k_3) X_2 - (b_2 + b_3) X_4 + k_2 X_1 + b_2 X_3$$

5) Rovnice vydelíme hmotnosťami a výsledná sústava stavových rovníc je:

$$sX_1 = X_3$$

$$sX_2 = X_4$$

$$sX_3 = \frac{1}{m_1} F - \frac{k_1 + k_2}{m_1} X_1 + \frac{k_2}{m_1} X_2 - \frac{b_1 + b_2}{m_1} X_3 + \frac{b_2}{m_1} X_4$$

$$sX_4 = \frac{k_2}{m_2} X_1 - \frac{k_2 + k_3}{m_2} X_2 + \frac{b_2}{m_2} X_3 - \frac{b_2 + b_3}{m_2} X_4$$

6) čo po prepise do maticového tvaru dáva rovnicu dynamiky:

$$\begin{bmatrix} sX_1 \\ sX_2 \\ sX_3 \\ sX_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{b_1 + b_2}{m_1} & \frac{b_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2 + k_3}{m_2} & \frac{b_2}{m_2} & -\frac{b_2 + b_3}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F$$

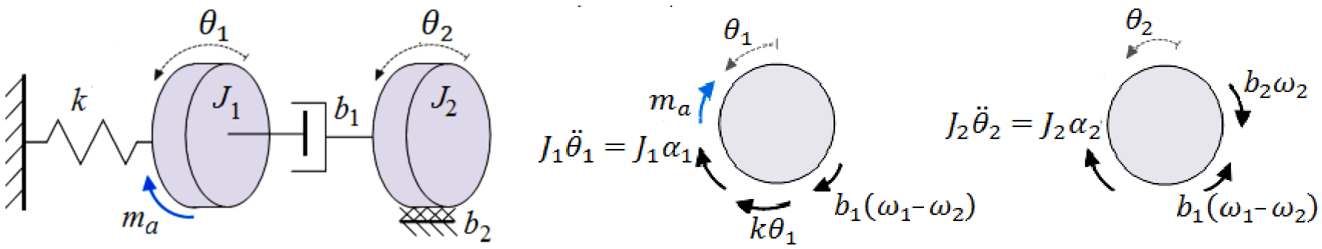
7) Výstupná rovnica závisí od voľby požadovaných výstupných veličín. Napríklad, ak chceme poznať dráhy a rýchlosti telies, potom:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$$

Viac informácií o stavovom popise systémov sa nachádza napr. tu[3].

2. Analytické zostavenie stavového modelu rotačného mechanického systému

Kinematická schéma dvojhmotnostného rotačného systému[4].



Rotačný systém je opísaný dynamickou rovnicou:

$$J_1\ddot{\theta}_1 + b_1\dot{\theta}_1 + k\,\theta_1 - b_1\dot{\theta}_2 = m_a \tag{0.31}$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 + (b_1 + b_2)\dot{\theta}_2 - b_1\dot{\theta}_1 = 0$$

Zavedieme substitúcie:

$$q_1 = \theta_1, \quad \dot{q}_1 = \dot{\theta}_1 = q_2, \quad \dot{q}_2 = \ddot{\theta}_1, \quad q_3 = \theta_2, \quad \dot{q}_3 = \dot{\theta}_2 = q_4 \quad \dot{q}_4 = \ddot{\theta}_2$$

(**Chyba! Dokument neobsahuje žiadny text so zadaným štýlom.**.8)

Keďže $\dot{\theta}_1 = \omega_1$ a $\dot{\theta}_2 = \omega_2$, vektor stavových veličín v tomto prípade je:

$$[q_1\; q_2\; q_3\; q_4]^T = [\theta_1\; \omega_1\; \theta_2\; \omega_2]^T$$

Pomocou nich a rovnice (4.31) dostaneme sústavu diferenciálnych rovníc I. rádu:

$$\dot{q}_1 = \dot{\theta}_1 = q_2$$

(**Chyba! Dokument neobsahuje žiadny text so**

[3] **Control System. 3 Modeling in the Time Domain,** http://www.uop.edu.pk/ocontents/Chapter3.pdf

zadaným štýlom..9)

$$\dot{q}_2 = \frac{1}{J_1}\left(-m_a - b_1\dot{\theta}_1 - k\theta_1 + b_1\dot{\theta}_2\right) = \frac{1}{J_1}(m_a - b_1 q_2 - kq_1 + b_1 q_3)$$

(**Chyba! Dokument neobsahuje žiadny text so zadaným štýlom.**.10)

$$\dot{q}_3 = \dot{\theta}_2 = q_4$$

$$\dot{q}_4 = \frac{1}{J_2}\left[-(b_2 + b_1)\dot{\theta}_2 + b_1\dot{\theta}_1\right] = \frac{1}{J_2}[-(b_2 + b_1)q_3 + b_1 q_2]$$

(**Chyba! Dokument neobsahuje žiadny text so zadaným štýlom.**.11)

odkiaľ dostaneme hľadaný stavový model:

$$\dot{q} = Aq + bu$$
$$y = c^T q + du$$

(**Chyba! Dokument neobsahuje žiadny text so zadaným štýlom.**.12)

kde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\mathrm{k}}{J_1} & -\frac{b_1}{J_1} & \frac{b_1}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b_1}{J_2} & -\frac{b_1+b_2}{J_2} & 0 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A vstupnou veličinou je hnací moment $u = m_a$

3. Zostavenie stavového modelu dynamického systému z blokovej schémy

V prípade, ak je daná bloková schéma lineárneho systému, stavový popis systému zostavíme priamo z jeho blokovej schémy týmto spôsobom:

1) Blokovú schému systému upravíme tak, aby obsahovala iba bloky integrátorov a sústav I. rádu,
2) Zvolíme stavové veličiny, najvýhodnejšie na výstupe integrátorov a sústav I. rádu (príp. sústavu I. rádu rozkreslíme pomocou integrátora, sumátora a blokov zosilnení).
3) Stavovú rovnicu zapíšeme nasledovne: vychádzame od stavovej veličiny a pokračujeme proti smeru toku signálu, pričom zapisujeme jednotlivé prenosy. Takto pokračujeme až po ďalšiu stavovú veličinu, resp. po vstupnú veličinu.
4) Zapíšeme výstupnú rovnicu.

Odporúčaná literatúra

[1] **State Space model of an advanced mechanical system**
https://www.youtube.com/watch?v=J8cuDct5JsE

[2] **State Space Model For Spring-Mass-Damper**
https://www.docsity.com/en/state-space-model-for-spring-mass-damper-solved-examples/408547/

[3] **State space representation of mechanical system examples**
(príklady na skúšku)